Rapport sur le Devoir Surveillé n°3

- Certains persistent à écrire dans les marges, au mépris des consignes.
- Pour les prochains devoirs, une portion de texte située dans la marge ou en base de page sera systématiquement ignorée.

Abréviations — • Aucune abréviation n'est acceptée sur les copies, en particulier « Mq » est à bânir.

Présentation des calculs — • Une réponse à un calcul ne peut jamais être une chaîne d'identités sans aucune justification.
• Vous devez avoir le souci constant d'expliquer votre démarche, en particulier en mentionnant la formule du binôme de Newton lorsque vous l'appliquez.
• Justifier n'est pas une option mais une obligation.

Q1 — • L'algorithme du pivot est plutôt bien compris.
• Il y a eu des divisions par zéro en nombre, ce qui constitue une erreur grave. Typiquement des divisions par $1-m$ alors que m peut valoir 1.
• Par ailleurs, l'ensemble solution d'un système linéaire doit être donné en extension.
• Les opérations élémentaires doivent toutes être indiquées, au bon endroit.

Q3 — • Le cours n'est pas toujours bien appris et le manque de précision est patent.
• On voit fleurir $\Longleftrightarrow$ dans la définition d'une application injective, ce qui est pour le moins étrange.
• De plus, les variables introduites doivent toutes être définies et quantifiées.

Q4 — • Le schéma rédactionnel d'une preuve d'injectivité est un outil précieux pour débuter vos démonstrations et les structurer avec soin.
• Tous les schémas rédactionnels proposés doivent être connus, notamment pour éviter des rédactions vides de sens, avec des objets/hypothèses non définis rigoureusement.

Q8 — • La question a été souvent bien traitée.
• L'expression « par identification » est à proscrire. Nous avions expliqué que nous cherchions uniquement une condition suffisante et rédigé avec « il suffit ».
• Les constantes a, b, c cherchées sont indépendantes de x, comme nous l'indique l'ordre des quantificateurs dans l'énoncé.

Q9 — • En effectuant le changement d'indice $\ell = k+1$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \sum_{\ell=1}^{n+1} \frac{1}{\ell(\ell+1)(\ell+2)}$$

et l'on pouvait appliquer Q8. Aussi n'était-il pas utile de faire une nouvelle décomposition en éléments simples.
• Pour résoudre une question, gardez à l'esprit que les précédentes peuvent être utiles.

Q10 — • Pour énoncer la relation de Pascal, il faut définir/quantifier les variables n et k en jeu.
• Ici, $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, ce que peu d'élèves ont indiqué.

Q12 — • Le calcul de $M_0(n)$ a été réussi par beaucoup. Il fallait citer la formule du binôme de Newton pour justifier/expliquer.
• Le traitement de $M_1(n)$ a posé de réelles difficultés, avec l'apparition de $(-1)!$ qui n'a aucun sens. Comme $0 \times \binom{n}{0} = 0$:

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Le changement de variable $\ell = k-1$ donne alors :

$$\sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} = n \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} p^{\ell+1}(1-p)^{n-\ell-1}$$

et les bornes de la somme sont bien sûr modifiées. Il faut encore factoriser par p pour reconnaître la somme donnant le développement de $(p+(1-p))^{n-1}$ avec le binôme de Newton.

- Pour calculer $M_2(n)$ une clé est :

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \qquad k^2 = k(k-1)+k$$

comme vu en classe. Ensuite, on commence par observer :

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2} p^k(1-p)^{n-k}\,.$$

Q14 — • Cette question facile met en jeu la décomposition d'une somme suivant les termes d'indices pairs d'une part et suivant les termes d'indices impairs d'autre part. Si $n \in \mathbb{N}^*$ et si $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$, alors :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{2p} + \sum_{p=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} a_{2p+1}}$$

et cette identité pourra servir dans de nombreuses occasions.

Q18 — • La question a été abordée uniquement par trois élèves.

- Je vous invite à étudier intensément la formule d'inversion de Pascal dont la preuve donnée dans le corrigé brasse nombre de propriétés des sommes.
- D'une manière générale, il faut étudier l'intégralité du DS à l'aide du corrigé.