Un corrigé du devoir surveillé n°3

— 108 points —

Exercice 1 — Bijectivité d'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$

Soit m un réel fixé. On considère le système linéaire (S_m) d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et l'application f_m définis comme suit.

$$(S_m)\quad \left\{\begin{array}{ccccccc} mx & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & my & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & mz & = & 0 \end{array}\right. \qquad f_m \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (mx+y+z, x+my+z, x+y+mz) \end{array}\right.$$

Q1 — 12 point(s) — Résoudre le système linéaire (S_m).

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} mx & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & my & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & mz & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & my & + & z & = & 0 \\ mx & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & mz & = & 0 \end{array}\right. \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & my & + & z & = & 0 \\ & & (1-m^2)\,y & + & (1-m)z & = & 0 \\ & & (1-m)\,y & + & (m-1)\,z & = & 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - mL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & my & + & z & = & 0 \\ & & (1-m)\,y & + & (m-1)\,z & = & 0 \\ & & (1-m^2)\,y & + & (1-m)z & = & 0 \end{array}\right. \quad L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & my & + & z & = & 0 \\ & & (1-m)\,y & + & (m-1)\,z & = & 0 \\ & & & & (1-m)(m+2)z & = & 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - (1+m)L_2 \end{array}$$

Nous sommes ainsi conduits à scinder l'étude en trois parties.

- *Cas où $m = 1$* Le système (S_m) est alors équivalent au système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. .$$

Son ensemble solution est $\{(-y-z, y, z) \;:\; (y,z) \in \mathbb{R}^2\}$, soit le plan dirigé par les vecteurs $(-1,1,0)$ et $(-1,0,1)$ et passant par $(0,0,0)$.

- *Cas où $m = -2$* Le système (S_m) est alors équivalent au système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ & & 3y & - & 3z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. .$$

Comme :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ & & 3y & - & 3z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccccl} x & - & 2y & + & z & = & 0 & \\ & & y & - & z & = & 0 & L_2 \leftarrow (1/3)L_2 \\ & & & & 0 & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccc} x & - & 2y & = & -z \\ & & y & = & z \\ & & & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccl} x & & = & z & L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ & y & = & z & \\ & & = & 0 & \end{array}\right.$$

Son ensemble solution est $\{(z,z,z) \,:\, z \in \mathbb{R}\}$, soit la droite dirigée par le vecteur $(1,1,1)$ et passant par $(0,0,0)$.

- *Cas où $m \neq 1$ et $m \neq -2$* Alors $1-m \neq 0$ et $(1-m)(m+2) \neq 0$ et donc :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & my & + & z & = & 0 \\ & & (1-m)\,y & + & (m-1)\,z & = & 0 \\ & & & & (1-m)(m+2)z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccccl} x & + & my & + & z & = & 0 & \\ & & y & - & z & = & 0 & L_2 \leftarrow (1/(1-m))L_2 \\ & & & & z & = & 0 & L_3 \leftarrow (1/((1-m)(m+2)))L_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{cccccl} x & + & my & & = 0 & L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ & & y & & = 0 & L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ & & & z & = 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{cccll} x & & & = 0 & L_1 \leftarrow L_1 - mL_2 \\ & y & & = 0 & \\ & & z & = 0 & \end{array}\right.$$

Son ensemble solution est le singleton $\{(0,0,0)\}$.

Nous avons donc démontré que l'ensemble solution de (S_m) est :

$$\boxed{\begin{array}{cl} \left\{(-y-z,y,z) \,:\, (y,z) \in \mathbb{R}^2\right\} & \text{si } \ m = 1\,; \\ \{(z,z,z) \,:\, z \in \mathbb{R}\} & \text{si } \ m = -2\,; \\ \{(0,0,0)\} & \text{sinon.} \end{array}}$$

Q2 — 6+6 point(s) — Déterminer une condition nécessaire et suffisante (C) portant sur m pour que l'application f_m soit bijective et calculer, lorsque (C) est vérifiée, l'application réciproque de f_m.

Nous raisonnons par analyse-synthèse, mode de raisonnement particulièrement adapté à la recherche de CNS.

- *Analyse* Supposons que f_m est bijective. Alors l'élément $(0,0,0)$ du but $\mathbb{R}^3$ de f_m possède un unique antécédent par f_m. D'après Q1, $m \neq 1$ et $m \neq -2$. La condition « $m \neq 1$ et $m \neq -2$ » est donc nécessaire à la bijectivité de f_m.

- *Synthèse* Vérifions si la condition « $m \neq 1$ et $m \neq -2$ » assure la bijectivité de f_m. Considérons donc $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2,1\}$. Soient $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. En reprenant les opérations élémentaires indiquées en

Q1, pour résoudre (S_m) dans le cas où $m \neq 1$ et $m \neq -2$, il vient :

$$f_m(x,y,z) = (a,b,c) \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} mx & + & y & + & z & = & a \\ x & + & my & + & z & = & b \\ x & + & y & + & mz & = & c \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \dfrac{(m+1)a-b-c}{m^2+m-2} \\[2ex] y & = & \dfrac{-a+(m+1)b-c}{m^2+m-2} \\[2ex] z & = & \dfrac{-a-b+(m+1)c}{m^2+m-2} \end{array}\right.$$

Ainsi, pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, il existe un unique $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ solution de l'équation $f(x,y,z) = (a,b,c)$. L'application f_m est donc bijective.

- *Conclusion* $\boxed{\text{L'application } f_m \text{ est bijective si et seulement si } m \neq 1 \text{ et } m \neq -2.}$

Dans le cas où $m \neq 1$ et $m \neq -2$, des calculs effectués dans la précédente synthèse, nous déduisons :

$$\boxed{f_m \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (a,b,c) & \longmapsto & \left(\dfrac{(m+1)a-b-c}{m^2+m-2}, \dfrac{-a+(m+1)b-c}{m^2+m-2}, \dfrac{-a-b+(m+1)c}{m^2+m-2}\right) \end{array}\right. .}$$

Exercice 2 — Composée de deux applications et injectivité

Q3 — 4 point(s) — Rappeler la définition d'une application injective. Trois formulations sont attendues.

Cf. C4.88.

Soient E, F, G trois ensembles et $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

Q4 — 2 point(s) — On suppose que f et g sont injectives. Démontrer que $g \circ f$ est injective.

Cf. C4.98(1).

Dans la suite de cet exercice, on suppose que l'application $g \circ f$ est injective.

Q5 — 2 point(s) — Démontrer que f est injective.

Cf. C4.98(2).

Q6 — 4 point(s) — Démontrer que l'application g n'est pas nécessairement injective. On pourra donner un contre-exemple à l'aide de diagrammes de Venn pour justifier sa réponse.

Soient les applications f et g définies par :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \{1\} & \longrightarrow & \{1,2\} \\ x & \longmapsto & 1 \end{array}\right. \qquad g \left| \begin{array}{ccc} \{1,2\} & \longrightarrow & \{1\} \\ x & \longmapsto & 1 \end{array}\right. .$$

Comme $g \circ f = \mathrm{id}_{\{1\}}$ est bijective, elle est injective. Cependant l'application g n'est pas injective puisque $g(1) = g(2)$.

Q7 — 6 point(s) — On suppose de plus que l'application f est surjective. Démontrer qu'alors l'application g est injective.

Soit $(y_1, y_2) \in F^2$ tel que :

$$(\star) \qquad g(y_1) = g(y_2)\,.$$

Démontrons que $y_1 = y_2$.
Comme $f : E \longrightarrow F$ est surjective et $(y_1, y_2) \in F^2$, il existe $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que :

$$(\star\star) \qquad y_1 = f(x_1) \text{ et } y_2 = f(x_2)\,.$$

De $(\star)$ et $(\star\star)$, nous déduisons $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Comme $g \circ f$ est injective, il vient :

$$(\star\star\star) \qquad x_1 = x_2\,.$$

De $(\star\star)$ et $(\star\star\star)$, nous déduisons finalement $\boxed{y_1 = y_2.}$

Exercice 3 — Somme et décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples

Q8 — 4 point(s) — Déterminer trois réels a, b, c tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}\,.$$

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2} = \frac{(a+b+c)\,x^2 + (3a+2b+c)\,x + 2a}{x(x+1)(x+2)}\,.$$

Ainsi, pour que $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ satisfasse la condition de l'énoncé, il suffit que :

$$a+b+c=0 \qquad 3a+2b+c=0 \qquad 2a=1\,.$$

Nous sommes donc conduits à résoudre le système linéaire :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} c & + & b & + & a & = & 0 \\ c & + & 2b & + & 3a & = & 0 \\ & & & & 2a & = & 1 \end{array} \right.$$

Les inconnues a, b, c ont été placées dans un ordre qui facilitera la résolution de (S) avec l'algorithme du pivot de Gauß.

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} c & + & b & + & a & = & 0 \\ & & b & + & 2a & = & 0 \\ & & & & 2a & = & 1 \end{array} \right. \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} c & + & b & + & a & = & 0 \\ & & b & + & 2a & = & 0 \\ & & & & 2a & = & 1 \end{array} \right. \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$(S) \iff \begin{cases} c + b + a = 0 \\ b + 2a = 0 \\ a = \frac{1}{2} & L_3 \leftarrow (1/2)L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c + b = -\frac{1}{2} & L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ b = -1 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c = \frac{1}{2} & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ b = -1 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Nous en déduisons que le système (S) possède une unique solution :

$$a = \frac{1}{2} \qquad b = -1 \qquad c = \frac{1}{2}.$$

On en déduit que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_{>0} \qquad \frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x+2}.}$$

Q9 — 5+1 point(s) — Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{(k+3)!}$$

puis étudier la limite éventuelle de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$ de sorte que $3 \leqslant n+1$ (cf. calcul ci-dessous). Nous calculons :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{(k+3)(k+2)(k+1)\,k!} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+3)(k+2)(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(k+2)(k+1)k} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k+2} \qquad \text{[d'après Q8]} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+2}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+3}\frac{1}{k} \\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\sum_{k=3}^{n+1}\frac{1}{k}\right) - \left(\frac{1}{2}+\sum_{k=3}^{n+1}\frac{1}{k}+\frac{1}{n+2}\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=3}^{n+1}\frac{1}{k}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n+2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right) \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+2)} + \frac{1}{2(n+3)}
\end{aligned}
$$

D'autre part :

$$S_0 := \sum_{k=0}^{0}\frac{k!}{(k+3)!} = \frac{0!}{3!} = \frac{1}{6} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(0+2)} + \frac{1}{2(0+3)}$$

et

$$S_1 := \sum_{k=0}^{1}\frac{k!}{(k+3)!} = \frac{0!}{3!} + \frac{1!}{4!} = \frac{5}{24} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(1+2)} + \frac{1}{2(1+3)}\,.$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall\, n\in\mathbb{N} \qquad S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+2)} + \frac{1}{2(n+3)}\,.}$$

Nous en déduisons que :

$$\boxed{S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{4}\,.}$$

EXERCICE 4 — TROIS APPLICATIONS DE LA FORMULE DU BINÔME DE NEWTON

Q10 — 2+2 point(s) — Énoncer la relation de Pascal pour les coefficients binomiaux, puis la démontrer.

Cf. C5.78(2).

Q11 — 4+8 point(s) — Énoncer la formule du binôme dans $\mathbb{C}$, puis la démontrer.

Cf. C5.84.

Q12 — 1+3+6 point(s) — Soit $(n,p)\in\mathbb{N}_{\geqslant 2}\times\,]0,1[$. Simplifier les trois sommes suivantes.

$$M_0(n) := \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \qquad M_1(n) := \sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \qquad M_2(n) := \sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

- Grâce à la forme du binôme de Newton, $\boxed{M_0(n) = (p+(1-p))^n = 1\,.}$
- Nous observons que pour tout $k\in[\![1,n]\!]$:

$$k\binom{n}{k} = k\,\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} = n\,\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Nous calculons :

$$\begin{aligned}
M_2(n) &:= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^{k+1} (1-p)^{n-k-1} \\
&= np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-k-1} \\
&= np\,(p+(1-p))^{n-1} \qquad \big[\text{d'après la formule du binôme de Newton}\big] .
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{M_1(n) = np\,.}$

- Nous observons que pour tout $k \in [\![2, n]\!]$:

$$k(k-1)\binom{n}{k} = k(k-1)\,\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(k-2)!\,(n-k)!} = n(n-1)\,\frac{(n-2)!}{(k-2)!\,(n-2-(k-2))!} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}.$$

Nous calculons :

$$\begin{aligned}
M_2(n) &:= \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (k(k-1)+k) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} + M_1(n) \\
&= \sum_{k=2}^{n} n(n-1) \binom{n-2}{k-2} p^k (1-p)^{n-k} + M_1(n) \\
&= n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} p^{k+2} (1-p)^{n-k-2} + np \\
&= n(n-1)p^2 \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} p^k (1-p)^{n-k-2} + np\,.
\end{aligned}$$

Grâce à la formule du binôme de Newton, il vient :

$$M_2(n) = n(n-1)p^2(p+(1-p))^{n-2} + np$$

soit $\boxed{M_2(n) = np((n-1)p+1)}$.

Q13 — 2 point(s) — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une forme trigonométrique de $1+i$ et en déduire la forme algébrique de $(1+i)^{4n}$.

- Nous calculons $|1+i| = \sqrt{2}$ puis :

$$1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right).$$

Comme $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, il vient $\boxed{1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}}$.

- D'après la forme trigonométrique précédemment trouvée :

$$(1+i)^{4n} = \left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{4n} = \sqrt{2}^{4n}\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{4n} = \left(\sqrt{2}^{4}\right)^{n}\left(e^{i\frac{4\pi}{4}}\right)^{n} = 4^n\left(e^{i\pi}\right)^{n}.$$

Comme $e^{i\pi} = -1$, il vient $\boxed{(1+i)^{4n} = (-4)^n}$.

Q14 — 3+3 point(s) — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déduire de **Q13** les valeurs des deux sommes suivantes.

$$A(n) := \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{4n}{2k} \qquad B(n) := \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \binom{4n}{2k+1}$$

D'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
(1+i)^{4n} &= \sum_{k=0}^{4n} \binom{4n}{k} i^k \\
&= \sum_{p=0}^{2n} \binom{4n}{2p} i^{2p} + \sum_{p=0}^{2n-1} \binom{4n}{2p+1} i^{2p+1} \\
&= \sum_{p=0}^{2n} \binom{4n}{2p} \left(i^2\right)^p + \sum_{p=0}^{2n-1} \binom{4n}{2p+1} \left(i^2\right)^p i \\
&= \sum_{p=0}^{2n} (-1)^p \binom{4n}{2p} + i \sum_{p=0}^{2n-1} (-1)^p \binom{4n}{2p+1} \\
&= \underbrace{A(n)}_{\in\mathbb{R}} + i\, \underbrace{B(n)}_{\in\mathbb{R}}.
\end{aligned}$$

D'après Q13 et l'unicité de la forme algébrique de $(1+i)^{4n}$, $\boxed{A(n) = (-4)^n \text{ et } B(n) = 0}$.

Q15 — 4 point(s) — Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Démontrer que :

$$\mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \,\mathrm{Im}(z_k) \,.$$

On pourra poser, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $a_k := \mathrm{Re}(z_k)$ et $b_k := \mathrm{Im}(z_k)$.

Comme suggéré, posons, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $a_k := \mathrm{Re}(z_k)$ et $b_k := \mathrm{Im}(z_k)$. Nous calculons :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k z_k &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (a_k + i b_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k + i \lambda_k b_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k + \sum_{k=1}^{n} i \lambda_k b_k \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k}_{\in \mathbb{R}} + i \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_k}_{\in \mathbb{R}} . \end{aligned}$$

Nous en déduisons que $\boxed{\mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \,\mathrm{Im}(z_k) \,.}$

Q16 — 8 point(s) — Soit $(n, \theta) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$. Simplifier la somme suivante.

$$S_n(\theta) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta)$$

Le résultat sera donné sous la forme d'un produit $\pi_1 \times \pi_2 \times \sigma$ où π_1 est une puissance de 2, π_2 est une puissance d'un cosinus et σ est un sinus.

Comme, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\sin(k\theta) = \mathrm{Im}\left(e^{ik\theta}\right)$. Nous calculons :

$$\begin{aligned} S_n(\theta) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{Im}\left(e^{ik\theta}\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ik\theta}\right) && \text{[d'après Q15]} \\ &= \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{i\theta}\right)^k 1^{n-k}\right) && \text{[d'après la formule de Moivre]} \\ &= \mathrm{Im}\left(\left(1 + e^{i\theta}\right)^n\right) && \text{[d'après la formule du binôme de Newton]} \\ &= \mathrm{Im}\left(\left(2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^n\right) && \text{[d'après la technique de l'angle moitié]} \\ &= \mathrm{Im}\left(2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{n\theta}{2}}\right) && \text{[d'après la formule de Moivre]} \end{aligned}$$

$$S_n(\theta) = \mathrm{Im}\left(\underbrace{2^n\cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)}_{\in\mathbb{R}} + i\,\underbrace{2^n\cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}_{\in\mathbb{R}}\right)$$

Ainsi $\boxed{S_n(\theta) := \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(k\theta) = 2^n\cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right).}$

EXERCICE 5 — FORMULE D'INVERSION DE PASCAL

Q17 — 2 point(s) — Soient k, j, n des entiers tels que $0 \leqslant j \leqslant k \leqslant n$. Démontrer que $\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}$.

Nous calculons :

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k}\binom{k}{j} &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\times\frac{k!}{j!\,(k-j)!}\\
&= \frac{n!}{(n-k)!}\times\frac{1}{j!\,(k-j)!}\\
&= \frac{n!}{j!}\times\frac{1}{(n-k)!\,(k-j)!}\\
&= \frac{n!}{j!\,(n-j)!}\times\frac{(n-j)!}{(n-k)!\,(k-j)!}\\
&= \frac{n!}{j!\,(n-j)!}\times\frac{(n-j)!}{(n-j-(k-j))!\,(k-j)!}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}.}$

Q18 — 8 point(s) — Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $b_k := \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}a_j$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}b_k.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous calculons :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}b_k &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}a_j\\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{j}a_j\\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{n-k}\binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}a_j \qquad [\text{d'après Q17}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k} b_k &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j} a_j && \text{[d'après la formule d'inversion]} \\
&= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} a_j \sum_{k=j}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n-j}{k-j} \\
&= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} a_j \sum_{\ell=0}^{n-j} (-1)^{n-j-\ell}\binom{n-j}{\ell} && \text{[changement d'indice } \ell = k-j\text{]} \\
&= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} a_j \sum_{\ell=0}^{n-j} (-1)^{n-j-\ell} 1^{\ell}\binom{n-j}{\ell} \\
&= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} a_j (1-1)^{n-j} && \text{[d'après la formule du binôme de Newton]} \\
&= a_n \quad \left[0^0 = 1 \text{ et, pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ 0^k = 0\right].
\end{aligned}$$

Nous avons donc démontré $\boxed{a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k} b_k\ .}$