DEVOIR SURVEILLÉ N°3

— 108 points —

Mercredi 19 octobre – 8h00-10h00

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Les assertions seront toutes justifiées avec soin, les raisonnements structurés, les résultats encadrés.

EXERCICE 1 — BIJECTIVITÉ D'UNE APPLICATION LINÉAIRE DE $\mathbb{R}^3$ DANS $\mathbb{R}^3$

Soit m un réel fixé. On considère le système linéaire (S_m) d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et l'application f_m définis comme suit.

$$(S_m) \quad \begin{cases} mx + y + z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ x + y + mz = 0 \end{cases} \qquad f_m \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (mx+y+z, x+my+z, x+y+mz) \end{array} \right.$$

Q1 — 12 point(s) — Résoudre le système linéaire (S_m).

Q2 — 6+6 point(s) — Déterminer une condition nécessaire et suffisante (C) portant sur m pour que l'application f_m soit bijective et calculer, lorsque (C) est vérifiée, l'application réciproque de f_m.

EXERCICE 2 — COMPOSÉE DE DEUX APPLICATIONS ET INJECTIVITÉ

Q3 — 4 point(s) — Rappeler la définition d'une application injective. Trois formulations sont attendues.

Soient E, F, G trois ensembles et $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

Q4 — 2 point(s) — On suppose que f et g sont injectives. Démontrer que $g \circ f$ est injective.

Dans la suite de cet exercice, on suppose que l'application $g \circ f$ est injective.

Q5 — 2 point(s) — Démontrer que f est injective.

Q6 — 4 point(s) — Démontrer que l'application g n'est pas nécessairement injective. On pourra donner un contre-exemple à l'aide de diagrammes de Venn pour justifier sa réponse.

Q7 — 6 point(s) — On suppose de plus que l'application f est surjective. Démontrer qu'alors l'application g est injective.

EXERCICE 3 — SOMME ET DÉCOMPOSITION D'UNE FRACTION RATIONNELLE EN ÉLÉMENTS SIMPLES

Q8 — 4 point(s) — Déterminer trois réels a, b, c tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}.$$

Q9 — 5+1 point(s) — Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{(k+3)!}$$

puis étudier la limite éventuelle de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 4 — Trois applications de la formule du binôme de Newton

Q10 — 2+2 point(s) — Énoncer la relation de Pascal pour les coefficients binomiaux, puis la démontrer.

Q11 — 4+8 point(s) — Énoncer la formule du binôme dans $\mathbb{C}$, puis la démontrer.

Q12 — 1+3+6 point(s) — Soit $(n, p) \in \mathbb{N}_{\geqslant 2} \times]0,1[$. Simplifier les trois sommes suivantes.

$$M_0(n) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad M_1(n) := \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad M_2(n) := \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Q13 — 2 point(s) — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une forme trigonométrique de $1+i$ et en déduire la forme algébrique de $(1+i)^{4n}$.

Q14 — 3+3 point(s) — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déduire de **Q13** les valeurs des deux sommes suivantes.

$$A(n) := \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{4n}{2k} \qquad B(n) := \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \binom{4n}{2k+1}$$

Q15 — 4 point(s) — Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Démontrer que :

$$\mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, \mathrm{Im}(z_k) \ .$$

On pourra poser, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $a_k := \mathrm{Re}(z_k)$ et $b_k := \mathrm{Im}(z_k)$.

Q16 — 8 point(s) — Soit $(n, \theta) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$. Simplifier la somme suivante.

$$S_n(\theta) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta)$$

Le résultat sera donné sous la forme d'un produit $\pi_1 \times \pi_2 \times \sigma$ où π_1 est une puissance de 2, π_2 est une puissance d'un cosinus et σ est un sinus.

Exercice 5 — Formule d'inversion de Pascal

Q17 — 2 point(s) — Soient k, j, n des entiers tels que $0 \leqslant j \leqslant k \leqslant n$. Démontrer que $\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}$.

Q18 — 8 point(s) — Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $b_k := \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a_j$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k \ .$$