UN CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ N°2

— 120 points —

EXERCICE 1 — UNE APPLICATION DE LA FACTORISATION PAR L'ANGLE MOITIÉ

Q1 — 4+4 point(s) — Soit $t \in \mathbb{R}$. Énoncer et démontrer la factorisation par l'angle moitié de $1+e^{it}$ et $1-e^{it}$.

Cf. C3.89

Soient $\theta \in]-\pi,\pi[$ *et* $z := \dfrac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}$.

Q2 — 2 point(s) — Justifier que le nombre z est bien défini.

D'après le cas d'égalité de deux formes trigonométriques :

$$e^{i\theta} = -1 = e^{i\pi} \quad \Longleftrightarrow \quad \theta \equiv \pi\ [2\pi]\,.$$

Comme $\theta \in]-\pi,\pi[$, $\theta \not\equiv \pi\ [2\pi]$ et donc $1+e^{i\theta} \neq 0$. $\boxed{\text{Le nombre } z \text{ est donc bien défini.}}$

Q3 — 4 point(s) — Sans calculer la forme algébrique de z, établir que z est un nombre imaginaire pur.

D'après le cours :

$$z \in i\mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{z} = -z\,.$$

D'après les propriétés algébriques de la conjugaison et les propriétés de l'exponentielle d'un nombre imaginaire pur :

$$\overline{z} = \overline{\left(\frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}\right)} = \frac{1-e^{-i\theta}}{1+e^{-i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}\left(e^{i\theta}-1\right)}{e^{-i\theta}\left(e^{i\theta}+1\right)} = \frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1} = \frac{-\left(1-e^{i\theta}\right)}{e^{i\theta}+1} = -z\,.$$

Donc $\boxed{\text{le nombre } z \text{ est imaginaire pur.}}$

Q4 — 2 point(s) — En utilisant la factorisation par l'angle moitié, calculer la forme algébrique de z.

Nous appliquons les résultats énoncés en Q1 pour obtenir :

$$z = \frac{-2i\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}}{2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}} = \underbrace{-\operatorname{cotan}\left(\frac{\theta}{2}\right)}_{\in\mathbb{R}} i\,.$$

Nous avons déterminé la forme algébrique de z et nous observons que sa partie réelle est nulle. Donc $\boxed{\text{le nombre } z \text{ est imaginaire pur.}}$

EXERCICE 2 — AUTOUR DES RACINES n-IÈMES DE L'UNITÉ OÙ $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$

Soient un entier $n \geqslant 2$, $\mathbb{U}_n := \{z \in \mathbb{C} \,:\, z^n = 1\}$ *et* $\omega_n := e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

Q5 — 8+4 point(s) — Démontrer que $\mathbb{U}_n = \left\{\omega_n^k \,:\, k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$ et que les n éléments $\omega_n^0, \omega_n^1, \omega_n^2, \ldots, \omega_n^{n-1}$ sont deux-à-deux distincts.

Cf. C3.140

Q6 — 4+6 point(s) — Calculer $\displaystyle\prod_{\zeta \in \mathbb{U}_n} \zeta$ et, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $S_p := \displaystyle\sum_{\zeta \in \mathbb{U}_n} \zeta^p$.

Remarquons tout d'abord que, d'après la formule de Moivre, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\omega_n^k = e^{i\frac{2\pi k}{n}}$.

(1) D'après Q5 et les propriétés algébriques de l'exponentielle complexe :

$$\prod_{\zeta \in \mathbb{U}_n} \zeta = \prod_{k=0}^{n-1} \omega_n^k = \prod_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2\pi k}{n}} = e^{\sum_{k=0}^{n-1} i\frac{2\pi k}{n}} = e^{i\frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k}.$$

De $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$ et la formule de Moivre, nous déduisons :

$$\prod_{\zeta \in \mathbb{U}_n} \zeta = e^{i\frac{2\pi}{n}\times\frac{n(n-1)}{2}} = e^{i\pi(n-1)} = \left(e^{i\pi}\right)^{n-1}.$$

Comme $e^{i\pi} = -1$, il vient $\boxed{\displaystyle\prod_{\zeta \in \mathbb{U}_n} \zeta = (-1)^{n-1}.}$

(2) Soit $p \in \mathbb{Z}$. D'après Q5 :

$$S_p = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\omega_n^k\right)^p = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{kp} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\omega_n^p\right)^k = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i\frac{2\pi p}{n}}\right)^k.$$

Il s'agit d'une somme de terme en progression géométrique de raison $e^{i\frac{2\pi p}{n}}$. D'après le cas d'égalité de deux formes trigonométriques :

$$\begin{aligned} e^{i\frac{2\pi p}{n}} = 1 = e^{i\times 0} \quad &\iff \quad \frac{2\pi p}{n} \equiv 0 \; [2\pi] \\ &\iff \quad p \equiv 0 \, [n]. \end{aligned}$$

- *Cas où p est un multiple de n* Alors $e^{i\frac{2\pi p}{n}} = 1$ et donc :

$$S_p = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i\frac{2\pi p}{n}}\right)^k = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n.$$

- *Cas où p n'est pas un multiple de n* Alors $e^{i\frac{2\pi p}{n}} \neq 1$ et donc :

$$S_p = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i\frac{2\pi p}{n}}\right)^k = \frac{1 - \left(e^{i\frac{2\pi p}{n}}\right)^n}{1 - e^{i\frac{2\pi p}{n}}} = \frac{1 - e^{i2\pi p}}{1 - e^{i\frac{2\pi p}{n}}} = 0$$

d'après la formule de Moivre.

Ainsi :

$$\boxed{S_p = \begin{cases} n & \text{si } p \text{ est un multiple de } n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

Soit $(O;\vec{u},\vec{v})$ un repère orthonormé du plan $\mathscr{P}$. On définit les points $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ comme étant les points d'affixes respectives $\omega_n^0, \omega_n^1, \omega_n^2, \ldots, \omega_n^{n-1}$.

Q7 — 6 point(s) — Calculer la longueur de chacun des côtés du polygone $P_n := M_0M_1M_2\ldots M_{n-1}$. Qu'en déduire quant au polygone P_n ?

(1) Il faut calculer les longueurs $M_0M_1, M_1M_2, M_2M_3, \ldots, M_{n-2}M_{n-1}, M_{n-1}M_0$, i.e. les modules :

$$\left|\omega_n^1-\omega_n^0\right|,\ \left|\omega_n^2-\omega_n^1\right|,\ \left|\omega_n^3-\omega_n^2\right|,\ \ldots,\ \left|\omega_n^{n-1}-\omega_n^{n-2}\right|,\ \left|\omega_n^0-\omega_n^{n-1}\right| = \left|\omega_n^n-\omega_n^{n-1}\right|$$

soit, pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, le module $\left|\omega_n^{k+1}-\omega_n^k\right|$.
Soit $k \in k \in [\![0,n-1]\!]$. D'après les propriétés algébriques de l'exponentielle et la factorisation par l'angle moitié :

$$\omega_n^{k+1}-\omega_n^k = e^{i\frac{2\pi(k+1)}{n}} - e^{i\frac{2\pi k}{n}} = e^{i\frac{2\pi k}{n}}\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}-1\right) = e^{i\frac{2\pi k}{n}}\,2i\,e^{i\frac{\pi}{n}}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Des propriétés algébriques du module et $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \geqslant 0$ (puisque $0 \leqslant \frac{\pi}{n} \leqslant \pi$), nous déduisons :

$$\left|\omega_n^{k+1}-\omega_n^k\right| = 2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Donc $\boxed{\text{les } n \text{ côtés du polygone } P_n \text{ ont tous pour longueur } 2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$.

(2) $\boxed{\text{Le polygone } P_n \text{ est régulier}}$ car il est inscrit dans un cercle (le cercle unité) et tous ses côtés sont égaux.

Q8 — 4 point(s) — Étudier le comportement asymptotique du périmètre p_n du polygone P_n, lorsque n tend vers $+\infty$.

Le polygone P_n possède n côtés, tous de longueur $2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ d'après Q7. Ainsi, son périmètre est-il :

$$p_n = 2n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = 2\pi\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}}.$$

Comme $\frac{\pi}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (composition de limites). Ainsi $\boxed{p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\pi}$ ce qui en accord avec notre intuition géométrique (le périmètre du cercle unité est 2π).

Exercice 3 — Équations algébriques

Q9 — 4 point(s) — Démontrer que tout nombre complexe non nul possède deux racines carrées complexes opposées l'une de l'autre.

Cf. C3.116.

Q10 — 6 point(s) — Résoudre l'équation $z^2 = 7 - 6\sqrt{2}i$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Nous raisonnons par analyse-synthèse.

- *Analyse* Soit $z = a + ib$, où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $z^2 = 7 - 6\sqrt{2}i$. Alors :

$$\underbrace{a^2 - b^2}_{\in\mathbb{R}} + i\underbrace{2ab}_{\in\mathbb{R}} = \underbrace{7}_{\in\mathbb{R}} + i\underbrace{(-6\sqrt{2})}_{\in\mathbb{R}} \qquad \text{et} \qquad a^2 + b^2 = |z|^2 = \left|z^2\right| = \sqrt{7^2 + (-6\sqrt{2})^2} = 11\,.$$

Par unicité de la partie algébrique d'un nombre complexe, il vient :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} a^2 & - & b^2 & = & 7 \\ & & 2ab & = & -6\sqrt{2} \\ a^2 & + & b^2 & = & 11\,. \end{array}\right.$$

L'opération élémentaire $(L1) + (L3)$ livre $a^2 = 9$ et donc $a = -3$ ou $a = 3$.
L'opération élémentaire $(L3) - (L1)$ livre $b^2 = 2$ et donc $b = -\sqrt{2}$ ou $b = \sqrt{2}$.
D'après $(L2)$ les nombres a et b sont de signes opposés. Ainsi avons-nous deux candidats :

$$z_1 := 3 - i\sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad z_2 := -z_1\,.$$

- *Synthèse* Vérifions si les candidats obtenus en fin d'analyse conviennent.

$$z_2^2 = z_1^2 = \left(3 - i\sqrt{2}\right)^2 = 3^2 - \sqrt{2}^2 + i\left(2 \times 3 \times \sqrt{2}\right) = 7 - 6\sqrt{2}i\,.$$

- *Conclusion* $\boxed{\text{Les deux racines carrées complexes de } 7 - 6\sqrt{2}i \text{ sont } 3 - i\sqrt{2} \text{ et } -3 + i\sqrt{2}.}$

Q11 — 10 point(s) — Résoudre l'équation $z^3 + (1+i)z^2 + (i-1)z - i = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, sachant qu'elle possède une solution imaginaire pure.

- *Recherche d'une solution imaginaire pure de $z^3 + (1+i)z^2 + (i-1)z - i = 0$* Soit $b \in \mathbb{R}$.

$$(ib)^3 + (1+i) \times (ib)^2 + (i-1) \times (ib) - i = 0 \iff \underbrace{-b^2 - b}_{\in\mathbb{R}} + i\underbrace{\left(-b^3 - b^2 - b - 1\right)}_{\in\mathbb{R}} = 0$$

Par unicité de la partie algébrique d'un nombre complexe, ib est solution de l'équation $z^3 + (1 + i)z^2 + (i-1)z - i = 0$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcl} b^2 + b & = & 0 \\ b^3 + b^2 + b + 1 & = & 0 \end{array}\right.$$

soit si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcl} b(b+1) & = & 0 \\ (b+1)\underbrace{\left(b^2 + b + 1\right)}_{>0} & = & 0\,. \end{array}\right.$$

Ainsi $-i$ est solution de l'équation $z^3 + (1+i)z^2 + (i-1)z - i = 0$.

- *Factorisation de $X^3 + (1+i)X^2 + (i-1)X - i$ par $X + i$* D'après le cours, il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^3$ tel que :

$$X^3 + (1+i)X^2 + (i-1)X - i = (X+i)\left(X^2 + aX + b\right) = X^3 + (a+i)X^2 + (ai+b)X + bi\,.$$

Nous sommes alors conduit à résoudre le système linéaire :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} a & & & = & 1 \\ ai & + & b & = & i-1 \\ & & bi & = & -i \end{array}\right.$$

Comme $(a,b) = (1,-1)$ est solution de ce système, nous en déduisons :

$$\begin{aligned} X^3 + (1+i)X^2 + (i-1)X - i &= (X+i)\left(X^2+X-1\right) \\ &= (X+i)\left(\left(X+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right) \\ &= (X+i)\left(X+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(X+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right). \end{aligned}$$

- *Conclusion* Comme $\mathbb{C}$ est intègre, nous déduisons de la factorisation précédente que l'ensemble solution de l'équation $z^3+(1+i)z^2+(i-1)z-i=0$ est $\boxed{\left\{-i, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}}$.

Q12 — 10 point(s) — Résoudre l'équation $(z-i)^6+(z+i)^6=0$ d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.

- Observons tout d'abord que :
$$(-i-i)^6+(-i+i)^6 = -64 \neq 0\,.$$
Ainsi $-i$ n'est pas solution de l'équation $(z-i)^6+(z+i)^6=0$.
- Soit donc $z\in\mathbb{C}\setminus\{-i\}$.

$$\begin{aligned} (z-i)^6+(z+i)^6=0 &\iff \frac{(z-i)^6}{(z+i)^6} = -1 \\ &\iff \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^6 = e^{i\pi} = \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^6 \\ &\iff \left(\frac{z-i}{e^{i\frac{\pi}{6}}(z+i)}\right)^6 = 1 \\ &\iff \frac{z-i}{e^{i\frac{\pi}{6}}(z+i)} \in \mathbb{U}_6 = \left\{e^{i\frac{2\pi k}{6}} \,:\, k\in [\![0,5]\!]\right\} \\ &\iff \exists k\in[\![0,5]\!] \qquad \frac{z-i}{e^{i\frac{\pi}{6}}z+ie^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\frac{2\pi k}{6}} \\ &\iff \exists k\in[\![0,5]\!] \qquad z = i\,\frac{1+e^{i\frac{(2k+1)\pi}{6}}}{1-e^{i\frac{(2k+1)\pi}{6}}} \\ &\iff \exists k\in[\![0,5]\!] \qquad z = -\operatorname{cotan}\left(\frac{(2k+1)\pi}{12}\right) \qquad \text{[factorisation par l'angle moitié]} \end{aligned}$$

- L'ensemble solution de l'équation $(z-i)^6+(z+i)^6=0$ est donc :

$$\left\{-\operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{12}\right), -\operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{4}\right), -\operatorname{cotan}\left(\frac{5\pi}{12}\right), -\operatorname{cotan}\left(\frac{7\pi}{12}\right), -\operatorname{cotan}\left(\frac{3\pi}{4}\right), -\operatorname{cotan}\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right\}$$

- Explicitons à présent les différentes valeurs de cotangente trouvées.
  — De $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$, nous déduisons $\operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{12}\right)=2+\sqrt{3}$.
  — Nous calculons aisément $\operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$.
  — Comme $\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}$, il vient $\operatorname{cotan}\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{1}{\operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{12}\right)}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$.
  — Comme $\frac{7\pi}{12}=\pi-\frac{5\pi}{12}$, $\operatorname{cotan}\left(\frac{7\pi}{12}\right)=-\operatorname{cotan}\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\sqrt{3}-2$.
  — Nous calculons aisément $\operatorname{cotan}\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-1$.
  — Comme $\frac{11\pi}{12}=\pi-\frac{\pi}{12}$, $\operatorname{cotan}\left(\frac{11\pi}{12}\right)=-\operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{12}\right)=-2-\sqrt{3}$.
- L'ensemble solution de l'équation $(z-i)^6+(z+i)^6=0$ est donc :

$$\boxed{\left\{-2-\sqrt{3},-1,\sqrt{3}-2,2-\sqrt{3},1,2+\sqrt{3}\right\}}$$

Exercice 4 — Nombres complexes et géométrie

Soit $(O;\vec{u},\vec{v})$ *un repère orthonormé du plan* $\mathscr{P}$.

Q13 — 4 point(s) — Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls. Démontrer que $\arg(z_1z_2)\equiv\arg(z_1)+\arg(z_2)\ [2\pi]$.

Cf C3.110.

Q14 — 4 point(s) — Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}_1$ des points M d'affixe z vérifiant $\arg\left(\frac{z}{\sqrt{3}i-1}\right)\equiv\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

- Le nombre complexe 0 n'a pas d'argument. Ainsi, l'origine O du repère ne peut appartenir à l'ensemble $\mathscr{E}_1$.
- Soit $z\in\mathbb{C}^*$ et M le point du plan d'affixe z.

$$\begin{aligned}
\arg\left(\frac{z}{\sqrt{3}i-1}\right)\equiv\frac{\pi}{6}\ [2\pi] &\iff \arg(z)-\arg\left(\sqrt{3}i-1\right)=\frac{\pi}{6}\ [2\pi]\\
&\iff \arg(z)=\arg\left(\sqrt{3}i-1\right)+\frac{\pi}{6}\ [2\pi]\\
&\iff \arg(z)=\frac{5\pi}{6}\ [2\pi] \qquad \left[\ \sqrt{3}i-1=2e^{i\frac{2\pi}{3}}\ \right]\\
&\iff \left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)=\frac{5\pi}{6}\ [2\pi]\\
&\iff \left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)=\left(\vec{u},\overrightarrow{OA}\right)\ [2\pi] \quad \text{où } A \text{ est le point d'affixe } e^{i\frac{5\pi}{6}}\\
&\iff \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}\right)\ [2\pi] \quad \text{où } A \text{ est le point d'affixe } e^{i\frac{5\pi}{6}}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathscr{E}_1 \text{ est la demie droite } [O,A) \text{ privée de son origine } O\text{, où } A \text{ est le point d'affixe } e^{i\frac{5\pi}{6}}.}$

Q15 — 8 point(s) — Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}_2$ des points M d'affixe z vérifiant $\left|\frac{z-2+i}{z-1+2i}\right|=4$.

- Le point d'affixe $1-2i$ ne peut appartenir à l'ensemble $\mathscr{E}_2$. Nous l'excluons donc de l'étude.
- Soient $z \in \mathbb{C} \setminus \{1-2i\}$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = x+iy$.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{z-2+i}{z-1+2i}\right| = 4 &\iff \frac{|z-2+i|}{|z-1+2i|} = 4 \qquad [\text{cf. propriétés algébrique du module}]\\
&\iff |z-2+i| = 4\,|z-1+2i|\\
&\iff |z-2+i|^2 = 16\,|z-1+2i|^2 \qquad [\,|z-2+i| \geqslant 0 \text{ et } 4\,|z-1+2i| \geqslant 0]\\
&\iff (x-2)^2+(y+1)^2 = 16\big((x-1)^2+(y+2)^2\big)\\
&\iff -15x^2+28x-15y^2-62y-75 = 0\\
&\iff x^2-\frac{28}{15}x+y^2+\frac{62}{15}y+5 = 0\\
&\iff \left(x-\frac{14}{15}\right)^2-\left(\frac{14}{15}\right)^2+\left(y-\frac{31}{15}\right)^2-\left(\frac{31}{15}\right)^2+5 = 0\\
&\iff \left(x-\frac{14}{15}\right)^2+\left(y-\frac{31}{15}\right)^2 = \frac{32}{225} = \left(\frac{4\sqrt{2}}{15}\right)^2
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\mathscr{E}_2 \text{ est le cercle de centre } \Omega\left(\frac{14}{15}+i\frac{31}{15}\right) \text{ et de rayon } \frac{4\sqrt{2}}{15}.}$

Q16 — 6 point(s) — Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation géométrique :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & (1+i\sqrt{3})z+\sqrt{3}(1-i)\,. \end{array} \right.$$

- D'après le cours, f est une similitude directe. Comme :

$$a := 1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \neq 1$$

f est la composée commutative de la rotation $\rho_{\Omega,\frac{\pi}{3}}$ de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{3}$ avec l'homothétie $h_{\Omega,2}$ de centre Ω et de rapport 2, où Ω est l'affixe de l'unique point fixe de f.
- Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
f(z) = z &\iff (1+i\sqrt{3})z+\sqrt{3}(1-i) = z\\
&\iff z = -\frac{\sqrt{3}(1-i)}{i\sqrt{3}} = 1+i
\end{aligned}$$

L'unique point fixe de f est donc $1+i$.
- Ainsi $\boxed{f = \rho_{\Omega(1+i),\frac{\pi}{3}} \circ h_{\Omega(1+i),2} = h_{\Omega(1+i),2} \circ \rho_{\Omega(1+i),\frac{\pi}{3}}\,.}$

Exercice 5 — Noyaux de Dirichlet et de Féjer

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $x \neq 0\ [2\pi]$.

Q17 — 8 point(s) — Calculer $D_n(x) := \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$.

- Remarquons que, comme $\overline{D_n(x)} = D_n(x)$, le nombre $D_n(x)$ est réel.
- D'après la formule de Moivre et le cas cas d'égalité de deux formes trigonométriques ($e^{ix} \neq 1 = e^{i\times 0}$) :

$$D_n(x) = e^{-inx} \sum_{k=0}^{2n} e^{ikx} = e^{-inx} \sum_{k=0}^{2n} \left(e^{ix}\right)^k = e^{-inx} \frac{1 - e^{i(2n+1)x}}{1 - e^{ix}}.$$

Par factorisation par l'angle moitié, il vient :

$$D_n(x) = e^{-inx} \frac{-2i \sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) e^{i\frac{(2n+1)x}{2}}}{-2i \sin\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\frac{x}{2}}}.$$

Ainsi $\boxed{D_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.}$

Q18 — 12 point(s) — Calculer $F_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(x)$.

- D'après Q17;

$$(\star) \quad F_n(x) = \frac{1}{n \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)x\right) = \frac{1}{n \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Im}\left(e^{i\left(k+\frac{1}{2}\right)x}\right) = \frac{1}{n \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \mathrm{Im}\left(\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\left(k+\frac{1}{2}\right)x}}_{S_n(x)}\right).$$

- Nous calculons la somme $S_n(x)$. D'après la formule de Moivre et le cas cas d'égalité de deux formes trigonométriques ($e^{ix} \neq 1 = e^{i\times 0}$) :

$$S_n(x) = e^{i\frac{x}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ikx} = e^{i\frac{x}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{ix}\right)^k = e^{i\frac{x}{2}} \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}}.$$

Par factorisation par l'angle moitié, il vient :

$$(\star\star) \qquad S_n(x) = e^{i\frac{x}{2}} \frac{-2i \sin\left(\frac{nx}{2}\right) e^{i\frac{nx}{2}}}{-2i \sin\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\frac{x}{2}}} = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} e^{i\frac{nx}{2}}.$$

- De $(\star)$ et $(\star)$ nous déduisons que $\boxed{F_n(x) = \frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{n \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}.}$