Devoir Surveillé n°2

Mercredi 5 octobre – 8h00-10h00

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Les assertions seront toutes justifiées avec soin, les raisonnements structurés, les résultats encadrés.

Exercice 1 — Une application de la factorisation par l'angle moitié

Q1 — Soit $t \in \mathbb{R}$. Énoncer et démontrer la factorisation par l'angle moitié de $1 + e^{it}$ et $1 - e^{it}$.

Soient $\theta \in]-\pi, \pi[$ *et* $z := \dfrac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}$.

Q2 — Justifier que le nombre z est bien défini.

Q3 — Sans calculer la forme algébrique de z, établir que z est un nombre imaginaire pur.

Q4 — En utilisant la factorisation par l'angle moitié, calculer la forme algébrique de z.

Exercice 2 — Autour des racines n-ièmes de l'unité où $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$

Soient un entier $n \geqslant 2$, $\mathbb{U}_n := \{z \in \mathbb{C} \,:\, z^n = 1\}$ *et* $\omega_n := e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

Q5 — Démontrer que $\mathbb{U}_n = \{\omega_n^k \,:\, k \in [\![0, n-1]\!]\}$ et que les n éléments $\omega_n^0, \omega_n^1, \omega_n^2, \ldots, \omega_n^{n-1}$ sont deux-à-deux distincts.

Q6 — Calculer $\displaystyle\prod_{\zeta \in \mathbb{U}_n} \zeta$ et, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $S_p := \displaystyle\sum_{\zeta \in \mathbb{U}_n} \zeta^p$.

Soit $(O; \vec{u}, \vec{v})$ *un repère orthonormé du plan* $\mathscr{P}$. *On définit les points* $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ *comme étant les points d'affixes respectives* $\omega_n^0, \omega_n^1, \omega_n^2, \ldots, \omega_n^{n-1}$.

Q7 — Calculer la longueur de chacun des côtés du polygone $P_n := M_0M_1M_2 \ldots M_{n-1}$. Qu'en déduire quant au polygone P_n ?

Q8 — Étudier le comportement asymptotique du périmètre p_n du polygone P_n, lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 3 — Équations algébriques

Q9 — Démontrer que tout nombre complexe non nul possède deux racines carrées complexes opposées l'une de l'autre.

Q10 — Résoudre l'équation $z^2 = 7 - 6\sqrt{2}i$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Q11 — Résoudre l'équation $z^3 + (1+i)z^2 + (i-1)z - i = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, sachant qu'elle possède une solution imaginaire pure.

Q12 — Résoudre l'équation $(z-i)^6 + (z+i)^6 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

EXERCICE 4 — NOMBRES COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE

Soit $(O; \vec{u}, \vec{v})$ *un repère orthonormé du plan* $\mathscr{P}$.

Q13 — Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls. Démontrer que $\arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2)\ [2\pi]$.

Q14 — Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}_1$ des points M d'affixe z vérifiant $\arg\left(\dfrac{z}{\sqrt{3}i - 1}\right) \equiv \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

Q15 — Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}_2$ des points M d'affixe z vérifiant $\left|\dfrac{z-2+i}{z-1+2i}\right| = 4$.

Q16 — Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation géométrique :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & (1+i\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1-i) \end{array} \right. .$$

EXERCICE 5 — NOYAUX DE DIRICHLET ET DE FÉJER

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $x \not\equiv 0\ [2\pi]$.

Q17 — Calculer $D_n(x) := \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$.

Q18 — Calculer $F_n(x) := \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x)$.