Devoir Surveillé n°1

Samedi 24 septembre – 9h15-11h15

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Les assertions seront toutes justifiées avec soin, les raisonnements structurés, les résultats encadrés.

Exercice 1 (Parties paire et impaire d'une fonction)

Q1 — Soit une fonction $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Démontrer qu'il existe une unique fonction $p\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ paire et une unique fonction $i\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ impaire telles que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = p(x) + i(x)\,.$$

Exercice 2 (Calcul d'une somme trigonométrique)

Q2 — Énoncer les formules d'addition pour cosinus, sinus et tangente.

Q3 — Énoncer les formules de duplication pour cosinus et sinus.

Q4 — Soit $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$. Démontrer que $e^{i\,t_1}\, e^{i\,t_2} = e^{i(t_1+t_2)}$.

Q5 — Énoncer la formule de Moivre.

Q6 — Démontrer la formule de Moivre.

Q7 — Soit $(x, y, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{N}$. Calculer la somme $S_n(x, y) := \sum\limits_{k=0}^{n} \cos^2(kx + y)$.

Exercice 3 (Équations trigonométriques)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation :

$$(E_n) \qquad \cos^n(x) + \sin^n(x) = 1$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Q8 — Résoudre l'équation (E_1).

Q9 — Résoudre l'équation (E_2).

Q10 — Résoudre l'équation (E_n) lorsque $n \geqslant 4$ est un entier pair.

Q11 — Résoudre l'équation (E_n) lorsque $n \geqslant 3$ est un entier impair.

Exercice 4 (Expressions de $\sin(3x)$ où $x \in \mathbb{R}$)

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Q12 — Exprimer $\sin(3x)$ comme un polynôme en $\sin(x)$.

Q13 — Démontrer que $\sin(3x) = 4\sin(x)\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right)$.

Exercice 5 (Étude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 3)

Q14 — On pose $j := -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer j^p, pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Q15 — Calculer $1 + j + j^2$.

Q16 — Soit $z \in \mathbb{C}$. Calculer $(z-1)(z-j)\left(z-j^2\right)$.

Q17 — En déduire l'ensemble solution de l'équation $z^3 = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Q18 — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite à valeurs complexes définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{C}$, $u_1 \in \mathbb{C}$, $u_2 \in \mathbb{C}$ et la relation de récurrence $u_{n+3} = u_n$ valable pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer :

$$\exists! \, (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^3 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \lambda_0 + \lambda_1 j^n + \lambda_2 j^{2n}\,.$$

Exercice 6 (Point de Fermat)

Q19 — Énoncer l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$.

Q20 — Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$. Démontrer que $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $z_2 = \lambda z_1$.

Q21 — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$, pour tout $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|$.

Q22 — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$, pour tout n-uplet $(z_1, \ldots, z_n)$ de complexes tous non nuls, $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$ si et seulement s'il existe un n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ de réels strictement positifs tel que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $z_k = \lambda_k z_1$.

Q23 — Interpréter le résultat de la question précédente en termes d'arguments.

Dans la suite, on se place dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit $n \geqslant 3$ un entier. On considère n points $A_1, \ldots, A_n$ du plan $\mathscr{P}$ d'affixes respectives $z_1, \ldots, z_n$ tels que :

(i) pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, A_k est distinct de l'origine O;
(ii) les point $A_1, \ldots, A_n$ sont deux-à-deux distincts;
(iii) il n'existe aucune droite du plan $\mathscr{P}$ contenant tous les points $A_1, \ldots, A_n$;
(iv) $\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{|z_k|} = 0$.

Q24 — Donner un exemple de n-uplet $(z_1, \ldots, z_n)$ satisfaisant l'égalité (iv) lorsque $n = 4$.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $u_k = \frac{z_k}{|z_k|}$. On considère un point M d'affixe z.

Q25 — Vérifier que $\sum_{k=1}^{n} \overline{u_k}\,(z - z_k) = -\sum_{k=1}^{n} |z_k|$.

Q26 — En déduire l'inégalité :

$$(\star) \qquad \sum_{k=1}^{n} |z - z_k| \geqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|\,.$$

Q27 — Démontrer que l'inégalité $(\star)$ est une égalité si et seulement si, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\overline{u_k}\,(z - z_k)$ est un réel négatif.

Q28 — En déduire que l'inégalité $(\star)$ est une égalité si et seulement si $z = 0$.

Q29 — Établir que la somme $\sum_{k=0}^{n} MA_k$ atteint son minimum en un unique point M du plan que l'on précisera.