Devoir Libre n°17

Pour le lundi 15 mai

Soient $(G,*)$ *dont l'élément neutre est noté* e *et* H *un sous-groupe de* G*. On définit une relation* $\sim$ *sur* G *en posant*

$$\forall (g_1, g_2) \in G^2 \quad g_1 \sim g_2 :\Longleftrightarrow g_1^{-1} * g_2 \in H$$

Q1 — Démontrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur G.

Q2 — Soit $g \in G$. On note $\overline{g}$ sa classe d'équivalence pour la relation $\sim$ et on pose

$$g * H := \{g * h \ : \ h \in H\}$$

Démontrer $\overline{g} = g * H$.

Q3 — Démontrer que toute classe d'équivalence de G pour la relation $\sim$ est équipotente à H.

On suppose que G *est fini et on note* $\mathcal{G}$ *l'ensemble des classes d'équivalence de* G *pour la relation* $\sim$*, i.e.*

$$\mathcal{G} := \{\overline{g} \ : \ g \in G\} \subset \mathcal{P}(G)$$

Q4 — Justifier que $\mathcal{G}$ est fini.

Q5 — En déduire que $\mathrm{Card}(H)$ divise $\mathrm{Card}(G)$. Il s'agit d'un théorème dû à Lagrange [1] (au programme de MPI).

Q6 — Quels sont les sous-groupes d'un groupe fini de cardinal 19 ? Généraliser.

On fixe, pour toute la suite, un élément $g \in G$ *et on pose*

$$< g > := \{g^n \ : \ n \in \mathbb{Z}\}$$

Q7 — Démontrer que $< g >$ est le plus petit sous-groupe de G qui contient g.

Q8 — Démontrer que

$$\exists k \in \mathbb{N}^* \quad g^k = e$$

L'ordre de g *dans* G *est l'entier naturel non nul noté* $\mathrm{ord}(g)$ *défini par*

$$\mathrm{ord}(g) := \min\left\{k \in \mathbb{N}^* \ : \ g^k = e\right\}$$

Q9 — Justifier que $\mathrm{ord}(g)$ est bien défini.

Q10 — Quelle est la probabilité qu'une permutation du groupe $(S_3, \circ)$, choisie au hasard, ait pour ordre 3 ?

Q11 — Soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $g^k = e$. Démontrer que $\mathrm{ord}(g)$ divise k.

Q12 — Démontrer que $\mathrm{ord}(g) = \mathrm{Card}\left(< g >\right)$. Qu'en déduire pour l'ordre de g ?

1. Joseph-Louis Lagrange, 1736-1813