# Un corrigé partiel du Devoir Libre n°16

## § 1 Étude d'une fonction définie par une intégrale

*Soient un réel $a \geqslant 1$ et $f_a$ la fonction définie par*

$$f_a \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{1+t^a} \end{array} \right.$$

**Q1 —** Étudier les variations de la fonction $f_a$.

**Q2 —** Calculer, pour tout $t>0$, $f_a(t)+f_a\left(\dfrac{1}{t}\right)$.

**Q3 —** Soit un réel $b \geqslant 1$. Étudier la limite éventuelle de $\dfrac{f_a(t)}{f_b(t)}$ lorsque $t$ tend vers $+\infty$.

**Q4 —** Justifier que la fonction $f_a$ possède un développement limité au voisinage de $t=1$ à l'ordre 3 et le calculer.

*Soient la fonction $\varphi$ définie par*

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f_x(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{1+t^x}\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

*et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.*

**Q5 —** Calculer $\varphi(0)$, $\varphi(1)$ et $\varphi(2)$.

**Q6 —** Sans utiliser de dérivée, démontrer que la fonction $\varphi$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

**Q7 —** Soit $(x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ tel que $x \leqslant y$. Démontrer

$$\left|\varphi(x)-\varphi(y)\right| \leqslant \int_0^1 t^x - t^y\,\mathrm{d}t \leqslant y-x$$

**Q8 —** En déduire que la fonction $\varphi$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

**Q9 —** Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

$$1-\varphi(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t^x}\,\mathrm{d}t$$

**Q10 —** En majorant l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t^x}\,\mathrm{d}t$, démontrer que $\varphi(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.

**Q11 —** Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} + x \cdot \int_0^1 \frac{t^x}{(1+t^x)^2}\,\mathrm{d}t$$

**Q12 —** Démontrer que la fonction $\varphi$ est dérivable en 0 à droite.

**Q13 —** Donner l'équation réduite de la demi-tangente au point d'abscisse 0 de la courbe $\mathscr{C}$.

**Q14 —** À l'aide de **Q10** et d'une intégration par parties, donner un équivalent de $\varphi(x)-1$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

# § 2 Primitivation d'une fonction polynôme-exponentielle

*Soient $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f_k$ la fonction définie par*

$$f_k \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & x^k \cdot e^{\lambda x} \end{array} \right.$$

*On pose*

$$E := \mathrm{Vect}\left(f_0, f_1, \ldots, f_n\right)$$

**Q15 —** Démontrer que $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est une famille libre d'éléments du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$.

Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot f_k = 0_{\mathbb{C}^{\mathbb{R}}}$. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot x^k \cdot e^{\lambda x} = 0$$

Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{\lambda x} \neq 0$, nous en déduisons

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot x^k = 0$$

Ainsi le polynôme $P := \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot X^k$ possède-t-il une infinité de racines. Ce polynôme est donc nul et donc

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$$

$\boxed{\text{La famille } (f_0, f_1, \ldots, f_n) \text{ est donc libre.}}$

**Q16 —** Justifier que l'application

$$D \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & f' \end{array} \right.$$

est un automorphisme de $E$. On prendra soin de vérifier le caractère bien défini de $D$.

- Soit $f \in E$. Alors il existe $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que

$$f = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot f_k$$

D'après les résultats de dérivabilité des fonctions usuelles et les opérations sur les fonctions dérivables, la fonction $f$ est dérivable. Par linéarité de la dérivation

$$\begin{aligned} D(f) &= \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot D(f_k) \\ &= \lambda_0 \cdot \lambda \cdot f_0 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot \left(k \cdot f_{k-1} + \lambda \cdot f_k\right) \\ &= \lambda_0 \cdot \lambda \cdot f_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k+1} \cdot (k+1) \cdot f_k + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot \lambda \cdot f_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda_{k+1} \cdot (k+1) + \lambda_k \cdot \lambda) \cdot f_k + \lambda_n \cdot \lambda \cdot f_n \end{aligned}$$

Ainsi $D(f) \in E$ et donc $\boxed{\text{l'application } D \text{ est bien définie.}}$

- D'après les résultats concernant la linéarité de la dérivation, $\boxed{\text{l'application } D \text{ est linéaire.}}$
- Démontrons que l'application $D$ est injective en établissant que son noyau est $\{0_{\mathbb{C}^{\mathbb{R}}}\}$. Comme $\mathrm{Ker}(D)$ est un sous-espace vectoriel de $E$, $\{0_{\mathbb{C}^{\mathbb{R}}}\} \subset \mathrm{Ker}(D)$. Démontrons la deuxième inclusion en considérant un élément $f \in \mathrm{Ker}(D)$. Comme $f \in E$, il existe $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que

$$f = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot f_k$$

D'après le calcul effectué en **Q16**

$$0_{\mathbb{C}^{\mathbb{R}}} = D(f) = \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda_{k+1} \cdot (k+1) + \lambda_k \cdot \lambda) \cdot f_k + \lambda_n \cdot \lambda \cdot f_n$$

Comme la famille $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est libre (**Q15**)

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} \lambda_0 \cdot \lambda & + & \lambda_1 & & & & & & & = & 0 \\ & & \lambda_1 \cdot \lambda & + & 2 \cdot \lambda_2 & & & & & = & 0 \\ & & & & \lambda_2 \cdot \lambda & + & 3 \cdot \lambda_3 & & & = & 0 \\ & & & & & \ddots & & \ddots & & & \\ & & & & & & \lambda_{n-1} \cdot \lambda & + & n \cdot \lambda_n & = & 0 \\ & & & & & & & & \lambda_n \cdot \lambda & = & 0 \end{array}\right.$$

i.e.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & & \\ & \lambda & 2 & & & \\ & & \lambda & 3 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \lambda & n \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix}}_{=:A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice $A$ est triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux tous non nuls. Elle est donc inversible. Comme son noyau est trivial

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$$

Ainsi $\boxed{\text{l'application } f \text{ est-elle injective.}}$

- L'application $f$ est un endomorphisme injective du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E$, qui est de dimension finie $(n+1)$. Donc

$$\boxed{f \text{ est un automorphisme de } E.}$$

**Q17** — Justifier que, pour tout $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$, il existe un unique $(b_0, b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que la fonction

$$F \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \left(\sum_{k=0}^{n} b_k x^k\right) \cdot e^{\lambda x} \end{array} \right.$$

est une primitive de la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) \cdot e^{\lambda x} \end{array} \right.$$

L'assertion à démontrer se reformule comme suit. Pour tout $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$, il existe un unique $(b_0, b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que la fonction $F = \sum_{i=0}^{n} b_i \cdot f_i$ est une primitive de la fonction $f = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot f_i$.

Soient $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ et $f := \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot f_i$.

• Existence  Comme $f \in E$ et $D$ est surjective (**Q16**), il existe $F \in E$ telle que $D(F) = f$. La fonction $F$ est donc une primitive de $f$. Puisque $(f_0, \ldots, f_n)$ est une famille génératrice de $E$, il existe $(b_0, b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $F = \sum_{i=0}^{n} b_i \cdot f_i$.

$$\boxed{\text{L'existence est donc démontrée.}}$$

• Unicité  Soient $(b_0, b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ et $(c_0, c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tels que les fonctions $F := \sum_{i=0}^{n} b_i \cdot f_i$ et $G := \sum_{i=0}^{n} b_i \cdot f_i$ sont des primitives de $f$. Alors

$$D\left(\sum_{i=0}^{n} (b_i - c_i) \cdot f_i\right) = 0$$

Comme $D$ est injective (**Q16**), nous en déduisons

$$\sum_{i=0}^{n} (b_i - c_i) \cdot f_i = 0_{\mathbb{C}^{\mathbb{R}}}$$

Comme la famille $(f_0, \ldots, f_n)$ est libre (**Q15**), il vient

$$\forall\, i \in [\![0, n]\!] \quad b_i = c_i$$

$\boxed{\text{L'unicité est donc démontrée.}}$

**Q18 —** En déduire une primitive de la fonction

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \cdot e^{-x} \end{array} \right.$$

D'après **Q17**, il existe un (unique) triplet $(b_0, b_1, b_2) \in \mathbb{C}^3$ tel que la fonction

$$G \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2\right) \cdot e^{-x} \end{array} \right.$$

est une primitive de $g$. Comme

$$G' \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \left(a_1 - a_0 + (2a_2 - a_1)x - a_2 x^2\right) \cdot e^{-x} \end{array} \right.$$

il (faut et il) suffit que

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -a_0 & + & a_1 & & & = & 0 \\ & - & a_1 & + & 2a_2 & = & 0 \\ & & & - & a_2 & = & 1 \end{array} \right.$$

pour que $G$ soit une primitive de $g$. Ce système possède pour unique solution $a_2 = -1$, $a_1 = -2$ et $a_0 = -2$. Ainsi la fonction

$$\boxed{G \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & -\left(2 + 2x + x^2\right) \cdot e^{-x} \end{array} \right.}$$

est-elle une primitive de la fonction $g$.

**Q19 —** Calculer une primitive de la fonction $g$ définie en **Q18** par une autre méthode relevant uniquement du calcul intégral.

La fonction $g$ est continue sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction

$$G \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x t^2 \cdot e^{-t} \, \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est une primitive de la fonction $g$. Les fonctions

$$u_1 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t^2 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad v_1 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & -e^{-t} \end{array} \right.$$

sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. La formule d'intégration par parties livre alors

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad G(x) = \left[-t^2 \cdot e^{-t}\right]_0^x + 2 \cdot \int_0^x t \cdot e^{-t} \, \mathrm{d}t = -x^2 \cdot e^{-x} + 2 \cdot \int_0^x t \cdot e^{-t} \, \mathrm{d}t$$

Les applications

$$u_2 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t \end{array} \right. \quad \text{et} \quad v_2 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & -e^{-t} \end{array} \right.$$

sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. La formule d'intégration par parties livre alors

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad G(x) = -x^2 \cdot e^{-x} + 2 \cdot \left( \left[-t \cdot e^{-t}\right]_0^x + \int_0^x e^{-t} \, \mathrm{d}t \right) = -x^2 \cdot e^{-x} - 2x \cdot e^{-x} - e^{-x}$$

$\boxed{\text{Ainsi, retrouvons-nous, grâce à deux intégrations par parties, le résultat de } \textbf{Q18}.}$

**Q20** — Étudier la limite éventuelle de

$$I(A) := \int_0^A x^2 \cdot e^{-x} \, \mathrm{d}x$$

lorsque $A$ tend vers $+\infty$.

Soit $A \in \mathbb{R}$. D'après **Q18**

$$I(A) = \left[-\left(2+2x+x^2\right)\cdot e^{-x}\right]_0^A = -\left(2+2A+A^2\right)\cdot e^{-A} + 2$$

Par croissances comparées, il vient

$$\boxed{I(A) \xrightarrow[A\to+\infty]{} 2}$$

**Q21** — Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Déterminer deux nombres complexes $\alpha_k$ et $\beta_k$ tels que

$$D^{-1}(f_k) = \alpha_k \cdot f_k + \beta_k \cdot D^{-1}(f_{k-1})$$

Comme

$$D(f_k) = k\cdot f_{k-1} + \lambda \cdot f_k$$

et $D^{-1}$ est linéaire, il vient

$$f_k = k\cdot D^{-1}(f_{k-1}) + \lambda \cdot D^{-1}(f_k)$$

Nous en déduisons

$$\boxed{D^{-1}(f_k) = \frac{1}{\lambda}\cdot f_k - \frac{k}{\lambda}\cdot D^{-1}(f_{k-1})}$$

d'où le résultat demandé, en posant $\boxed{\alpha_k := \frac{1}{\lambda} \text{ et } \beta_k = -\frac{k}{\lambda}.}$

*Dans la suite, on suppose $n = 3$.*

**Q22** — Calculer $D^{-1}(f_0), D^{-1}(f_1), D^{-1}(f_2), D^{-1}(f_3)$.

Clairement

$$D^{-1}(f_0) = \frac{1}{\lambda}\cdot f_0$$

À l'aide de **Q21**, nous en déduisons successivement

$$\begin{array}{rcl}
D^{-1}(f_1) & = & \frac{1}{\lambda}\cdot f_1 - \frac{1}{\lambda}\cdot D^{-1}(f_0) = \frac{1}{\lambda}\cdot f_1 - \frac{1}{\lambda^2}\cdot f_0 \\
D^{-1}(f_2) & = & \frac{1}{\lambda}\cdot f_2 - \frac{2}{\lambda}\cdot D^{-1}(f_1) = \frac{1}{\lambda}\cdot f_2 - \frac{2}{\lambda}\cdot\left(\frac{1}{\lambda}\cdot f_1 - \frac{1}{\lambda^2}\cdot f_0\right) = \frac{1}{\lambda}\cdot f_2 - \frac{2}{\lambda^2}\cdot f_1 + \frac{2}{\lambda^3}\cdot f_0 \\
D^{-1}(f_3) & = & \frac{1}{\lambda}\cdot f_3 - \frac{3}{\lambda}\cdot D^{-1}(f_2) = \frac{1}{\lambda}\cdot f_3 - \frac{3}{\lambda}\cdot\left(\frac{1}{\lambda}\cdot f_2 - \frac{2}{\lambda^2}\cdot f_1 + \frac{2}{\lambda^3}\cdot f_0\right) = \frac{1}{\lambda}\cdot f_3 - \frac{3}{\lambda^2}\cdot f_2 + \frac{6}{\lambda^3}\cdot f_1 - \frac{6}{\lambda^4}\cdot f_0
\end{array}$$

Ainsi

$$\boxed{D^{-1}(f_0) = \frac{1}{\lambda}\cdot f_0 \qquad D^{-1}(f_1) = \frac{1}{\lambda}\cdot f_1 - \frac{1}{\lambda^2}\cdot f_0 \qquad D^{-1}(f_2) = \frac{1}{\lambda}\cdot f_2 - \frac{2}{\lambda^2}\cdot f_1 + \frac{2}{\lambda^3}\cdot f_0 \qquad D^{-1}(f_3) = \frac{1}{\lambda}\cdot f_3 - \frac{3}{\lambda^2}\cdot f_2 + \frac{6}{\lambda^3}\cdot f_1 - \frac{6}{\lambda^4}\cdot f_0}$$

**Q23** — En déduire une primitive de la fonction

$$h \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left(x^3+x+1\right)\cdot\sin(2x) \end{array}\right.$$

Une primitive $H$ de la fonction $h$ est donnée par la partie imaginaire d'une primitive $K$ de la fonction

$$k \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left(x^3+x+1\right)\cdot e^{i2x} \end{array} \right.$$

D'après **Q22**, la fonction

$$K \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \underbrace{\left(\frac{1}{2i}\cdot x^3\cdot e^{i2x}-\frac{3}{(2i)^2}\cdot x^2\cdot e^{i2x}+\frac{6}{(2i)^3}\cdot x\cdot e^{i2x}-\frac{6}{(2i)^4}\cdot e^{i2x}\right)+\left(\frac{1}{2i}\cdot x\cdot e^{i2x}-\frac{1}{(2i)^2}\cdot e^{i2x}\right)+\frac{1}{2i}\cdot e^{i2x}}_{=\left(-\frac{i}{2}x^3+\frac{3}{4}x^2+\frac{i}{4}x-\frac{1}{8}-\frac{i}{2}\right)\cdot e^{i2x}} \end{array} \right.$$

est une primitive de $k$. Ainsi la fonction

$$\boxed{H \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left(-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}\right)\cdot\cos(2x)+\left(\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{8}\right)\cdot\sin(2x) \end{array} \right.}$$

est une primitive de $h$.

**Q24 —** Calculer une primitive de la fonction $h$ définie en **Q23** par une autre méthode relevant uniquement du calcul intégral.

La fonction $h$ est continue sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction

$$H \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x \left(t^3+t+1\right)\cdot\sin(2t)\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est une primitive de la fonction $g$. Les fonctions

$$u_1 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t^3+t+1 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad v_1 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & -\frac{1}{2}\cdot\cos(2t) \end{array} \right.$$

sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. La formule d'intégration par parties livre alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl} H(x) & = & \left[-\frac{1}{2}(t^3+t+1)\cdot\cos(2t)\right]_0^x+\frac{1}{2}\cdot\displaystyle\int_0^x (3t^2+1)\cdot\cos(2t)\ \mathrm{d}t \\ & = & -\frac{1}{2}(x^3+x+1)\cdot\cos(2x)+\frac{1}{2}\cdot\displaystyle\int_0^x (3t^2+1)\cdot\cos(2t)\ \mathrm{d}t+\mathrm{cste} \end{array}$$

Les applications

$$u_2 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & 3t^2+1 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad v_2 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{1}{2}\sin(2t) \end{array} \right.$$

sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. La formule d'intégration par parties livre alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl} H(x) & = & -\frac{1}{2}(x^3+x+1)\cdot\cos(2x)+\frac{1}{2}\left(\left[\frac{1}{2}(3t^2+1)\cdot\sin(2t)\right]_0^x-\displaystyle\int_0^x 3t\cdot\sin(2t)\ \mathrm{d}t\right)+\mathrm{cste} \\ & = & -\frac{1}{2}(x^3+x+1)\cdot\cos(2x)+\frac{1}{4}(3x^2+1)\sin(2x)-\frac{1}{2}\cdot\displaystyle\int_0^x 3t\cdot\sin(2t)\ \mathrm{d}t+\mathrm{cste} \end{array}$$

Les applications

$$u_3 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & 3t \end{array} \right. \quad \text{et} \quad v_3 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & -\frac{1}{2}\cos(2t) \end{array} \right.$$

sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. La formule d'intégration par parties livre alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} H(x) &= -\frac{1}{2}(x^3+x+1)\cdot\cos(2x)+\frac{1}{4}(3x^2+1)\cdot\sin(2x)-\frac{1}{2}\cdot\left(\left[-\frac{3}{2}t\cdot\cos(2t)\right]_0^x+\int_0^x \frac{3}{2}\cos(2t)\ \mathrm{d}t\right)+\text{cste} \\ &= -\frac{1}{2}(x^3+x+1)\cdot\cos(2x)+\frac{1}{4}(3x^2+1)\cdot\sin(2x)+\frac{3}{4}x\cdot\cos(2x)-\frac{3}{8}\cdot\sin(2x)+\text{cste} \end{aligned}$$

Donc la fonction

$$\boxed{H \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left(-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}\right)\cdot\cos(2x)+\left(\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{8}\right)\cdot\sin(2x) \end{array} \right.}$$

est une primitive de la fonction $h$.

## § 3 Lemme de Riemann-Lebesgue

*Soient des réels $a, b$ tels que $a < b$, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. On se propose de démontrer*

$$\text{(RL)} \quad \int_a^b f(t)\cdot\sin(nt)\ \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad [\textit{lemme de Riemann-Lebesgue}]$$

*de plusieurs manières, suivant la régularité de la fonction $f$. L'idée géométrique derrière ce résultat est la suivante. Lorsque $n$ tend vers $+\infty$, les fonctions $t \longmapsto f(t)\cdot\sin(nt)$ oscillent de plus en plus, ce qui entraîne un phénomène de compensation d'aires algébriques, à l'origine du résultat. On renvoie à l'animation* **Geogebra** *pour une illustration de ce phénomène.*

**Q25 —** Soit $f \in \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{R})$. Démontrer que

$$\int_a^b f(t)\cdot\sin(nt)\ \mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

et en déduire (RL).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les applications

$$f \left| \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad g_n \left| \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & -\frac{1}{n}\cdot\cos(nt) \end{array} \right.$$

sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. La formule d'intégration par parties livre alors

$$\int_a^b f(t)\cdot\sin(nt)\ \mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{n}\cdot f(t)\cdot\cos(nt)\right]_a^b+\frac{1}{n}\cdot\int_a^b f'(t)\cdot\cos(nt)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{n}\cdot\left(f(a)\cdot\cos(na)-f(b)\cdot\cos(nb)+\int_a^b f'(t)\cdot\cos(nt)\ \mathrm{d}t\right)$$

et donc

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b f(t)\cdot\sin(nt)\ \mathrm{d}t\right| &\leqslant \frac{1}{n}\cdot\left(|f(a)|\cdot|\cos(na)|+|f(b)|\cdot|\cos(nb)|+\int_a^b |f'(t)|\cdot|\cos(nt|\ \mathrm{d}t\right) && [a \leqslant b] \\ &\leqslant \frac{1}{n}\cdot\underbrace{\left(|f(a)|+|f(b)|+\int_a^b |f'(t)|\ \mathrm{d}t\right)}_{\text{indépendant de } n} && \left[\text{croissance de } \int_a^b\right] \end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$\boxed{\int_a^b f(t)\cdot\sin(nt)\ \mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)}$$

puis, par théorème d'encadrement

$$\boxed{\int_a^b f(t)\cdot\sin(nt)\ \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

**Q26 —** Démontrer (RL) lorsque $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction en escalier.

Soit $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction en escalier et $(x_0, x_1, \ldots, x_N)$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à la fonction $f$. Notons, pour tout $i \in [\![0, N-1]\!]$, $c_i$ la valeur de la fonction $f$ sur $]x_i, x_{i+1}[$. Nous calculons

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)\cdot\sin(nt)\,\mathrm{d}t &= \sum_{i=0}^{N-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\cdot\sin(nt)\,\mathrm{d}t && \text{[relation de Chasles]}\\
&= \sum_{i=0}^{N-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} c_i\cdot\sin(nt)\,\mathrm{d}t && \Big[\text{modification de la valeur de la fonction en un nombre fini de points}\Big]\\
&= \frac{1}{n}\cdot\left(\sum_{i=0}^{N-1} c_i\cdot(\cos(nx_i)-\cos(nx_{i+1}))\right)
\end{aligned}$$

puis en déduisons

$$\left|\int_a^b f(t)\cdot\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{n}\cdot\left(\sum_{i=0}^{N-1}|c_i|\cdot(|\cos(nx_i)|+|\cos(nx_{i+1})|)\right) \leqslant \frac{1}{n}\cdot\underbrace{\left(2\cdot\sum_{i=0}^{N-1}|c_i|\right)}_{\text{indépendant de } n}$$

Nous en déduisons

$$\int_a^b f(t)\cdot\sin(nt)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

puis, par théorème d'encadrement

$$\boxed{\int_a^b f(t)\cdot\sin(nt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

**Q27 —** En déduire (RL) lorsque $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Soit $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue. Fixons $\varepsilon > 0$.
D'après le théorème d'approximation uniforme d'une fonction continue sur un segment par une fonction en escalier, il existe une fonction $\varphi\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ en escalier telle que

$$\forall\, t\in[a,b] \quad \big|f(t)-\varphi(t)\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(t)\cdot\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_a^b (f(t)-\varphi(t)+\varphi(t))\cdot\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right|\\
&\leqslant \left|\int_a^b (f(t)-\varphi(t))\cdot\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right| + \left|\int_a^b \varphi(t)\cdot\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right| && \left[\text{linéarité de } \int_a^b \text{ et inégalité triangulaire}\right]\\
&\leqslant \int_a^b \underbrace{\big|f(t)-\varphi(t)\big|}_{\leqslant \varepsilon/2(b-a)}\cdot\underbrace{|\sin(nt)|}_{\leqslant 1}\,\mathrm{d}t + \left|\int_a^b \varphi(t)\cdot\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right| && [a\leqslant b]\\
&\underset{(\star)}{\leqslant} \frac{\varepsilon}{2} + \left|\int_a^b \varphi(t)\cdot\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right| && \Big[\text{croissance de l'intégrale}\Big]
\end{aligned}$$

D'après **Q26**, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$(\star\star) \qquad \forall\, n \geqslant N \quad \left|\int_a^b \varphi(t)\cdot\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

De $(\star)$ et $(\star\star)$, nous déduisons

$$\forall\, n \geqslant N \quad \left|\int_a^b f(t)\cdot\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon$$

Nous avons démontré que

$$\boxed{\int_a^b f(t)\cdot\sin(nt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

**Q28 —** Démontrer enfin (RL) lorsque $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue par morceaux.

Soit $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et $(x_0, x_1, \ldots, x_N)$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à la fonction $f$.
Notons, pour tout $i \in [\![0, N-1]\!]$, $\overline{f_i}$ le prolongement par continuité de la fonction $f_{|]x_i,x_{i+1}[}$ au segment $[x_i, x_{i+1}]$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t)\cdot\sin(nt) \end{array} \right.$$

est continue par morceaux et $(x_0, x_1, \ldots, x_N)$ est une subdivision de $[a,b]$ adaptée également à la fonction $f_n$.
Pour tout $i \in [\![0, N-1]\!]$, le prolongement par continuité de la fonction $\left(f_n\right)_{|]x_i,x_{i+1}[}$ au segment $[x_i, x_{i+1}]$ est la fonction

$$\left| \begin{array}{ccc} [x_i, x_{i+1}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \overline{f_i}(t)\cdot\sin(nt) \end{array} \right.$$

Alors, par définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

$$\int_a^b f(t)\cdot\sin(nt)\,\mathrm{d}t \underset{(\star)}{:=} \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \overline{f_i}(t)\cdot\sin(nt)\,\mathrm{d}t$$

Soit $i \in [\![0, N-1]\!]$. Comme la fonction $\overline{f_i}$ est continue sur le segment $[x_i, x_{i+1}]$

$$(\star\star) \qquad \int_{x_i}^{x_{i+1}} \overline{f_i}(t)\cdot\sin(nt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad [\text{Q27}]$$

De $(\star)$ et $(\star\star)$, nous déduisons

$$\boxed{\int_a^b f(t)\cdot\sin(nt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

## § 4 Lemme de Farkas

*Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$. On note $E^* := \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$ son dual.*

**Q29 —** Soient $g$ et $\psi$ deux formes linéaires non nulles sur $E$ telles que $\mathrm{Ker}\left(g\right) = \mathrm{Ker}\left(\psi\right)$. Démontrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\psi = \lambda \cdot g$.

Posons $H := \mathrm{Ker}\left(g\right) = \mathrm{Ker}\left(\psi\right)$. Comme $H$ est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur $E$, $H$ est un hyperplan de $E$.
Soit $x_0$ un vecteur de $E$ qui n'appartient pas à $H$, de sorte que $g(x_0) \neq 0$. D'après le cours, $\mathrm{Vect}\,(x_0)$ est un supplémentaire de $H$ dans $E$.
Soit $x \in E = H \oplus \mathrm{Vect}\,(x_0)$. Il existe un unique couple $(h,k) \in H \times \mathbb{R}$ tel que $x = h + k\cdot x_0$. Nous calculons

$$g(x) = g(h + k\cdot x_0) = g(h) + k\cdot g(x_0) = k\cdot g(x_0) \quad \text{et} \quad \psi(x) = \psi(h + k\cdot x_0) = \psi(h) + k\cdot\psi(x_0) = k\cdot\psi(x_0)$$

Ainsi

$$\psi(x) = \frac{\psi(x_0)}{g(x_0)}\cdot g(x)$$

Puisque $k := \dfrac{\psi(x_0)}{g(x_0)} \in \mathbb{R}$ est indépendant de $x$, nous en déduisons $\psi = \lambda\cdot g$.

**Q30 —** Soit $x$ un vecteur non nul de $E$. Construire une forme linéaire $f \in E^*$ tel que $f(x) = 1$.

Comme $x \neq 0_E$, la famille $(x)$ est libre dans $E$. D'après le théorème de la base incomplète, il existe $(x_2, \ldots, x_n) \in E^{n-1}$ tel que la famille $\mathscr{B} := (x, x_2, \ldots, x_n)$ est une base de $E$.
L'unique application linéaire $f$ de $E$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = 1 \quad \text{et} \quad f(x_2) = \ldots = f(x_n) = 0$$

convient.

**Q31 —** Soit $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de $E^*$. Démontrer qu'il existe une unique base $\mathscr{B} = (x_1, \dots, x_n)$ de $E$ dont la base duale $\mathscr{B}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ coïncide avec $\mathscr{C}$. On pourra commencer par établir que l'application

$$u \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto & (f_1(x), \dots, f_n(x)) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme. *La base $\mathscr{B}$ est appelée base antéduale de $\mathscr{C}$.*

• Démontrons que $u$ est linéaire. Soient $(x, y) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$u(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = (f_1(\lambda \cdot x + \mu \cdot y), \dots, f_n(\lambda \cdot x + \mu \cdot y)) \, .$$

Comme les applications $f_1, \dots, f_n$ sont linéaires

$$u(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = (\lambda \cdot f_1(x) + \mu \cdot f_1(y), \dots, \lambda \cdot f_n(x) + \mu \cdot f_n(y)) = \lambda . \underbrace{(f_1(x), \dots, f_n(x))}_{=u(x)} + \mu . \underbrace{(f_1(y), \dots, f_n(y))}_{=u(y)}$$

• Démontrons que $u$ est injective. Soit $x \in \mathrm{Ker}(u)$. Alors $f_1(x) = \ldots = f_n(x)$. Si $x$ est non nul, alors d'après **Q30**, il existe $f \in E^*$ telle que $f(x) = 1$. Comme $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_n)$ est une base de $E^*$, il existe (un unique) $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$f = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot f_k \, .$$

En évaluant en $x$, il vient

$$1 = f(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot f_k(x) = 0$$

d'où une contradiction. Ainsi, $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$ et $f$ est injective.
• Démontrons que $u$ est bijective. L'application $u$ est une application linéaire injective entre deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies égales. Il s'agit donc d'un isomorphisme.

• Existence de la base $\mathscr{B}$ L'application réciproque de $u$

$$u^{-1} : \mathbb{K}^n \longrightarrow E$$

est donc également un isomorphisme. Si on note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, alors la famille

$$\mathscr{B} := \left( x_1 := u^{-1}(e_1), \dots, x_n := u^{-1}(e_n) \right)$$

est une base de $E$. Comme pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

$$u(x_i) = (f_1(x_i), \dots, f_n(x_i)) = e_i$$

nous avons

$$\forall \, (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \qquad f_j(x_i) = \delta_{i,j} \, .$$

Ainsi $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_n)$ est la base duale de $\mathscr{B} = (x_1, \dots, x_n)$. Nous achevons ainsi la démonstration de l'existence d'une base antéduale de $\mathscr{C}$.

• Unicité de la base $\mathscr{B}$ Soit $(y_1, \dots, y_n)$ une base de $E$ dont la base duale est $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_n)$. Alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $u(y_i) = e_i$. Comme $u$ est injective, nous en déduisons :

$$(y_1, \dots, y_n) = (x_1, \dots, x_n) \, .$$

**Q32 —** Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $f_1, \dots, f_p, g$ des formes linéaires sur $E$. Démontrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

(P1) $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(f_k) \subset \mathrm{Ker}(g)$

(P2) $g \in \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_p)$

*Il s'agit d'une version du lemme de Farkas.*

$\boxed{\text{P1} \Longrightarrow \text{P2}}$ Supposons qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tels que

$$g = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot f_k$$

En évaluant en un vecteur $x \in \bigcap_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}\left(f_k\right)$, il vient

$$g(x) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot f_k(x) = g = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot 0 = 0$$

Ainsi $\bigcap_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}\left(f_k\right) \subset \mathrm{Ker}\left(g\right)$.

$\boxed{\text{P2} \Longrightarrow \text{P1}}$ Supposons $\bigcap_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}\left(f_k\right) \subset \mathrm{Ker}\left(g\right)$. Démontrons que $g \in \mathrm{Vect}\left(f_1, \dots, f_p\right)$, en séparant l'étude en trois parties suivant la valeur de $\dim\left(\mathrm{Vect}\left(f_1, \dots, f_p\right)\right)$.

- Si $\dim\left(\mathrm{Vect}\left(f_1, \dots, f_p\right)\right) = 0$, alors toutes les formes linéaires $f_1, \dots, f_p$ sont nulles et donc tous les noyaux $\mathrm{Ker}\left(f_1\right), \dots, \mathrm{Ker}\left(f_p\right)$ égalent tous $E$. L'hypothèse livre

$$E = \bigcap_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}\left(f_k\right) \subset \mathrm{Ker}\left(g\right)$$

La forme $g$ est donc la forme linéaire nulle et donc $g \in \mathrm{Vect}\left(f_1, \dots, f_p\right)$.

- Si $\dim\left(\mathrm{Vect}\left(f_1, \dots, f_p\right)\right) = n = \dim\left(E^*\right)$, alors $\mathrm{Vect}\left(f_1, \dots, f_p\right) = E^*$ donc $g \in \mathrm{Vect}\left(f_1, \dots, f_p\right)$ est claire.
- Si $q := \dim\left(\mathrm{Vect}\left(f_1, \dots, f_p\right)\right) \in [\![1, n-1]\!]$, alors le théorème de la base extraite nous permet d'extraire une base de la famille génératrice $(f_1, \dots, f_p)$ de $\mathrm{Vect}\left(f_1, \dots, f_p\right)$. Quitte à renuméroter les formes linéaires $f_1, \dots, f_p$, nous pouvons supposer que la famille $(f_1, \dots, f_q)$ est une base de $\mathrm{Vect}\left(f_1, \dots, f_p\right)$. Ainsi, la famille $(f_1, \dots, f_q)$ est libre et

$$\mathrm{Vect}\left(f_1, \dots, f_q\right) = \mathrm{Vect}\left(f_1, \dots, f_p\right)$$

D'après le théorème de la base incomplète, la famille libre $\left(f_1, \dots, f_p\right)$ d'éléments de $E^*$ peut être complétée en une base

$$\mathscr{C} := \left(f_1, \dots, f_p, f'_{p+1}, \dots, f'_n\right)$$

de $E^*$. Ainsi, il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_q, \lambda_{q+1}, \dots, \lambda_n$ tels que

$$g = \sum_{k=1}^{q} \lambda_k \cdot f_k + \sum_{k=q+1}^{n} \lambda_k \cdot f'_k$$

Pour conclure, nous démontrons $\lambda_{q+1} = \ldots = \lambda_n = 0$. Considérons $(x_1, \dots, x_n)$ la base de $E$ qui est l'antéduale de la base $\mathscr{C}$ de $E^*$ (cf. **Q31**). Soit $\ell \in [\![q+1, n]\!]$. D'une part

$$g(x_\ell) = \sum_{k=1}^{q} \lambda_k \cdot f_k(x_\ell) + \sum_{k=q+1}^{n} \lambda_k \cdot f'_k(x_\ell) = \sum_{k=1}^{q} \lambda_k \cdot \delta_{k,\ell} + \sum_{k=q+1}^{n} \lambda_k \cdot \delta_{k,\ell} = \lambda_\ell$$

D'autre part, comme $f_1(x_\ell) = \ldots = f_p(x_\ell) = 0$, $x_\ell \in \bigcap_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}\left(f_k\right) \subset \mathrm{Ker}\left(g\right)$ et donc

$$g(x_\ell) = 0\,.$$

Nous en déduisons $\lambda_\ell = 0$.

*Si $f \in E^*$, alors le cône positif de $f$, noté $C^+(f)$, est défini par*

$$C^+(f) := \left\{x \in E \,:\, f(x) \geqslant 0\right\}$$

**Q33 —** Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $g \in E^*$ et $(f_1, \dots, f_p)$ une famille libre d'éléments de $E^*$. Démontrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

(Q1) $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{p} C^+(f_k) \subset C^+(g)$

(Q2) $\exists(\lambda_1,\dots,\lambda_p) \in (\mathbb{R}_+)^p \quad g = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot f_k$

*Il s'agit d'une autre version du lemme de Farkas.*

$\boxed{\text{Q2} \Longrightarrow \text{Q1}}$ Supposons qu'il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_p) \in (\mathbb{R}_+)^p$ tels que

$$g = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot f_k$$

En évaluant en un vecteur $x \in \displaystyle\bigcap_{k=1}^{p} C^+(f_k)$, il vient

$$g(x) = \sum_{k=1}^{p} \underbrace{\lambda_k}_{\geqslant 0} \cdot \underbrace{f_k(x)}_{\geqslant 0} \geqslant 0$$

Ainsi $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{p} C^+(f_k) \subset C^+(g)$.

$\boxed{\text{Q1} \Longrightarrow \text{Q2}}$ Supposons que $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{p} C^+(f_k) \subset C^+(g)$.

- Supposons tout d'abord $p = n$. Alors $(f_1,\dots,f_n)$ est une base de $E^*$. Il existe donc $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$g = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot f_k$$

Considérons $(x_1,\dots,x_n)$ la base de $E$ qui est l'antéduale de la base $\mathscr{C}$ de $E^*$ (cf. **Q31**). Soit $\ell \in [\![1,n]\!]$. Comme, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$

$$f_k(x_\ell) = \delta_{k,\ell} \geqslant 0$$

$x_\ell \in \displaystyle\bigcap_{k=1}^{p} C^+(f_k) \subset C^+(g)$, il vient

$$\lambda_\ell = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot \delta_{k,\ell} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot f_k(x_\ell) = g(x_\ell) \geqslant 0$$

Ainsi $\lambda_1 \geqslant 0,\dots,\lambda_n \geqslant 0$.

- Nous supposons donc $p < n$ dans la suite. D'après le théorème de la base incomplète, la famille libre $(f_1,\dots,f_p)$ de $E^*$ peut être complétée en une base

$$\mathscr{C} := (f_1,\dots,f_p,f_{p+1},\dots,f_n)$$

de $E^*$. Ainsi, il existe des scalaires $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ tels que

$$g = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot f_k$$

Pour conclure, nous démontrons $\lambda_1 \geqslant 0,\dots,\lambda_p \geqslant 0$ et $\lambda_{p+1} = \ldots = \lambda_n = 0$. Considérons $(x_1,\dots,x_n)$ la base de $E$ qui est l'antéduale de la base $\mathscr{C}$ de $E^*$ (cf. **Q31**).

— Soit $\ell \in [\![1,p]\!]$. Comme, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$

$$f_k(x_\ell) = \delta_{k,\ell} \geqslant 0$$

$x_\ell \in C(f_1,\dots,f_p) \subset C(g)$ et

$$\lambda_\ell = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot \delta_{k,\ell} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot f_k(x_\ell) = g(x_\ell) \geqslant 0$$

— Soit $\ell \in [\![p+1,n]\!]$. Tout d'abord

$$g(x_\ell) = \sum_{k=1}^{q} \lambda_k \cdot f_k(x_\ell) + \sum_{k=q+1}^{n} \lambda_k \cdot g'_k(x_\ell) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot \delta_{k,\ell} = \lambda_\ell$$

Ensuite comme $f_1(x_\ell) = \ldots = f_p(x_\ell) = 0$, $x_\ell \in \bigcap_{k=1}^{p} \operatorname{Ker}(f_k) \subset C(f_1, \ldots, f_p) \subset C(g)$ et donc

$$\lambda_\ell = g(x_\ell) \geqslant 0$$

Enfin $f_1, \ldots, f_p$ sont linéaires

$$f_1(-x_\ell) = -f_1(x_\ell) = 0, \quad \ldots \quad , f_p(-x_\ell) = -f_p(x_\ell) = 0$$

$-x_\ell \in \bigcap_{k=1}^{p} \operatorname{Ker}(f_k) \subset C(f_1, \ldots, f_p) \subset C(g)$ et donc

$$g(-x_\ell) \geqslant 0$$

Comme $g$ est linéaire, nous en déduisons $-g(x_\ell) \geqslant 0$ puis

$$\lambda_\ell = g(x_\ell) \leqslant 0\,.$$

Ainsi $\lambda_\ell = 0$.

**Q34 —** Soient $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$ et $C \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Démontrer que

$$C = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \iff \forall\, x \in \mathbb{R}^n \quad x\,C = 0$$

Le sens direct est clair. Prouvons la réciproque et supposons que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $x\,C = 0$. Posons $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} := C$. D'après l'hypothèse

$$0 = (c_1, \ldots, c_n) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} c_k^2$$

Comme $c_1^2 \geqslant 0, \ldots, c_n^2 \geqslant 0$, nous en déduisons $c_1 = \ldots = c_n = 0$. Donc $C = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

*Si $X$ est un vecteur colonne de nombres réels, alors on note $X \geqslant 0$ si tous les coefficients de $X$ sont positifs ou nuls.*

**Q35 —** Soient $(n,p) \in \mathbb{N}_{\geqslant 2} \times \mathbb{N}_{\geqslant 2}$, $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ une matrice dont les colonnes $(C_1, \ldots, C_p)$ forment une famille libre de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Démontrer qu'un et un seul des deux systèmes d'équations/inéquations suivants possède une solution.

(S1) $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $X \geqslant 0$

(S2) $A^\top Y \geqslant 0$ d'inconnue $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $B^\top Y < 0$

*Il s'agit d'une version matricielle du lemme de Farkas qui possède des applications en programmation linéaire et en théorie des jeux.*

- Pour tout $k \in [\![1,p]\!]$ soit $f_k$ la forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ définie par

$$f_k \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & (x_1, \ldots, x_n)\,C_k \end{array} \right.$$

- La famille $(f_1, \ldots, f_p)$ de formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ est libre. En effet, soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot f_k = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}\,.$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$(\star) \quad 0 = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot f_k(x) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot x\,C_k = x \left( \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot C_k \right)$$

D'après **Q34**, le vecteur colonne $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot C_k$ est nul. Comme la famille $(C_1, \ldots, C_p)$ est libre, $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0$.

- Nous introduisons la forme linéaire $g$ sur $\mathbb{R}^n$ définie par

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & (x_1, \ldots, x_n)\,B \end{array} \right.$$

- Nous avons alors l'alternative suivante

(1) $\bigcap_{k=1}^{p} C^+(f_k) \subset C^+(g)$

(2) $\bigcap_{k=1}^{p} C^+(f_k) \not\subset C^+(g)$

- Étudions (1). D'après la deuxième version du lemme de Farkas

$$\begin{aligned}
\bigcap_{k=1}^{p} C^+(f_k) \subset C^+(g) &\iff \exists (\lambda_1,\dots,\lambda_p) \in (\mathbb{R}_+)^p \quad g = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot f_k \\
&\iff \exists (\lambda_1,\dots,\lambda_p) \in (\mathbb{R}_+)^p \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad g(x) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot f_k(x) \\
&\iff \exists (\lambda_1,\dots,\lambda_p) \in (\mathbb{R}_+)^p \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot x\, C_k = x\, B \\
&\iff \exists (\lambda_1,\dots,\lambda_p) \in (\mathbb{R}_+)^p \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad x \left( \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot C_k - B \right) = 0 \\
&\iff \exists (\lambda_1,\dots,\lambda_p) \in (\mathbb{R}_+)^p \quad \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot C_k - B = 0 \qquad [\text{Q34}] \\
&\iff \exists (\lambda_1,\dots,\lambda_p) \in (\mathbb{R}_+)^p \quad \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot C_k = B \\
&\iff \exists (\lambda_1,\dots,\lambda_p) \in (\mathbb{R}_+)^p \quad A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} = B \\
&\iff \text{(S1) possède une solution}
\end{aligned}$$

- Étudions (2).

$$\begin{aligned}
\bigcap_{k=1}^{p} C^+(f_k) \not\subset C^+(g) &\iff \exists y \in \mathbb{R}^n \quad f_1(y) \geqslant 0, \dots, f_p(y) \geqslant 0 \text{ et } g(y) < 0 \\
&\iff \exists y \in \mathbb{R}^n \quad y\, C_1 \geqslant 0, \dots, y\, C_p \geqslant 0 \text{ et } y\, B < 0 \\
&\iff \exists y \in \mathbb{R}^n \quad C_1^\top y^\top \geqslant 0, \dots, C_p^\top y^\top \geqslant 0 \text{ et } B^\top y^\top < 0 \\
&\iff \exists y \in \mathbb{R}^n \quad A^\top y^\top \geqslant 0 \text{ et } B^\top y^\top < 0 \\
&\iff \text{(S2) possède une solution}
\end{aligned}$$

## § 5 Transposée d'une application

*Soient $\mathbb{K}$ un corps, $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $p \geqslant 1$. On note $E^* := \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ le dual de $E$.*

**Q36 —** Soit $A$ une une partie de $E$. Démontrer que

$$A^\perp := \{ f \in E^* \,:\, \forall a \in A \quad f(a) = 0 \}$$

est un sous-espace vectoriel de $E^*$.

- La forme linéaire nulle sur $E$ s'annule en particulier en tout point de $A$. Donc $\boxed{0_{E^*} \in A^\perp.}$
- Soient $(f_1, f_2) \in A^\perp \times A^\perp$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$. Alors, pour tout $a \in A$

$$(\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2)(a) := \lambda_1 \cdot \underbrace{f_1(a)}_{=0} + \lambda_2 \cdot \underbrace{f_2(a)}_{=0} = 0$$

Comme la forme linéaire $\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2$ est nulle sur $A$, on a $\boxed{\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2 \in A^\perp.}$

**Q37 —** Soit $F$ une sous-espace vectoriel de $E$. Démontrer

$$F = E \iff F^\perp = \{0_{E^*}\}$$

L'implication $\Longrightarrow$ est triviale. Démontrons l'implication $\Longleftarrow$.
Supposons $F^{\perp} = \{0_{E^*}\}$ et démontrons qu'alors $F = E$. L'inclusion $\subset$ étant triviale, il reste à établir que tout vecteur de $E$ appartient à $F$. Nous raisonnons pour cela par l'absurde, en supposant qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que $x \notin F$.
Considérons une base $(e_1, \ldots, e_k)$ de $F$. Comme $x \notin \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k) = F$, la famille $(e_1, \ldots, e_k, x)$ est une famille libre de $E$. Par le théorème de la base incomplète, il existe des vecteurs $e_{k+2}, \ldots, e_p$ de $E$ tels la famille

$$(e_1, \ldots, e_k, x, e_{k+2}, \ldots, e_p)$$

est une base de $E$. Soit $f$ l'unique forme linéaire sur $E$ définie par

$$f(e_1) = \ldots = f(e_k) = f(e_{k+2}) = \ldots = f(e_p) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) = 1$$

La forme linéaire $f$ s'annule sur chacun des vecteurs $e_1, \ldots, e_k$ donc sur $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$. Ainsi $f \in F^{\perp} = \{0_{E^*}\}$, i.e. $f$ est la forme linéaire nulle sur $E$. Ceci contredit $f(x) = 1$.
Nous avons établi que $\boxed{F = E \text{ si et seulement si } F^{\perp} = \{0_{E^*}\}.}$

**Q38 —** Soit $F$ une sous-espace vectoriel de $E$. Démontrer

$$F = \{0_E\} \quad \Longleftrightarrow \quad F^{\perp} = E^*$$

L'implication $\Longrightarrow$ est triviale. Démontrons l'implication $\Longleftarrow$.
Supposons $F^{\perp} = E^*$ et démontrons qu'alors $F = \{0_E\}$. L'inclusion $\supset$ étant triviale, il reste à établir que, tout vecteur de $F$ est nul. Nous raisonnons pour cela par l'absurde, en supposant qu'il existe un vecteur non nul $x$ dans $F$. D'après **Q30**, il existe $f \in E^*$ tel que $f(x) = 1$. Cette forme linéaire $f$ sur $E$ n'est donc pas nulle sur $F$. Ainsi $f \notin F^{\perp} = E^*$. Contradiction.
Nous avons établi que $\boxed{F = \{0_E\} \text{ si et seulement si } F^{\perp} = E^*.}$

**Q39 —** Soient $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ de dimension $k$. Démontrer que $\dim\left(F^{\perp}\right) = p - k$.

Soit $(e_1, \ldots, e_k)$ une base de $F$. D'après le théorème de la base incomplète, il existe des vecteurs $e_{k+1}, \ldots, e_p$ de $E$ tels que la famille

$$\mathscr{B} := (e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_p)$$

est une base de $E$. Considérons

$$\mathscr{B}^* := (e_1^*, \ldots, e_k^*, e_{k+1}^*, \ldots, e_p^*)$$

la base duale de $\mathscr{B}$, qui est une base de $E^*$. Nous démontrons que

$$F^{\perp} = \mathrm{Vect}\left(e_{k+1}^*, \ldots, e_p^*\right)$$

$\boxed{\subset}$ Soit $f \in F^{\perp}$. Alors il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que

$$(\star) \quad f = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot e_i^*$$

Soit $j \in [\![1, k]\!]$. Comme $e_j \in F$

$$0 = f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot e_i^*(e_j) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot \delta_{i,j} = \lambda_j$$

Alors l'identité $(\star)$ se réécrit

$$f = \sum_{i=k+1}^{p} \lambda_i \cdot e_i^* \in \mathrm{Vect}\left(e_{k+1}^*, \ldots, e_p^*\right)$$

$\boxed{\supset}$ Soit $f \in \mathrm{Vect}\left(e_{k+1}^*, \ldots, e_p^*\right)$. Alors il existe des scalaires $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_p$ tels que

$$f = \sum_{i=k+1}^{p} \lambda_i \cdot e_i^*$$

Soit $x \in F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$. Alors, il existe des scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ tels que

$$x = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \cdot e_j$$

D'après la linéarité de $e_{k+1}^*,\ldots,e_p^*$

$$f(x)=\sum_{i=k+1}^{p}\lambda_i\cdot e_i^*\left(\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\cdot e_j\right)=\sum_{i=k+1}^{p}\lambda_i\cdot\left(\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\cdot\underbrace{e_i^*(e_j)}_{=0}\right)=0$$

Comme $f$ s'annule sur tout vecteur de $F$, $f\in F^{\perp}$.

La famille $\left(e_{k+1}^*,\ldots,e_p^*\right)$ est donc une famille génératrice de $F^{\perp}$. Comme elle est par ailleurs libre (comme sous-famille d'une famille libre), nous en déduisons qu'elle est une base de $F^{\perp}$. Ainsi $\boxed{\dim\left(F^{\perp}\right)=p-k.}$

*Soient $F$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n\geqslant 1$ et $u\in\mathscr{L}(E,F)$.*

**Q40 —** Démontrer que l'application transposée de $u$, notée $u^{\top}$ et définie par

$$u^{\top}\left|\begin{array}{ccc}F^* & \longrightarrow & E^*\\ v & \longmapsto & v\circ u\end{array}\right.$$

est linéaire.

Soient $(v_1,v_2)\in F^*\times F^*$ et $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{K}^2$. Les applications $u^{\top}(\lambda_1\cdot v_1+\lambda_2\cdot v_2)$ et $\lambda_1\cdot u^{\top}(v_1)+\lambda_2\cdot u^{\top}(v_2)$ ont même source $(E)$ et but $(\mathbb{K})$.
Soit $x\in E$.

$$\begin{array}{rcl}u^{\top}(\lambda_1\cdot v_1+\lambda_2\cdot v_2)(x) & := & (\lambda_1\cdot v_1+\lambda_2\cdot v_2)\circ u(x)\\ & = & (\lambda_1\cdot v_1+\lambda_2\cdot v_2)(u(x))\\ & := & \lambda_1\cdot v_1(u(x))+\lambda_2\cdot v_2(u(x))\\ & = & \lambda_1\cdot v_1\circ u(x)+\lambda_2\cdot v_2\circ u(x)\\ & = & \lambda_1\cdot u^{\top}(v_1)(x)+\lambda_2\cdot u^{\top}(v_2)(x)\\ & =: & \left(\lambda_1\cdot u^{\top}(v_1)+\lambda_2\cdot u^{\top}(v_2)\right)(x)\end{array}$$

Ainsi

$$\boxed{u^{\top}(\lambda_1\cdot v_1+\lambda_2\cdot v_2)=\lambda_1\cdot u^{\top}(v_1)+\lambda_2\cdot u^{\top}(v_2)}$$

**Q41 —** Démontrer

$$\mathrm{Ker}\,(u)^{\perp}=\mathrm{Im}\left(u^{\top}\right)\quad\text{et}\quad\mathrm{Im}\,(u)^{\perp}=\mathrm{Ker}\left(u^{\top}\right)$$

- Démontrons $\mathrm{Ker}\,(u)^{\perp}=\mathrm{Im}\left(u^{\top}\right)$

$\boxed{\supset}$ Soit $w\in\mathrm{Im}\left(u^{\top}\right)$. Alors il existe $v\in F^*$ telle que $w=u^{\top}(v)=v\circ u$.
Soit $x\in\mathrm{Ker}\,(u)$. Alors

$$w(x)=v(u(x))=v(0_F)=0\qquad[v\text{ est linéaire}]$$

Comme $w$ s'annule sur $\mathrm{Ker}\,(u)$, $w\in\mathrm{Ker}\,(u)^{\perp}$.

$\boxed{\subset}$ Soit $w\in\mathrm{Ker}\,(u)^{\perp}$.
Soit $A$ un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\,(u)$ dans $E$. D'après le théorème du rang

$$u_{|A}^{|\,\mathrm{Im}(u)}\left|\begin{array}{ccc}A & \longrightarrow & \mathrm{Im}\,(u)\\ x & \longmapsto & u(x)\end{array}\right.$$

est un isomorphisme. Considérons un supplémentaire $B$ de $\mathrm{Im}\,(u)$ dans $F$ et l'unique forme linéaire $v$ sur $F$ telle que

$$v_{|\,\mathrm{Im}(u)}=w\circ\left(u_{|A}^{|\,\mathrm{Im}(u)}\right)^{-1}\quad\text{et}\quad v_{|B}=0_{B^*}$$

Démontrons que $w=v\circ u=u^{\top}(v)\in\mathrm{Im}\left(u^{\top}\right)$, ce qui achèvera la démonstration. Ces deux applications ont même source $(E)$ et but $(\mathbb{K})$.
Soit $x\in E$. Comme $E=\mathrm{Ker}\,(u)\oplus A$ il existe $x_0\in\mathrm{Ker}\,(u)$ et $a\in A$ (uniques) tels que

$$x=x_0+a$$

D'une part

$$\begin{array}{rcl} v\circ u(x) & = & v(u(x)) \\ & = & v(u(x_0))+v(u(a)) \qquad [u \text{ et } v \text{ sont linéaires}] \\ & = & v(u(a)) \qquad [x_0\in \operatorname{Ker}(u) \text{ et } v \text{ est linéaire}] \\ & = & w\circ \left(u_{|A}^{|\operatorname{Im}(u)}\right)^{-1}(u(a)) \\ & = & w\circ \left(u_{|A}^{|\operatorname{Im}(u)}\right)^{-1}\circ u(a) \\ & = & w\circ \left(u_{|A}^{|\operatorname{Im}(u)}\right)^{-1}\circ u_{|A}^{|\operatorname{Im}(u)}(a) \qquad [a\in A] \\ & = & w(a) \end{array}$$

et d'autre part

$$\begin{array}{rcl} w(x) & = & w(x_0)+w(a) \qquad [w \text{ est linéaire}] \\ & = & w(a) \qquad [x_0\in\operatorname{Ker}(u) \text{ et } w \text{ est nulle sur } \operatorname{Ker}(u)] \end{array}$$

Nous avons démontré

$$\boxed{\operatorname{Ker}(u)^{\perp}=\operatorname{Im}\left(u^{\top}\right)}$$

- Démontrons $\operatorname{Im}(u)^{\perp}=\operatorname{Ker}\left(u^{\top}\right)$.

$\boxed{\supset}$ Soit $v\in\operatorname{Ker}\left(u^{\top}\right)$. Alors

$$0_{E^*}=u^{\top}(v)=v\circ u$$

Nous en déduisons que $v$ s'annule sur $\operatorname{Im}(u)$, i.e. que $v\in\operatorname{Im}(u)^{\perp}$.

$\boxed{\dim}$ Nous calculons

$$\begin{array}{rcl} \dim\left(\operatorname{Im}(u)^{\perp}\right) & = & n-\dim(\operatorname{Im}(u)) \qquad [\textbf{Q39}] \\ & = & n-p+\dim(\operatorname{Ker}(u)) \qquad [\text{formule du rang appliquée à } u] \\ & = & n-\dim\left(\operatorname{Ker}(u)^{\perp}\right) \qquad [\textbf{Q39}] \\ & = & n-\dim\left(\operatorname{Im}\left(u^{\top}\right)\right) \qquad [\text{cf. première identité démontrée dans cette question}] \\ & = & \dim\left(\operatorname{Ker}\left(u^{\top}\right)\right) \qquad [\text{formule du rang appliquée à } u^{\top}] \end{array}$$

De l'inclusion $\operatorname{Ker}\left(u^{\top}\right)\subset\operatorname{Im}(u)^{\perp}$ et de l'égalité des dimensions finies de ces deux sous-espaces, nous déduisons

$$\boxed{\operatorname{Im}(u)^{\perp}=\operatorname{Ker}\left(u^{\top}\right)}$$

**Q42 —** Qu'en déduire quant aux liens entre l'injectivité/la surjectivité de $u$ et l'injectivité/la surjectivité de $u^{\top}$ ?

- Démontrons que

$$\boxed{u \text{ est injective si et seulement si } u^{\top} \text{ est surjective}}$$

$$\begin{array}{rcl} u \text{ injective} & \Longleftrightarrow & \operatorname{Ker}(u)=\{0_E\} \\ & \Longleftrightarrow & \operatorname{Ker}(u)^{\perp}=E^* \qquad [\textbf{Q38}] \\ & \Longleftrightarrow & \operatorname{Im}\left(u^{\top}\right)=E^* \qquad [\textbf{Q41}] \\ & \Longleftrightarrow & u^{\top} \text{ surjective} \end{array}$$

- De manière analogue, on établit que

$$\boxed{u \text{ est surjective si et seulement si } u^{\top} \text{ est injective}}$$

**Q43 —** Démontrer

$$\operatorname{Rg}(u)=\operatorname{Rg}\left(u^{\top}\right)$$

Nous calculons

$$\begin{array}{rcl} \dim(\operatorname{Im}(u)) & = & p-(\dim\operatorname{Ker}(u)) \qquad [\text{formule du rang appliquée à } u] \\ & = & \dim\left(\operatorname{Ker}(u)^{\perp}\right) \qquad [\textbf{Q39}] \\ & = & \dim\left(\operatorname{Im}\left(u^{\top}\right)\right) \qquad [\textbf{Q41}] \end{array}$$

Donc $\boxed{\operatorname{Rg}(u)=\operatorname{Rg}\left(u^{\top}\right).}$

**Q44 —** Soient $\underline{e} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de $E$ et $\underline{f} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de $F$. On note $\underline{e^*} = (e_1^*, \dots, e_p^*)$ la base duale de $\underline{e}$ et $\underline{f^*} = (f_1^*, \dots, f_n^*)$ la base duale de $\underline{f}$. La matrice $\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}(u) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de $u$ relativement aux bases $\underline{e}$ et $\underline{f}$ a pour $j$-ième colonne les coordonnées du vecteur $u(e_j)$ dans la base $\underline{f}$, pour tout $j \in [\![1,p]\!]$. De même la matrice $\mathrm{Mat}_{\underline{f^*},\underline{e^*}}\left(u^\top\right) \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ de $u^\top$ relativement aux bases $\underline{f^*}$ et $\underline{e^*}$ a pour $j$-ième colonne les coordonnées du vecteur $u^\top(f_j^*)$ dans la base $\underline{e^*}$, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$. Quel lien existe-t-il entre les matrices $\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}(u)$ et $\mathrm{Mat}_{\underline{f^*},\underline{e^*}}\left(u^\top\right)$ ?

- La matrice $\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}(u)$ est de format $(n,p)$ et la matrice $\mathrm{Mat}_{\underline{f^*},\underline{e^*}}\left(u^\top\right)$ est de format $(p,n)$.
- Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$.
  - — Par définition, le coefficient d'adresse $(i,j)$ de la matrice $\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}(u)$ est la $i$-ième coordonnée du vecteur $u(e_j)$ dans la $\underline{f}$. Ainsi
$$\left[\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}(u)\right]_{i,j} = f_i^*(u(e_j)) = f_i^* \circ u(e_j)$$
  - — Comme $\underline{e^*}$ est une base de $E^*$, il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ (uniques) tels que
$$f_i^* \circ u = \sum_{\ell=1}^{n} \lambda_\ell \cdot e_\ell^*$$
Ainsi
$$f_i^* \circ u(e_j) = \sum_{\ell=1}^{n} \lambda_\ell \cdot e_\ell^*(e_j) = \lambda_j$$
  - — Par définition, le coefficient d'adresse $(j,i)$ de la matrice $\mathrm{Mat}_{\underline{f^*},\underline{e^*}}\left(u^\top\right)$ est la $j$-ième coordonnée du vecteur
$$u^\top\left(f_i\right) = f_i^* \circ u \in E^*$$
dans la base $\underline{e^*}$. Ce dernier égale $\lambda_j = f_i^* \circ u(e_j)$ d'après le tiret précédent. Ainsi
$$\left[\mathrm{Mat}_{\underline{f^*},\underline{e^*}}\left(u^\top\right)\right]_{j,i} = f_i^* \circ u(e_j)$$
- De cette étude, nous déduisons que

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\underline{f^*},\underline{e^*}}\left(u^\top\right) \text{ est la transposée de la matrice } \mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}(u)^\top}$$