Devoir Libre n°16

Pour le mardi 2 mai

§ 1 Étude d'une fonction définie par une intégrale

Soient un réel $a \geqslant 1$ et f_a la fonction définie par

$$f_a \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{1+t^a} \end{array} \right.$$

Q1 — Étudier les variations de la fonction f_a.

Q2 — Calculer, pour tout $t > 0$, $f_a(t) + f_a\left(\dfrac{1}{t}\right)$.

Q3 — Soit un réel $b \geqslant 1$. Étudier la limite éventuelle de $\dfrac{f_a(t)}{f_b(t)}$ lorsque t tend vers $+\infty$.

Q4 — Justifier que la fonction f_a possède un développement limité au voisinage de $t = 1$ à l'ordre 3 et le calculer.

Soient la fonction φ définie par

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f_x(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{1+t^x}\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

Q5 — Calculer $\varphi(0)$, $\varphi(1)$ et $\varphi(2)$.

Q6 — Sans utiliser de dérivée, démontrer que la fonction φ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Q7 — Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ tel que $x \leqslant y$. Démontrer

$$\left|\varphi(x) - \varphi(y)\right| \leqslant \int_0^1 t^x - t^y\ \mathrm{d}t \leqslant y - x$$

Q8 — En déduire que la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Q9 — Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

$$1 - \varphi(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t^x}\ \mathrm{d}t$$

Q10 — En majorant l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t^x}\ \mathrm{d}t$, démontrer que $\varphi(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.

Q11 — Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} + x \cdot \int_0^1 \frac{t^x}{(1+t^x)^2}\ \mathrm{d}t$$

Q12 — Démontrer que la fonction φ est dérivable en 0 à droite.

Q13 — Donner l'équation réduite de la demi-tangente au point d'abscisse 0 de la courbe $\mathscr{C}$.

Q14 — À l'aide de **Q10** et d'une intégration par parties, donner un équivalent de $\varphi(x) - 1$ lorsque x tend vers $+\infty$.

§ 2 Primitivation d'une fonction polynôme-exponentielle

Soient $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ *et, pour tout* $k \in [\![0, n]\!]$, f_k *la fonction définie par*

$$f_k \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & x^k \cdot e^{\lambda x} \end{array} \right.$$

On pose

$$E := \mathrm{Vect}\left(f_0, f_1, \ldots, f_n\right)$$

Q15 — Démontrer que $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est une famille libre d'éléments du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$.

Q16 — Justifier que l'application

$$D \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & f' \end{array} \right.$$

est un automorphisme de E. On prendra soin de vérifier le caractère bien défini de D.

Q17 — Justifier que, pour tout $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$, il existe un unique $(b_0, b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que la fonction

$$F \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k x^k\right) \cdot e^{\lambda x} \end{array} \right.$$

est une primitive de la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) \cdot e^{\lambda x} \end{array} \right.$$

Q18 — En déduire une primitive de la fonction

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \cdot e^{-x} \end{array} \right.$$

Q19 — Calculer une primitive de la fonction g définie en **Q18** par une autre méthode relevant uniquement du calcul intégral.

Q20 — Étudier la limite éventuelle de

$$I(A) := \int_0^A x^2 \cdot e^{-x} \, \mathrm{d}x$$

lorsque A tend vers $+\infty$.

Q21 — Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Déterminer deux nombres complexes α_k et β_k tels que

$$D^{-1}(f_k) = \alpha_k \cdot f_k + \beta_k \cdot D^{-1}(f_{k-1})$$

Dans la suite, on suppose $n = 3$.

Q22 — Calculer $D^{-1}(f_0), D^{-1}(f_1), D^{-1}(f_2), D^{-1}(f_3)$.

Q23 — En déduire une primitive de la fonction

$$h \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left(x^3 + x + 1\right) \cdot \sin(2x) \end{array} \right.$$

Q24 — Calculer une primitive de la fonction h définie en **Q23** par une autre méthode relevant uniquement du calcul intégral.

§ 3 Lemme de Riemann-Lebesgue

Soient des réels a, b tels que $a < b$, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. On se propose de démontrer

$$\text{(RL)} \quad \int_a^b f(t)\cdot\sin(nt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad [\textit{lemme de Riemann-Lebesgue}]$$

de plusieurs manières, suivant la régularité de la fonction f. L'idée géométrique derrière ce résultat est la suivante. Lorsque n tend vers $+\infty$, les fonctions $t \longmapsto f(t)\cdot\sin(nt)$ oscillent de plus en plus, ce qui entraîne un phénomène de compensation d'aires algébriques, à l'origine du résultat. On renvoie à l'animation **Geogebra** *pour une illustration de ce phénomène.*

Q25 — Soit $f \in \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{R})$. Démontrer que

$$\int_a^b f(t)\cdot\sin(nt)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

et en déduire (RL).

Q26 — Démontrer (RL) lorsque $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction en escalier.

Q27 — En déduire (RL) lorsque $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Q28 — Démontrer enfin (RL) lorsque $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue par morceaux.

§ 4 Lemme de Farkas

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$. On note $E^* := \mathscr{L}(E,\mathbb{R})$ son dual.

Q29 — Soient g et ψ deux formes linéaires non nulles sur E telles que $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(\psi)$. Démontrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\psi = \lambda \cdot g$.

Q30 — Soit x un vecteur non nul de E. Construire une forme linéaire $f \in E^*$ tel que $f(x) = 1$.

Q31 — Soit $\mathscr{C} = (f_1,\dots,f_n)$ une base de E^*. Démontrer qu'il existe une unique base $\mathscr{B} = (x_1,\dots,x_n)$ de E dont la base duale $\mathscr{B}^* = (x_1^*,\dots,x_n^*)$ coïncide avec $\mathscr{C}$. On pourra commencer par établir que l'application

$$u \left|\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto & (f_1(x),\dots,f_n(x)) \end{array}\right.$$

est un isomorphisme. *La base $\mathscr{B}$ est appelée base antéduale de $\mathscr{C}$.*

Q32 — Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $f_1,\dots,f_p, g$ des formes linéaires sur E. Démontrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

(P1) $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(f_k) \subset \mathrm{Ker}(g)$

(P2) $g \in \mathrm{Vect}(f_1,\dots,f_p)$

Il s'agit d'une version du lemme de Farkas.

Si $f \in E^*$, alors le cône positif de f, noté $C^+(f)$, est défini par

$$C^+(f) := \{x \in E \,:\, f(x) \geqslant 0\}$$

Q33 — Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $g \in E^*$ et $(f_1,\dots,f_p)$ une famille libre d'éléments de E^*. Démontrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

(Q1) $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{p} C^+(f_k) \subset C^+(g)$

(Q2) $\exists (\lambda_1,\dots,\lambda_p) \in (\mathbb{R}_+)^p \quad g = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot f_k$

Il s'agit d'une autre version du lemme de Farkas.

Q34 — Soient $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$ et $C \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Démontrer que

$$C = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \iff \forall x \in \mathbb{R}^n \quad xC = 0$$

Si X est un vecteur colonne de nombres réels, alors on note $X \geqslant 0$ si tous les coefficients de X sont positifs ou nuls.

Q35 — Soient $(n,p) \in \mathbb{N}_{\geqslant 2} \times \mathbb{N}_{\geqslant 2}$, $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ une matrice dont les colonnes $(C_1, \dots, C_p)$ forment une famille libre de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Démontrer qu'un et un seul des deux systèmes d'équations/inéquations suivants possède une solution.

(S1) $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $X \geqslant 0$

(S2) $A^\top Y \geqslant 0$ d'inconnue $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $B^\top Y < 0$

Il s'agit d'une version matricielle du lemme de Farkas qui possède des applications en programmation linéaire et en théorie des jeux.

§ 5 Transposée d'une application

Soient $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $p \geqslant 1$. On note $E^* := \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ le dual de E.

Q36 — Soit A une une partie de E. Démontrer que

$$A^\perp := \left\{ f \in E^* \,:\, \forall a \in A \quad f(a) = 0 \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de E^*.

Q37 — Soit F une sous-espace vectoriel de E. Démontrer

$$F = E \iff F^\perp = \{0_{E^*}\}$$

Q38 — Soit F une sous-espace vectoriel de E. Démontrer

$$F = \{0_E\} \iff F^\perp = E^*$$

Q39 — Soient F un sous-espace vectoriel de E de dimension k. Démontrer que $\dim\left(F^\perp\right) = p - k$.

Soient F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

Q40 — Démontrer que l'application transposée de u, notée $u^\top$ et définie par

$$u^\top \left| \begin{array}{ccc} F^* & \longrightarrow & E^* \\ v & \longmapsto & v \circ u \end{array} \right.$$

est linéaire.

Q41 — Démontrer

$$\mathrm{Ker}(u)^\perp = \mathrm{Im}\left(u^\top\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(u)^\perp = \mathrm{Ker}\left(u^\top\right)$$

Q42 — Qu'en déduire quant aux liens entre l'injectivité/la surjectivité de u et l'injectivité/la surjectivité de $u^\top$?

Q43 — Démontrer

$$\mathrm{Rg}(u) = \mathrm{Rg}\left(u^\top\right)$$

Q44 — Soient $\underline{e} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\underline{f} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F. On note $\underline{e^*} = (e_1^*, \dots, e_p^*)$ la base duale de $\underline{e}$ et $\underline{f^*} = (f_1^*, \dots, f_n^*)$ la base duale de $\underline{f}$. La matrice $\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}(u) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de u relativement aux bases $\underline{e}$ et $\underline{f}$ a pour j-ième colonne les coordonnées du vecteur $u(e_j)$ dans la base $\underline{f}$, pour tout $j \in [\![1,p]\!]$. De même la matrice $\mathrm{Mat}_{\underline{f^*},\underline{e^*}}\left(u^\top\right) \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ de $u^\top$ relativement aux bases $\underline{f^*}$ et $\underline{e^*}$ a pour j-ième colonne les coordonnées du vecteur $u^\top(f_j^*)$ dans la base $\underline{e^*}$, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$. Quel lien existe-t-il entre les matrices $\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}(u)$ et $\mathrm{Mat}_{\underline{f^*},\underline{e^*}}\left(u^\top\right)$?