UN CORRIGÉ DU DEVOIR LIBRE N°15

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $E^* = \mathscr{L}(E,\mathbb{R})$.

L'objectif du problème est de montrer que chaque hyperplan vectoriel de E contient au moins une matrice inversible.

La matrice élémentaire E_{ij} est la matrice de E dont les coefficients sont tous nuls à l'exception de celui qui se trouve sur la i-ème ligne et sur la j-ème colonne, qui vaut 1.

On définit l'application trace par

$$\mathrm{Tr} \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} [M]_{k,k} \end{array} \right.$$

À toute matrice U de E, on associe

$$T_u \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & \mathrm{Tr}(UM) \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad H_U = \{M \in E : \mathrm{Tr}(UM) = 0\}$$

§ 1 GÉNÉRALITÉS

Q1 — Démontrer que Tr est une application linéaire.

Soient $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Nous calculons

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{Tr}\left(\lambda.A+\mu.B\right) & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} [\lambda.A+\mu.B]_{kk} & \\ & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda[A]_{k,k}+\mu[B]_{kk} & \left[\text{définition des opérations sur } \mathscr{M}_n(\mathbb{K})\right] \\ & = & \lambda.\displaystyle\sum_{k=1}^{n} [A]_{kk}+\mu.\sum_{k=1}^{n}[B]_{kk} & \left[\text{linéarité du symbole de sommation}\right] \\ & = & \lambda\,\mathrm{Tr}(A)+\mu\,\mathrm{Tr}(B) & \end{array}$$

Donc $\boxed{\text{l'application Tr est linéaire.}}$

Q2 — Démontrer que, pour tout $U \in E$, $T_U \in E^*$.

Soit $U \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

- L'application T_U a pour source $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et pour but $\mathbb{R}$.
- Soient $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Nous calculons

$$\begin{array}{rcll} T_U\left(\lambda.A+\mu.B\right) & = & \mathrm{Tr}\left(U\left(\lambda.A+\mu.B\right)\right) & \\ & = & \mathrm{Tr}\left(\lambda.UA+\mu.UB\right) & \left[(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),+,.,\times) \text{ est une } \mathbb{R}\text{-algèbre}\right] \\ & = & \lambda.\mathrm{Tr}(UA)+\mu.\mathrm{Tr}(UB) & [\text{Tr est linéaire}] \\ & = & \lambda T_U(A)+\mu T_U(B) & \end{array}$$

- Des deux points précédents, nous déduisons que $\boxed{T_U \text{ est une forme linéaire sur } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$

Q3 — Soit $U \in E$. Reconnaître $\mathrm{Ker}(T_U)$ et démontrer que H_U est un sous-espace vectoriel de E.

- Par définition du noyau d'une application linéaire $\boxed{\mathrm{Ker}(T_U) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) : \mathrm{Tr}(UM) = 0\} = H_U\,.}$
- Comme l'application T_U est linéaire, $T_U\left(0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}\right) = 0$ et donc $0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} \in H_U = \mathrm{Ker}(T_U)$.
- Soient $(A,B)^2 \in H_U$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Nous calculons

$$\begin{array}{rcll} T_U(\lambda.A+\mu.B) & = & \lambda T_U(A)+\mu T_U(B) & [T_U \text{ est linéaire}] \\ & = & 0 & [A,B \in H_U = \mathrm{Ker}(T_U)] \end{array}$$

Nous en déduisons que $\lambda.A+\mu.B \in H_U$.

- Des deux points précédents, nous déduisons que $\boxed{H_U \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$

§ 2 Un exemple

Dans cette partie seulement, on prend $n = 2$, et on pose $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Q4 — Écrire les quatre matrices élémentaires E_{ij}. Que peut-on dire de la famille $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

- Nous listons

$$\boxed{E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

- Soient $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors

$$M = m_{11}E_{11} + m_{12}E_{12} + m_{21}E_{21} + m_{22}E_{22}$$

La famille $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ engendre donc $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- Soient $(m_{11}, m_{12} m_{21}, m_{22}) \in \mathbb{R}^4$ tels que

$$\underbrace{m_{11}E_{11} + m_{12}E_{12} + m_{21}E_{21} + m_{22}E_{22}}_{= \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}} = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$$

Nous en déduisons $m_{11} = m_{12} = m_{21} = m_{22} = 0$. La famille $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ est donc libre.

- Des deux points précédents, nous déduisons que $\boxed{\text{la famille } (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}) \text{ est une base de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$

Q5 — Démontrer que H_U est l'ensemble des matrices de E dont la somme des quatre coefficients vaut 0.

Soit $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Nous calculons

$$UM = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} + m_{12} & m_{11} + m_{12} \\ m_{21} + m_{22} & m_{21} + m_{22} \end{pmatrix}$$

Donc

$$\mathrm{Tr}(UM) = m_{11} + m_{12} + m_{21} + m_{22}$$

Nous en déduisons que $\boxed{H_U = \mathrm{Ker}(T_U) \text{ est l'ensemble des matrices de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ dont la somme des 4 coefficients est nulle.}}$

Q6 — Trouver une matrice M de E telle que $\mathrm{Tr}(UM) \neq 0$ et en déduire la dimension de $\mathrm{Im}(T_U)$, puis la dimension de H_U.

- Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. La somme des 4 coefficients de M vaut $10 \neq 0$. D'après la question précédente, $T_U(M) \neq 0$. ĉadre

Pour $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $T_U(M) \neq 0$.

- L'image $\mathrm{Im}(T_U)$ de l'application linéaire $T_U : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$. D'après le point précédent $\mathrm{Im}(T_U) \neq \{0_{\mathbb{R}}\}$. Nous en déduisons que $\mathrm{Im}(T_U)$ est un sous-espace vectoriel de dimension non nulle de $\mathbb{R}$, qui lui est de dimension 1. Ainsi $\boxed{\dim(\mathrm{Im}(T_U)) = 1.}$
- D'après le théorème du rang $\boxed{\dim(H_U) = \dim(\mathrm{Ker}(T_U)) = 2^2 - 1 = 3.}$

Q7 — Démontrer que H_U possède une matrice inversible.

La matrice $M := \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible car $\det(M) = 1 \neq 0$. Par ailleurs, M appartient à H_U car la somme de ses quatre coefficients vaut 0. Ainsi $\boxed{H_U \text{ possède une matrice inversible.}}$

§ 3 QUELQUES RÉSULTATS UTILES POUR LA SUITE

Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ des éléments de E.

Q8 — Démontrer que $\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ji} b_{ij}$.

Nous calculons

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(AB) &= \sum_{j=1}^{n} [AB]_{jj} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ji} b_{ij} && [\text{définition du produit matriciel}] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ji} b_{ij} \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ji} b_{ij}}$

Q9 — En déduire les identités suivantes.

$$(I_1) \quad \mathrm{Tr}\left(\mathrm{A}^\top \times \mathrm{B}\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij} \qquad\qquad (I_2) \quad \mathrm{Tr}(BA) = \mathrm{Tr}(AB)$$

- D'après la question précédente ($A \leftarrow A^\top$ et $B \leftarrow B$), nous calculons

$$\boxed{\mathrm{Tr}\left(\mathrm{A}^\top \times \mathrm{B}\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left[A^\top\right]_{ji} [B]_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} [A]_{ij} [B]_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}}$$

- D'après la question précédente ($A \leftarrow B$ et $B \leftarrow A$)

$$\boxed{\mathrm{Tr}(BA) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ji} a_{ij} \underset{\substack{i \leftarrow j' \\ j \leftarrow i'}}{=} \sum_{j'=1}^{n} \sum_{i'=1}^{n} b_{i'j'} a_{j'i'} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ji} b_{ij} = \mathrm{Tr}(AB)}$$

Soit U dans E.

Q10 — Si U est la matrice nulle, déterminer $\dim(H_U)$.

Supposons $U = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$. Alors, pour tout $M \in \mathscr{M}_n\mathbb{R}$

$$T_U(M) = \mathrm{Tr}(UM) = \mathrm{Tr}\left(0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}\right) = 0$$

Ainsi, $H_U = \mathrm{Ker}(T_U) = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et donc $\boxed{\text{si } U = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}, \text{ alors } \dim(H_U) = n^2.}$

Q11 — Si U n'est pas la matrice nulle, montrer que l'on peut trouver un couple $(i_0, j_0) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $T_U(E_{i_0 j_0}) \neq 0$. En déduire $\dim(H_U)$.

- Soit $(i_0, j_0) \in [\![1, n]\!]^2$. D'après **Q9**

$$T_U(E_{i_0 j_0}) = \mathrm{Tr}\left(U E_{i_0 j_0}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} [U]_{ji}[E_{i_0 j_0}]_{ij} = [U]_{j_0 i_0}$$

Comme la matrice U n'est pas nulle, un de ses coefficients n'est pas nul. Si nous notons (j_0, i_0) l'adresse d'un tel coefficient, nous déduisons du calcul ci-dessous que $\boxed{T_U(E_{i_0 j_0}) \neq 0.}$

- L'image $\mathrm{Im}(T_U)$ de l'application linéaire $T_U \colon \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$. D'après le point précédent $\mathrm{Im}(T_U) \neq \{0_{\mathbb{R}}\}$. Nous en déduisons que $\mathrm{Im}(T_U)$ est un sous-espace vectoriel de dimension non nulle de $\mathbb{R}$, qui lui est de dimension 1. Ainsi

$$\dim(\mathrm{Im}(T_U)) = 1$$

- D'après le théorème du rang $\boxed{\dim(H_U) = \dim(\mathrm{Ker}(T_U)) = n^2 - 1.}$

Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on note $T_{ij} = T_{E_{ji}}$.

Q12 — Les indices k et ℓ étant fixés dans $[\![1, n]\!]$, calculer $T_{ij}(E_{k\ell})$.

D'après **Q9**

$$T_{ij}(E_{k\ell}) = \mathrm{Tr}\left(E_{ji}E_{k\ell}\right) = \mathrm{Tr}\left(\delta_{i,k}\, E_{j\ell}\right) = \delta_{i,k}\,\delta_{j,\ell}$$

Ainsi, si $i \neq k$ ou $j \neq \ell$, alors

$$T_{ij}(E_{k\ell}) = 0$$

et si $i = k$ et $j = \ell$, alors

$$T_{ij}(E_{k\ell}) = 1$$

Nous en déduisons $\boxed{T_{ij}(E_{k\ell}) = \delta_{ik}\,\delta_{j\ell}.}$

Q13 — En déduire que les n^2 éléments T_{ij} de E^* permettent de définir une base de E^*.

- Soit $(\lambda_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une famille de scalaires telle que

$$(\star) \qquad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} T_{ij} = 0_{E^*}$$

Soit $(k, \ell) \in [\![1, n]\!]^2$. De $(\star)$ et de la question précédente, nous déduisons

$$0 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} T_{ij}(E_{k\ell}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}\,\delta_{ik}\,\delta_{j\ell} = \lambda_{k\ell}$$

La famille $(T_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ d'éléments de E^* est donc libre.

- Comme $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$ est de dimension finie et

$$\dim\left(E^*\right) = \dim(E) \times \dim(\mathbb{R}) = n^2$$

- Comme $n^2 = \dim(E^*)$ est le cardinal de la famille libre $(T_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ d'éléments de E^*

$$\boxed{\text{la famille } (T_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \text{ est une base de } E^*.}$$

Q14 — Démontrer que l'application

$$\varphi \;\left|\; \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E^* \\ U & \longmapsto & T_U \end{array}\right.$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

- Soient $(U_1, U_2) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Les applications

$$\varphi(\lambda_1.U_1 + \lambda_2.U_2) \quad \text{et} \quad \lambda_1.\varphi(U_1) + \lambda_2.\varphi(U_2)$$

ont même source (E) et même but ($\mathbb{R}$). Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Nous calculons

$$\begin{array}{rcll} \varphi(\lambda_1.U_1+\lambda_2.U_2)(M) & = & \mathrm{Tr}\left((\lambda_1.U_1+\lambda_2.U_2)M\right) & \\ & = & \mathrm{Tr}\left(\lambda_1.U_1M+\lambda_2.U_2M\right) & \left[(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),+,.,\times) \text{ est une } \mathbb{R}\text{-algèbre}\right] \\ & = & \lambda_1.\mathrm{Tr}\left(U_1M\right)+\lambda\,\mathrm{Tr}\left(U_2M\right) & \left[\text{l'application Tr est linéaire}\right] \\ & = & \lambda_1.\varphi(U_1)(M)+\lambda_2.\varphi(U_2)(M) & \\ & = & \left(\lambda_1.\varphi(U_1)+\lambda_2.\varphi(U_2)\right)(M) & \end{array}$$

Nous en déduisons que les applications

$$\varphi(\lambda_1.U_1+\lambda_2.U_2) \quad \text{et} \quad \lambda_1.\varphi(U_1)+\lambda_2.\varphi(U_2)$$

sont égales. Ainsi, l'application $\varphi\colon E \longrightarrow E^*$ est linéaire.

- Nous déduisons de **Q11** que $\mathrm{Ker}\left(\varphi\right)=\left\{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\right\}$. L'application φ est donc injective.
- L'application φ est une application linéaire injective entre deux espaces vectoriels de même dimension finie. Ainsi

$$\boxed{\text{l'application } \varphi \text{ est un isomorphisme de } E \text{ sur } E^*.}$$

On considère un hyperplan vectoriel H de E.

Q15 — Quelle est sa dimension? *On attend une démonstration, pas uniquement une citation d'un résultat du cours.*

Comme H est un hyperplan de E, il existe une droite vectorielle D de E telle que $H\oplus D=E$. Avec la formule de Grassmann, nous obtenons $\boxed{\dim(H)=\dim(E)-\dim(D)=n^2-1}$

Soit A une matrice de E qui n'appartient pas à H.

Q16 — Démontrer que : $E=H\oplus \mathrm{Vect}\,(A)$. *On attend une démonstration, pas uniquement une citation d'un résultat du cours.*

- Soit $M\in H\cap \mathrm{Vect}\,(A)$. Alors il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $M=\lambda.A\in H$. Si $\lambda\neq 0_{\mathbb{K}}$, alors :

$$A=\frac{1}{\lambda}.(\lambda.A)=\frac{1}{\lambda}.M\in H$$

ce qui est contraire à l'hypothèse. Ainsi $\lambda=0_{\mathbb{K}}$ et donc $M=0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Nous en déduisons que H et $\mathrm{Vect}\,(A)$ sont en somme directe.

- D'après la formule de Grassmann, en remarquant que $A\neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$:

$$\dim(H\oplus \mathrm{Vect}\,(A))=\dim(H)+\dim(\mathrm{Vect}\,(A))=n^2-1+1=n^2$$

• Nous avons démontré que $H\oplus\mathrm{Vect}\,(A)$ est un sous-espace vectoriel de $E=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $\dim(H\oplus\mathrm{Vect}\,(A))=n^2=\dim(E)$, il vient $\boxed{E=H\oplus\mathrm{Vect}\,(A)}$

Q17 — Construire alors un élément ℓ de E^* tel que $H=\mathrm{Ker}\,(\ell)$.

- Soit $(M_1,\dots,M_{n^2-1})$ une base de H. Nous remarquons que (A) est une base de $\mathrm{Vect}\,(A)$. Comme $E=H\oplus\mathrm{Vect}\,(A)$, la famille $\mathscr{B}=(M_1,\dots,M_{n^2-1},A)$ est une base de E.

• Soit ℓ l'unique application linéaire de E dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\ell(M_1)=\ldots=\ell(M_{n^2-1})=0 \qquad \text{et} \qquad \ell(A)=1$$

- Par construction, $\ell\in E^*$ et comme ℓ est linéaire et nulle sur une base de H, elle est nulle sur H, i.e. $H\subset\mathrm{Ker}\,(\ell)$.
- Soit $M\in\mathrm{Ker}\,(\ell)\subset\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe des scalaires $\lambda_1,\dots,\lambda_{n^2-1},\lambda$ tels que :

$$(\star) \qquad M=\lambda_1.M_1+\ldots+\lambda_{n^2-1}.M_{n^2-1}+\lambda.A$$

Alors :

$$0=\ell(M)=\lambda_1.\ell(M_1)+\ldots+\lambda_{n^2-1}.\ell(M_{n^2-1})+\lambda.\ell(A)=\ell$$

Ainsi l'identité $(\star)$ s'écrit

$$M=\lambda_1.M_1+\ldots+\lambda_{n^2-1}.M_{n^2-1}$$

Nous en déduisons $M \in H$. Nous avons donc démontré $\mathrm{Ker}(\ell) \subset H$.

- Synthétisons les résultats obtenus. $\boxed{\text{La forme linéaire } \ell \text{ sur } E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ vérifie } \mathrm{Ker}(\ell) = H.}$

Q18 — Prouver l'existence d'un élément U de E tel que $H = H_U$.

- D'après la question précédente, il existe $\ell \in E^*$ telle que $\mathrm{Ker}(\ell) = H$.
- D'après **Q14**, il existe une (unique) matrice U de E telle que $T_U = \ell$.
- Grâce **Q3**, $H = \mathrm{Ker}(\ell) = \mathrm{Ker}(T_U) = H_U$.
- Ainsi $\boxed{\text{il existe une matrice } U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } H = H_U.}$

§ 4 Le résultat général

Pour $r \in [\![1, n]\!]$, on note $J_r = \sum_{k=1}^{r} E_{kk}$. Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, *i.e.* $P = (p_{ij})$ *avec* $\begin{cases} p_{i+1\,i} = 1 & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ p_{1\,n} = 1 & \\ p_{i\,j} = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, nous notons X_j le vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont toutes les composantes sont nulles sauf la j-ième qui vaut 1.

Q19 — À l'aide des vecteurs $X_1, \dots, X_n$, calculer, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la matrice P^k.

- Nous savons que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le vecteur colonne AX_j égale la j-ième colonne de A.
- Nous observons que

$$P = (\, X_2 \mid X_3 \mid \dots \mid X_n \mid X_1 \,)$$

donc

$$P^2 = P\,(\, X_2 \mid X_3 \mid \dots \mid X_n \mid X_1 \,) = (\, PX_2 \mid PX_3 \mid \dots \mid PX_n \mid PX_1 \,) = (\, X_3 \mid X_4 \mid \dots \mid X_n \mid X_1 \mid X_2 \,)$$

puis

$$P^3 = P \times (\, X_3 \mid X_4 \mid \dots \mid X_n \mid X_1 \mid X_2 \,) = (\, PX_3 \mid PX_4 \mid \dots \mid PX_n \mid PX_1 \mid PX_2 \,) = (\, X_4 \mid X_5 \mid \dots \mid X_n \mid X_1 \mid X_2 \mid X_3 \,)$$

À l'aide d'une récurrence finie, il vient

$$\boxed{\forall\, k \in [\![1, n-1]\!] \quad P^k = (\, X_{k+1} \mid X_{k+2} \mid \dots \mid X_n \mid X_1 \mid X_2 \mid \dots \mid X_k \,)}$$

Nous en déduisons

$$P^n = P\,(\, X_n \mid X_1 \mid X_2 \mid \dots \mid X_{n-2} \mid X_{n-1} \,) = (\, PX_n \mid PX_1 \mid PX_2 \mid \dots \mid PX_{n-2} \mid PX_{n-1} \,) = (\, X_1 \mid X_2 \mid X_3 \mid \dots \mid X_{n-1} \mid X_n \,)$$

i.e.

$$\boxed{P^n = I_n.}$$

Q20 — En déduire que P est inversible et déterminer son inverse.

D'après la question précédente, $P^{n-1}P = PP^{n-1} = I_n$. Donc $\boxed{\text{la matrice } P \text{ est inversible}}$ et

$$\boxed{P^{-1} = P^{n-1} = (\, X_n \mid X_1 \mid X_2 \mid \dots \mid X_{n-2} \mid X_{n-1} \,).}$$

Q21 — Prouver que P appartient à l'hyperplan H_{J_r}.

- Par définition de H_{J_r}, il s'agit de démontrer que $\mathrm{Tr}(J_r P) = 0$ ou encore $\mathrm{Tr}(PJ_r) = 0$ d'après **Q9**.
- L'assertion est claire pour $r = n$. En effet, dans ce cas $J_r = I_n$ et donc $\mathrm{Tr}(PJ_r) = \mathrm{Tr}(P) = 0$
- Supposons que $r \in [\![1, n-1]\!]$. Nous observons que

$$J_r = (\, X_1 \mid X_2 \mid \dots \mid X_r \mid 0 \mid \dots \mid 0 \,)$$

donc

$$PJ_r = (\, PX_1 \mid PX_2 \mid \dots \mid PX_r \mid 0 \mid \dots \mid 0 \,) = (\, X_2 \mid X_3 \mid \dots \mid X_{r+1} \mid 0 \mid \dots \mid 0 \,)$$

Ainsi les coefficients diagonaux de PJ_r sont tous nuls, ce qui entraîne $\mathrm{Tr}(PJ_r) = 0$.

- D'après les trois points précédents $\boxed{P \in H_{J_r}.}$

Q22 — En déduire que chaque hyperplan vectoriel H de E possède au moins une matrice inversible.

Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- D'après **Q18**, il existe $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $H = H_U$.
- Si $U = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$, alors $\dim(H_U) = n^2$ (**Q10**) et donc $H = H_U$ n'est pas un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (**Q15**). Donc $U \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.
- D'après le cours (cf. C14.110), il existe $r \in [\![1, n]\!]$ et deux matrices S_1 et S_2 de $GL_n(\mathbb{R})$ telles que

$$J_r = S_1\, U\, S_2\, .$$

- Considérons de nouveau la matrice P inversible, qui a été introduite dans cette partie. Grâce à **Q21**

$$\mathrm{Tr}\,(J_r P) = 0$$

- Des deux points précédents, nous déduisons :

$$\mathrm{Tr}\,(S_1\, U\, S_2\, P) = 0\, .$$

Grâce à l'identité (I_2) établie en **Q9**, nous obtenons

$$\mathrm{Tr}\,(U\, S_2\, P\, S_1) = 0$$

et donc la matrice $Q := S_2\, P\, S_1$ appartient à $H_U = H$. La matrice Q est inversible, comme produit de matrices inversibles. Nous avons donc démontré qu' $\boxed{\text{il existe une matrice inversible dans l'hyperplan } H.}$