Devoir Libre n°15

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $E^* = \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$.

L'objectif du problème est de montrer que chaque hyperplan vectoriel de E contient au moins une matrice inversible.

La matrice élémentaire E_{ij} est la matrice de E dont les coefficients sont tous nuls à l'exception de celui qui se trouve sur la i-ème ligne et sur la j-ème colonne, qui vaut 1.

On définit l'application trace par

$$\mathrm{Tr} \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} [M]_{k,k} \end{array} \right.$$

À toute matrice U de E, on associe

$$T_u \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & \mathrm{Tr}(UM) \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad H_U = \{M \in E \,:\, \mathrm{Tr}(UM) = 0\}$$

§ 1 Généralités

Q1 — Démontrer que Tr est une application linéaire.

Q2 — Démontrer que, pour tout $U \in E$, $T_U \in E^*$.

Q3 — Soit $U \in E$. Reconnaître $\mathrm{Ker}(T_U)$ et démontrer que H_U est un sous-espace vectoriel de E.

§ 2 Un exemple

Dans cette partie seulement, on prend $n = 2$, et on pose $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Q4 — Écrire les quatre matrices élémentaires E_{ij}. Que peut-on dire de la famille $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Q5 — Démontrer que H_U est l'ensemble des matrices de E dont la somme des quatre coefficients vaut 0.

Q6 — Trouver une matrice M de E telle que $\mathrm{Tr}(UM) \neq 0$ et en déduire la dimension de $\mathrm{Im}(T_U)$, puis la dimension de H_U.

Q7 — Démontrer que H_U possède une matrice inversible.

§ 3 Quelques résultats utiles pour la suite

Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ des éléments de E.

Q8 — Démontrer que $\mathrm{Tr}(AB) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ji} b_{ij}$.

Q9 — En déduire les identités suivantes.

$$(I_1) \quad \mathrm{Tr}\left(A^\top \times B\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij} \qquad\qquad (I_2) \quad \mathrm{Tr}(BA) = \mathrm{Tr}(AB)$$

Soit U dans E.

Q10 — Si U est la matrice nulle, déterminer $\dim(H_U)$.

Q11 — Si U n'est pas la matrice nulle, montrer que l'on peut trouver un couple $(i_0, j_0) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $T_U(E_{i_0 j_0}) \neq 0$. En déduire $\dim(H_U)$.

Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $T_{ij} = T_{E_{ji}}$.

Q12 — Les indices k et ℓ étant fixés dans $[\![1,n]\!]$, calculer $T_{ij}(E_{k\ell})$.

Q13 — En déduire que les n^2 éléments T_{ij} de E^* permettent de définir une base de E^*.

Q14 — Démontrer que l'application

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E^* \\ U & \longmapsto & T_U \end{array} \right.$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

On considère un hyperplan vectoriel H de E.

Q15 — Quelle est sa dimension? *On attend une démonstration, pas uniquement une citation d'un résultat du cours.*

Soit A une matrice de E qui n'appartient pas à H.

Q16 — Démontrer que : $E = H \oplus \mathrm{Vect}(A)$. *On attend une démonstration, pas uniquement une citation d'un résultat du cours.*

Q17 — Construire alors un élément ℓ de E^* tel que $H = \mathrm{Ker}(\ell)$.

Q18 — Prouver l'existence d'un élément U de E tel que $H = H_U$.

§ 4 Le résultat général

Pour $r \in [\![1,n]\!]$, on note $J_r = \sum_{k=1}^{r} E_{kk}$. Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, *i.e.* $P = (p_{ij})$ *avec* $\begin{cases} p_{i+1\,i} = 1 & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ p_{1\,n} = 1 & \\ p_{ij} = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, nous notons X_j le vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont toutes les composantes sont nulles sauf la j-ième qui vaut 1.

Q19 — À l'aide des vecteurs $X_1, \dots, X_n$, calculer, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, la matrice P^k.

Q20 — En déduire que P est inversible et déterminer son inverse.

Q21 — Prouver que P appartient à l'hyperplan H_{J_r}.

Q22 — En déduire que chaque hyperplan vectoriel H de E possède au moins une matrice inversible.