UN CORRIGÉ DU DEVOIR LIBRE N°14

Soit un entier $n \geqslant 2$. On considère l'équation

$$(E_n) \qquad 2 \cdot n \cdot \tan(x) = \tan(n \cdot x)$$

d'inconnue $x \in \left]0, \frac{\pi}{2n}\right[$. *On note*

$$\mathrm{Sol}_n := \left\{x \in \left]0, \frac{\pi}{2n}\right[\ : \ 2 \cdot n \cdot \tan(x) = \tan(n \cdot x)\right\}$$

l'ensemble solution de (E_n).

Q1 — Démontrer qu'il existe $\delta_n \in \left]0, \frac{\pi}{2n}\right[$ tel que $\mathrm{Sol}_n \cap]0, \delta_n[= \emptyset$.

Introduisons la fonction

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \left[0, \frac{\pi}{2n}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2 \cdot n \cdot \tan(x) - \tan(n \cdot x) \end{array} \right.$$

Comme pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2n}\right[$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $n \cdot x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, la fonction f_n est bien définie. Elle est en outre de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2n}\right[$ par théorème d'opérations.

Le sujet propose d'étudier les racines de la fonction f_n, plus exactement sa plus petite racine strictement positive, en commençant par démontrer qu'une telle existe.

Il est classique d'étudier les variations de la fonction f_n, à l'aide du calcul différentiel, pour en déduire des propriétés des racines de f_n (e.g. leur nombre), grâce au théorème de la bijection appliqué de manière idoine (sur plusieurs intervalles le cas échéant). Le calcul de la dérivée de f_n donne

$$\forall\, x \in \left[0, \frac{\pi}{2n}\right[\quad f_n'(x) = 2n(1 + \tan^2(x)) - n(1 + \tan^2(nx)) = n \cdot \left(1 + 2 \cdot \tan^2(x) - \tan^2(n \cdot x)\right)$$

et étudier le signe de cette quantité paraît fort délicat. C'est au fond ici que réside la difficulté et le charme du sujet. À l'aide d'un traceur, on peut cependant conjecturer que f_n a une unique racine strictement positive pour $n \in [\![2, 10]\!]$.

Dans cette question, nous cherchons à démontrer qu'il existe $\delta_n \in \left]0, \frac{\pi}{2n}\right[$ tel que la fonction f_n ne s'annule pas sur l'intervalle $]0, \delta_n[$, sachant qu'une étude du signe de la dérivée f_n paraît hors de portée. Comme

$$f_n'(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} n > 0$$

il existe $\delta_n > 0$ tel que

$$\forall\, x \in \left[0, \frac{\pi}{2n}\right[\cap [0, \delta_n[\quad f_n'(x) > 0$$

Quitte à remplacer δ_n par $\min\left\{\delta_n, \frac{\pi}{4n}\right\}$, nous pouvons supposer $\delta_n \in \left]0, \frac{\pi}{2n}\right[$ et ainsi obtenir

$$\forall\, x \in [0, \delta_n[\quad f_n'(x) > 0$$

La fonction f_n est donc strictement croissante sur l'intervalle $[0, \delta_n[$ et comme elle est nulle en 0, il vient

$$\forall\, x \in \ ]0, \delta_n[\quad f_n(x) > 0$$

$\boxed{\text{La fonction } f_n \text{ ne s'annule donc pas sur }]0, \delta_n[.}$

Q2 — Démontrer que $\mathrm{Sol}_n \neq \emptyset$.

D'après Q1, $f_n\left(\frac{\delta_n}{2}\right) > 0$. Comme $f_n(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $\frac{\pi}{2n}$ par valeurs inférieures, il existe $\gamma_n \in \left]\frac{\delta_n}{2}, \frac{\pi}{2n}\right[$ tel que $f_n(\gamma_n) < 0$.

La fonction f_n est continue sur le segment $\left[\frac{\delta_n}{2}, \gamma_n\right]$ prend des valeurs de signes opposés aux extrémités. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction f_n s'annule au moins une fois sur

$$\left[\frac{\delta_n}{2}, \gamma_n\right] \subset \left]0, \frac{\pi}{2n}\right[$$

et donc $\boxed{\mathrm{Sol}_n \neq \emptyset.}$

Q3 — Justifier l'existence de $x_n = \inf(\mathrm{Sol}_n)$.

La partie Sol_n de $\mathbb{R}$ est non vide (**Q2**) et minorée par 0. D'après la propriété de la borne inférieure, $\boxed{\inf(\mathrm{Sol}_n) \text{ existe dans } \mathbb{R}.}$

Q4 — Démontrer que $x_n \in \mathrm{Sol}_n$.

- Un minorant de l'ensemble
$$\mathrm{Sol}_n \subset \left]0, \frac{\pi}{2n}\right[$$
est strictement inférieur à $\frac{\pi}{2n}$. En particulier, $x_n < \frac{\pi}{2n}$. D'après 1, le nombre δ_n minore Sol_n et donc $0 < \delta_n \leqslant x_n$. Ainsi
$$\boxed{0 < x_n < \frac{\pi}{2n}}$$
- D'après la caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe une suite $\left(x_{n,p}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ de points de Sol_n telle que
$$x_{n,p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} x_n$$
Comme, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $x_{n,p} \in \mathrm{Sol}_n$
$$(\star) \qquad f_n\left(x_{n,p}\right) = 0$$
Comme la fonction f est continue en $x_n \in \left]0, \frac{\pi}{2n}\right[$, il vient en faisant tendre p vers $+\infty$ dans $(\star)$
$$\boxed{f_n(x_n) = 0}$$
- D'après les deux points précédents, $\boxed{x_n \in \mathrm{Sol}_n.}$

Nous nous proposons de trouver un développement asymptotique de x_n, avec précision $\frac{1}{n^3}$, lorsque n tend vers $+\infty$.

Q5 — Démontrer que l'équation
$$2 \cdot x = \tan(x)$$
d'inconnue $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ possède une unique solution ℓ et que $\ell \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$.

La fonction
$$g \;\left|\; \begin{array}{ccc} \left]0, \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2\cdot x - \tan(x) \end{array}\right.$$
est bien définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ par théorème d'opérations sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Nous calculons
$$\forall\, x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\quad g'(x) = 1 - \tan^2(x) = (1 - \tan(x)) \cdot \underbrace{(1 + \tan(x))}_{>0}$$
Comme la fonction tan est strictement croissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et prend la valeur 1 en $\frac{\pi}{4}$, il vient

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}-1$	$\searrow$	$-\infty$

- La fonction f est strictement croissante et continue sur l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$. Elle induit donc une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ sur

$$\left]\lim_{x\to 0^-} g(x), g\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \left]0, \frac{\pi}{2}-1\right] \not\ni 0$$

$\boxed{\text{L'équation } f(x)=0 \text{ n'a donc aucune solution sur } \left]0, \frac{\pi}{4}\right].}$

- La fonction f est strictement décroissante et continue sur l'intervalle $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$. Elle induit donc une bijection de $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur

$$\left]\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} g(x), \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{4}\right)^+} g(x)\right[= \left]-\infty, \frac{\pi}{2}-1\right[\ni 0$$

$\boxed{\text{L'équation } f(x)=0 \text{ possède donc une unique solution, notée } \ell, \text{ sur } \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[.}$

Nous introduisons la fonction φ définie par

$$\varphi \;\middle|\; \begin{array}{ccc} \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2\cdot x - \tan(x) \end{array}$$

Q6 — Démontrer que la fonction φ induit une bijection

$$\widetilde{\varphi} \;\middle|\; \begin{array}{ccc} \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \varphi\left(\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\right) \\ x & \longmapsto & 2\cdot x - \tan(x) \end{array}$$

et déterminer $\varphi\left(\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$.

Le résultat a été établi à la question précédente où nous avons de plus établi que $\boxed{\varphi\left(\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \left]-\infty, \frac{\pi}{2}-1\right[.}$

Nous notons ψ l'application réciproque de la fonction $\widetilde{\varphi}$.

Q7 — Démontrer que la fonction ψ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\varphi\left(\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$.

La fonction

$$\widetilde{\varphi} \;\middle|\; \begin{array}{ccc} \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \left]-\infty, \frac{\pi}{2}-1\right[\\ x & \longmapsto & 2\cdot x - \tan(x) \end{array}$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ et bijective. Comme

$$\forall\, x \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\quad \widetilde{\varphi}'(x) = (1-\tan(x))\cdot(1+\tan(x)) \neq 0$$

la fonction réciproque de $\widetilde{\varphi}$, notée ψ, est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left]-\infty, \frac{\pi}{2}-1\right[$ (cf. C15.164).

Q8 — Donner le $\mathrm{DL}_1(0)$ de ψ.

Comme la fonction ψ est dérivable en $0 \in \left]-\infty, \frac{\pi}{2} - 1\right[$ (**Q7**)

$$\psi(x) \underset{x\to 0}{=} \psi(0) + \psi'(0) \cdot x + \mathrm{o}(x)$$

Nous avons $\psi(0) = \ell$ et d'après le cours

$$\psi'(0) = \frac{1}{\widetilde{\varphi}'(\psi(0))} = \frac{1}{\widetilde{\varphi}'(\ell)} = \frac{1}{1 - \tan^2(\ell)} = \frac{1}{1 - 4 \cdot \ell^2} \qquad [\text{car } 2 \cdot \ell - \tan(\ell) = 0]$$

Ainsi

$$\boxed{\psi(x) \underset{x\to 0}{=} \ell + \frac{x}{1 - 4 \cdot \ell^2} + \mathrm{o}(x)}$$

Q9 — Démontrer que $x_n \in \left]\frac{\pi}{4n}, \frac{\pi}{2n}\right[$.

Il reste à démontrer que $x_n > \frac{\pi}{4n}$. Reprenons l'étude proposée en **Q1**, pour la raffiner. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
0 < x \leqslant \frac{\pi}{4n} \quad &\Longrightarrow \quad 0 < n \cdot x \leqslant \frac{\pi}{4} && [n > 0] \\
&\Longrightarrow \quad 0 < \tan(n \cdot x) \leqslant 1 && \left[\text{la fonction tan est strictement croissante sur } \left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right] \\
&\Longrightarrow \quad 0 < \tan^2(n \cdot x) \leqslant 1 && [\text{la fonction carré est strictement croissante sur } [0,1]] \\
&\Longrightarrow \quad f_n'(x) = n \cdot \left(1 + 2 \cdot \tan^2(x) - \tan^2(n \cdot x)\right) > 0 && \left[\tan(x)^2 > 0\right]
\end{aligned}$$

Nous en déduisons que la fonction f_n, qui est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{4n}\right]$, est strictement croissante sur ce segment. Comme elle est nulle en 0, nous en déduisons que

$$\forall\, x \in \left]0, \frac{\pi}{4n}\right] \quad f_n(x) > 0$$

et donc f_n n'a aucune racine dans l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{4n}\right]$. Comme x_n est une racine de f_n dans l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2n}\right[$ (**Q4**) il vient

$$\boxed{\frac{\pi}{4n} < x_n < \frac{\pi}{2n}.}$$

Q10 — En déduire que $2 \cdot n \cdot x_n - \tan(n \cdot x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Comme $x_n \in \mathrm{Sol}_n$ (**Q4**)

$$2 \cdot n \cdot \tan(x_n) = \tan(n \cdot x_n)$$

donc

$$(\star) \qquad = 2 \cdot n \cdot x_n - \tan(n \cdot x_n) = 2 \cdot n \cdot (x_n - \tan(x_n))$$

De **Q9** et du théorème d'encadrement nous déduisons que

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

puis, grâce au $\mathrm{DL}_3(0)$

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}\left(x^3\right)$$

que

$$(\star\star) \qquad \tan(x_n) \underset{x\to 0}{=} x_n + \frac{x_n^3}{3} + \mathrm{o}\left(x_n^3\right)$$

D'après $(\star)$ et $(\star\star)$ il vient

$$2 \cdot n \cdot x_n - \tan(n \cdot x_n) = -\frac{2}{3} \cdot n \cdot \left(x_n^3 + \mathrm{o}\left(x_n^3\right)\right) = -\frac{2}{3} \cdot n \cdot x_n \cdot \left(x_n^2 + \mathrm{o}\left(x_n^2\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2}{3} \cdot n \cdot x_n \cdot x_n^2$$

Puisque la suite $(x_n \cdot n)_{n \geqslant 2}$ est bornée (**Q9**), nous en déduisons $\boxed{2 \cdot n \cdot x_n - \tan(n \cdot x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.}$

Q11 — En exprimant $n \cdot x_n$ à l'aide de la fonction ψ, démontrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ell}{n}$.

D'après **Q9**

$$n \cdot x_n \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$$

et d'après **Q10**

$$\widetilde{\varphi}(n \cdot x_n) = 2 \cdot n \cdot x_n - \tan(n \cdot x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 = \widetilde{\varphi}(\ell)$$

La fonction ψ (**Q7**) est continue sur $\left]-\infty, \dfrac{\pi}{2} - 1\right[$, intervalle qui contient tous les $\widetilde{\varphi}(n \cdot x_n)$ et 0. Par caractérisation séquentielle de la continuité, il vient

$$n \cdot x_n = \psi\left(\widetilde{\varphi}(n \cdot x_n)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \psi(0) = \psi\left(\widetilde{\varphi}(\ell)\right) = \ell$$

Ainsi $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ell}{n}$, i.e.

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ell}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \left[\text{DA de } x_n \text{ à la précision } \frac{1}{n}\right]}$$

Q12 — Démontrer qu'il existe une constante α, que l'on exprimera en fonction de ℓ, telle que

$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\ell}{n} + \frac{\alpha}{n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

La stratégie est classique : nous recherchons un équivalent de $x_n - \dfrac{\ell}{n}$.

Rappelons qu'en **Q10** nous avons établi

$$\widetilde{\varphi}(n \cdot x_n) = 2 \cdot n \cdot x_n - \tan(n \cdot x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2}{3} \cdot n \cdot x_n^3$$

D'après **Q11**, il vient

$$\widetilde{\varphi}(n \cdot x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2 \cdot \ell^3}{3} \cdot \frac{1}{n^2}$$

i.e.

$$\widetilde{\varphi}(n \cdot x_n) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{2 \cdot \ell^3}{3} \cdot \frac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Nous en déduisons

$$n \cdot x_n \underset{n\to+\infty}{=} \psi\left(-\frac{2 \cdot \ell^3}{3} \cdot \frac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

Comme $-\dfrac{2 \cdot \ell^3}{3} \cdot \dfrac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ nous pouvons apppliquer **Q8** pour obtenir

$$n \cdot x_n \underset{n\to+\infty}{=} \ell + \frac{1}{1 - 4 \cdot \ell^2} \cdot \left(-\frac{2 \cdot \ell^3}{3}\right) \cdot \frac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ainsi

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\ell}{n} + \frac{2 \cdot \ell^3}{12 \cdot \ell^2 - 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)}$$