

DEVOIR LIBRE N°14

Pour le vendredi 24 mars

Soit un entier $n \geq 2$. On considère l'équation

$$(E_n) \quad 2 \cdot n \cdot \tan(x) = \tan(n \cdot x)$$

d'inconnue $x \in \left]0, \frac{\pi}{2n}\right[$. On note

$$\text{Sol}_n := \left\{ x \in \left]0, \frac{\pi}{2n}\right[: 2 \cdot n \cdot \tan(x) = \tan(n \cdot x) \right\}$$

l'ensemble solution de (E_n) .

Q1 — Démontrer qu'il existe $\delta_n \in \left]0, \frac{\pi}{2n}\right[$ tel que $\text{Sol}_n \cap \left]0, \delta_n\right[= \emptyset$.

Q2 — Démontrer que $\text{Sol}_n \neq \emptyset$.

Q3 — Justifier l'existence de $x_n = \inf(\text{Sol}_n)$.

Q4 — Démontrer que $x_n \in \text{Sol}_n$.

Nous nous proposons de trouver un développement asymptotique de x_n , avec précision $\frac{1}{n^3}$, lorsque n tend vers $+\infty$.

Q5 — Démontrer que l'équation

$$2 \cdot x = \tan(x)$$

d'inconnue $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ possède une unique solution ℓ et que $\ell \in \left] \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[$.

Nous introduisons la fonction φ définie par

$$\varphi \left| \begin{array}{l} \left] \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2 \cdot x - \tan(x) \end{array} \right.$$

Q6 — Démontrer que la fonction φ induit une bijection

$$\tilde{\varphi} \left| \begin{array}{l} \left] \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[\longrightarrow \varphi \left(\left] \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[\right) \\ x \longmapsto 2 \cdot x - \tan(x) \end{array} \right.$$

et déterminer $\varphi \left(\left] \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[\right)$.

Nous notons ψ l'application réciproque de la fonction $\tilde{\varphi}$.

Q7 — Démontrer que la fonction ψ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $\varphi \left(\left] \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[\right)$.

Q8 — Donner le $DL_1(0)$ de ψ .

Q9 — Démontrer que $x_n \in \left] \frac{\pi}{4n}, \frac{\pi}{2n} \right[$.

Q10 — En déduire que $2 \cdot n \cdot x_n - \tan(n \cdot x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Q11 — En exprimant $n \cdot x_n$ à l'aide de la fonction ψ , démontrer que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ell}{n}$.

Q12 — Démontrer qu'il existe une constante α , que l'on exprimera en fonction de ℓ , telle que

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ell}{n} + \frac{\alpha}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$