Un corrigé du Devoir Libre n°13

§ 1 Polynômes de Tchebychev

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n par

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(n \operatorname{Arccos}(x)) \end{array} \right.$$

Q1 — Calculer f_0, f_1, f_2 et f_3.

- On commence par rappeler que la fonction Arccos: $[-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$ est la fonction réciproque de la fonction bijective

$$\cos_{|[0,\pi]}^{[-1,1]} \left| \begin{array}{ccc} [0,\pi] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array} \right.$$

Donc pour tout $y \in [-1,1]$, $\operatorname{Arccos}(y)$ est l'unique $x \in [0,\pi]$ tel que $\cos(x) = y$. En particulier

$$\forall\, y \in [-1,1] \quad \cos(\operatorname{Arccos}(y)) = y$$

- Soit $y \in [-1,1]$.

$$\begin{aligned} f_0(y) &= \cos\left(0 \times \operatorname{Arccos}(y)\right) = \cos(0) = 1 \\ f_1(y) &= \cos\left(1 \times \operatorname{Arccos}(y)\right) = \cos\left(\operatorname{Arccos}(y)\right) = y \\ f_2(y) &= \cos\left(2\operatorname{Arccos}(y)\right) = 2\cos^2(\operatorname{Arccos}(y)) - 1 = 2y^2 - 1 \end{aligned}$$

- Pour calculer f_2, nous avons exprimé $\cos(2x)$ à l'aide d'un polynôme en $\cos(x)$, pour $x \in \mathbb{R}$. Pour le calcul de f_3, nous allons d'abord chercher à exprimer $\cos(3x)$ à l'aide d'un polynôme en $\cos(x)$, pour $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \cos(3x) &= \operatorname{Re}\left(e^{i3x}\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\left(e^{ix}\right)^3\right) \\ &= \operatorname{Re}\left((\cos(x) + i\sin(x))^3\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\cos^3(x) + 3i\cos^2(x)\sin(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) - i\sin^3(x)\right) \\ &= \cos^3(x) - 3\cos(x)\left(1 - \cos^2(x)\right) \\ &= 4\cos^3(x) - 3\cos(x) \end{aligned}$$

Nous en déduisons que, pour tout $y \in [-1,1]$

$$f_3(y) = \cos\left(3\operatorname{Arccos}(y)\right) = 4\cos^3(\operatorname{Arccos}(y)) - 3\cos(\operatorname{Arccos}(y)) = 4y^3 - 3y$$

- Conclusion.

$$\boxed{\forall\, y \in [-1,1] \qquad f_0(y) = 1 \quad , \quad f_1(y) = y \quad , \quad f_2(y) = 2y^2 - 1 \quad , \quad f_3(y) = 4y^3 - 3y}$$

Q2 — Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-1,1]$. Exprimer $f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x)$ en fonction de $f_n(x)$.

- Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. À l'aide d'une formule d'Euler et de la transformation de l'angle moitié, nous calculons

$$(\star) \quad \cos(u) + \cos(v) = \operatorname{Re}\left(e^{iu} + e^{iv}\right) = \operatorname{Re}\left(e^{i\frac{u+v}{2}}\left(e^{i\frac{u-v}{2}} + e^{i\frac{v-u}{2}}\right)\right) = \operatorname{Re}\left(2\cos\left(\frac{u-v}{2}\right)e^{i\frac{u+v}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{u-v}{2}\right)\cos\left(\frac{u+v}{2}\right)$$

- Nous en déduisons

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x) &= \cos((n+1)\operatorname{Arccos}(x)) + \cos((n-1)\operatorname{Arccos}(x)) \\ &= 2\cos(n\operatorname{Arccos}(x))\cos(\operatorname{Arccos}(x)) \\ &= 2x f_n(x). \end{aligned}$$

Donc $\boxed{f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x) = 2x f_n(x)}$

Q3 — Soient $n \in \mathbb{N}$. Démontrer qu'il existe un unique polynôme T_n de $\mathbb{R}[X]$ dont la fonction polynomiale associée coïncide avec f_n sur $[-1,1]$.

• <u>Première démonstration de l'existence</u> Nous raisonnons par récurrence à deux pas, en exploitant la relation de récurrence obtenue en **Q2**.

— Définition du prédicat. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous définissons le prédicat $\mathscr{P}(n)$ en la variable n par

$\mathscr{P}(n)$: il existe un polynôme T_n de $\mathbb{R}[X]$ dont la fonction polynomiale associée coïncide avec f_n sur $[-1,1]$

— Initialisation à $n=0$ et à $n=1$. D'après **Q1**, pour tout $x \in [-1,1]$, $f_0(x)=1$ et $f_1(x)=x$. Donc en posant $T_0=1$ et $T_1=X$, nous établissons que $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont vraies.

— Hérédité. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1 tel que $\mathscr{P}(n-1)$ et $\mathscr{P}(n)$ sont vraies. Ainsi existe-t-il $T_{n-1}, T_n \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$\forall\, x \in [-1,1], \quad f_{n-1}(x) = T_{n-1}(x) \ \text{ et } \ f_n(x) = T_n(x)$$

D'après la question 2 et l'hypothèse de récurrence

$$\forall\, x \in [-1,1], \quad f_{n+1}(x) = 2xf_n(x) - f_{n-1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Donc, en posant

$$T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1} \in \mathbb{R}[X]$$

il vient

$$\forall\, x \in [-1,1], \quad f_{n+1}(x) = T_{n+1}(x).$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

— Conclusion. D'après l'initialisation à $n=0$ et $n=1$, l'hérédité et l'axiome de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme T_n de $\mathbb{R}[X]$ dont la fonction polynomiale associée coïncide avec f_n sur $[-1,1]$.

• <u>Deuxième démonstration de l'existence</u> Nous généralisons l'approche choisie pour expliciter f_3 en **Q1**.
D'après la question 1, $T_0 = 1 \in \mathbb{R}[X]$ convient. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\cos(nx) &= \mathrm{Re}\left(e^{inx}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\left(e^{ix}\right)^n\right) \\
&= \mathrm{Re}\left((\cos(x) + i\sin(x))^n\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k \sin^k(x)\cos^{n-k}(x)\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2k} i^{2k}\sin^{2k}(x)\cos^{n-2k}(x) + \sum_{k=0}^{E((n-1)/2)} \binom{n}{2k+1} i^{2k+1}\sin^{2k+1}(x)\cos^{n-2k-1}(x)\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2k} (-1)^k\sin^{2k}(x)\cos^{n-2k}(x) + i\sum_{k=0}^{E((n-1)/2)} \binom{n}{2k+1} (-1)^k\sin^{2k+1}(x)\cos^{n-2k-1}(x)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2k} (-1)^k \sin^{2k}(x)\cos^{n-2k}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2k} (-1)^k (1-\cos^2(x))^k\cos^{n-2k}(x)
\end{aligned}$$

Donc en posant

$$T_n := \sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2k} (-1)^k (1-X^2)^k X^{n-2k} \in \mathbb{R}[X]$$

il vient, pour tout $y \in [-1,1]$

$$\begin{aligned} T_n(y) &= \sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2k} (-1)^k (1-y^2)^k y^{n-2k} \\ &= \sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2k} (-1)^k (1-\cos^2(\operatorname{Arccos}(y))^k \cos^{n-2k}(\operatorname{Arccos}(y)) \\ &= \cos(n \operatorname{Arccos}(y)) \\ &= f_n(y) \end{aligned}$$

Donc le polynôme T_n précédemment défini convient.

- Démonstration de l'unicité Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $P_n, Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$\forall x \in [-1,1], \quad P_n(x) = f_n(x) = Q_n(x).$$

Alors tout élément de $[-1,1]$ est racine du polynôme $P_n - Q_n$. Le polynôme $P_n - Q_n$ possède une infinité de racines ; il est donc nul. Ainsi $P_n = Q_n$ et le polynôme T_n est donc unique.

- Conclusion

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme T_n de $\mathbb{R}[X]$ dont la fonction polynomiale associée coïncide avec f_n sur $[-1\,;\,1]$. En outre, il ressort de notre démonstration que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$$

et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$T_n = \sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2k} (-1)^k (1-X^2)^k X^{n-2k}$$

cette dernière identité valant aussi pour $n = 0$.

Q4 — Soient $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme T_n.

- Comme $T_0 = 1$, le polynôme T_0 est de degré 0 et de coefficient dominant 1.
- Nous déduisons de **Q1**

$$T_1 = X \qquad T_2 = 2X^2 - 1 \qquad T_3 = 4X^3 - 3X.$$

Ainsi, conjecturons-nous

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \deg(T_n) = n \;\text{ et }\; \operatorname{dom}(T_n) = 2^{n-1}$$

- Première solution Nous exploitons la relation de récurrence

$$(\star) \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$$

établie à la question précédente pour démontrer la conjecture. Nous raisonnons par récurrence à deux pas.

— Définition du prédicat
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous définissons le prédicat $\mathscr{P}(n)$ en la variable n par

$$\mathscr{P}(n) \quad : \quad \deg(T_n) = n \;\text{ et }\; \operatorname{dom}(T_n) = 2^{n-1}$$

— Initialisation à $n = 1$ et à $n = 2$
Nous savons $T_1 = X$ et $T_2 = 2X^2 - 1$. Donc $\deg(T_1) = 1$, $\operatorname{dom}(T_1) = 1$, $\deg(T_2) = 2$, $\operatorname{dom}(T_1) = 2$. Donc $\mathscr{P}(1)$ et $\mathscr{P}(2)$ sont vraies.

— Hérédité
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 tel que $\mathscr{P}(n-1)$ et $\mathscr{P}(n)$ sont vraies. Ainsi

$$\deg(T_{n-1}) = n-1 \qquad \operatorname{dom}(T_{n-1}) = 2^{n-2} \qquad \deg(T_n) = n \qquad \operatorname{dom}(T_n) = 2^{n-1}$$

Donc il existe $R_{n-1} \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$ et $R_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tels que :

$$T_{n-1} = 2^{n-2}X^{n-1} + R_{n-1} \qquad T_n = 2^{n-1}X^n + R_n.$$

D'après la relation de récurrence ($\star$)

$$T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1} = 2^n X^{n+1} + \underbrace{2XR_n}_{\in\mathbb{R}_n[X]} - \underbrace{2^{n-2}X^{n-1}}_{\in\mathbb{R}_{n-1}[X]} - \underbrace{R_{n-1}}_{\in\mathbb{R}_{n-2}[X]}.$$

Nous en déduisons $\deg(T_{n+1}) = n+1$ et $\mathrm{dom}(T_{n+1}) = 2^n$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

— Conclusion
D'après l'initialisation à $n=1$ et $n=2$, l'hérédité et l'axiome de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\deg(T_n) = n$ et $\mathrm{dom}(T_n) = 2^{n-1}$.

- Deuxième solution Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Nous nous appuyons sur l'identité

$$T_n = \sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2k} (-1)^k \underbrace{(1-X^2)^k X^{n-2k}}_{\deg=n,\,\mathrm{dom}=(-1)^k}$$

établie à la question précédente. Nous en déduisons que $\deg(T_n) \leqslant n$ et que le coefficient de degré n de T_n est

$$c_n := \sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2k} (-1)^k (-1)^k = \sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2k}$$

Nous calculons

$$\begin{aligned}
2^n = (1+1)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2k} + \sum_{k=0}^{E((n-1)/2)} \binom{n}{2k+1} \\
0^n = (1+(-1))^n &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{E(n/2)} (-1)^{2k} \binom{n}{2k} + \sum_{k=0}^{E((n-1)/2)} (-1)^{2k+1} \binom{n}{2k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2k} - \sum_{k=0}^{E((n-1)/2)} \binom{n}{2k+1}
\end{aligned}$$

En sommant membre à membre ces deux identités, il vient

$$2^n = 2 \sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2k} = 2c_n$$

Comme $c_n \neq 0$ et $\deg(T_n) \leqslant n$, nous obtenons $\deg(T_n) = n$ et $\mathrm{dom}(T_n) = c_n = \dfrac{2^n}{2} = 2^{n-1}$.

- Conclusion

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad \deg(T_n) = n \text{ et } \mathrm{dom}(T_n) = 2^{n-1}}$$

Q5 — Soient $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que le polynôme T_n possède n racines réelles deux-à-deux distinctes, toutes dans $]-1,1[$. On explicitera ces n racines.

- Le polynome T_n est de degré n. Il possède donc au plus n racines réelles.
- Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, posons

$$x_k := \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$$

Nous observons

$$0 < x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < \pi.$$

La fonction cos étant strictement décroissante sur l'intervalle $[0,\pi]$, nous en déduisons :

$$-1 < \cos(x_{n-1}) < \ldots < \cos(x_1) < \cos(x_0) < 1.$$

Les nombres $\cos(x_k)$, $k \in [\![0, n-1]\!]$, sont donc deux-à-deux distincts.

- Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$.

$$\begin{array}{rcll} T_n(\cos(x_k)) & = & f_n(\cos(x_k)) & [\cos(x_k) \in [-1,1]] \\ & = & \cos(n \operatorname{Arccos}(\cos(x_k))) & \\ & = & \cos(n\, x_k) & [\forall\, x \in [0,\pi]\ \operatorname{Arccos}(\cos(x)) = x \text{ et } x_k \in [0,\pi]] \\ & = & \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) & \\ & = & 0 & \end{array}$$

Donc les n réels $\cos(x_0), \ldots, \cos(x_{n-1}), \cos(x_n)$ deux-à-deux distincts, appartenant à $]-1;1[$, sont racines de T_n.
- Conclusion

Le polynôme T_n possède n racines réelles distinctes, toutes comprises dans l'intervalle $]-1,1[$. Il s'agit des nombres :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) \text{ où } k \in [\![0, n-1]\!].$$

§ 2 Théorème de Lucas dans $\mathbb{R}$

Nous souhaitons démontrer la version réelle d'un théorème de Lucas, qui s'énonce comme suit.

Théorème de Lucas dans $\mathbb{R}$ — *Soit un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que*
- *(H1) de degré supérieur ou égal à 2*
- *(H2) scindé sur $\mathbb{R}$*

Alors
- *(C1) le polynôme P' est scindé sur $\mathbb{R}$*
- *(C2)* $\operatorname{Spec}_{\mathbb{R}}(P') \subset \left[\min\left(\operatorname{Spec}_{\mathbb{R}}(P)\right), \max\left(\operatorname{Spec}_{\mathbb{R}}(P)\right)\right]$.

Dans les questions **Q6**, **Q7**, **Q8**, *nous établissons des résultats généraux, utiles pour répondre à notre problématique, mais qui ont un intérêt propre. Ensuite, nous scindons l'étude en quatre parties.*

(a) P est scindé sur $\mathbb{R}$, de degré supérieur ou égal à 2, avec une unique racine réelle.

(b) P est scindé sur $\mathbb{R}$, de degré supérieur ou égal à 2, avec au moins deux racines réelles, toutes simples.

(c) P est scindé sur $\mathbb{R}$, de degré supérieur ou égal à 2, avec au moins deux racines réelles, toutes multiples.

(d) P est scindé sur $\mathbb{R}$, de degré supérieur ou égal à 2, avec au moins deux racines réelles, certaines simples et d'autres multiples.

Q6 — Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ une racine de P de multiplicité $m \geqslant 2$. Démontrer que α est racine de P' et que $\operatorname{mult}(\alpha, P') = m-1$.

Q7 — Soient A, B, C des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que $A = BC$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ une racine de A qui n'est pas racine de B. Démontrer que α est racine de C et que $\operatorname{mult}(\alpha, A) = \operatorname{mult}(\alpha, C)$.

Q8 — Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme possédant $r \in \mathbb{N}^*$ racines deux-à-deux distinctes $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ dans $\mathbb{K}$. On note, pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, $m_k := \operatorname{mult}(\alpha_k, P)$. Démontrer qu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$\left\{\begin{array}{l} P = Q \displaystyle\prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k} \\ \text{et} \\ \alpha_1, \ldots, \alpha_r \text{ ne sont pas racines de } Q \end{array}\right.$$

On pourra raisonner par récurrence finie sur le nombre de racines deux-à-deux distinctes de P.

Q9 — Soit un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré $n \geqslant 2$, scindé sur $\mathbb{R}$, ne possédant qu'une racine réelle. Ainsi, si α désigne l'unique racine réelle de P

$$P = \operatorname{dom}(P) \cdot (X - \alpha)^n$$

Démontrer que la conclusion du théorème de Lucas (cf. propriétés C1 et C2) vaut pour P.

Q10 — Soit un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré $n \geqslant 2$, scindé sur $\mathbb{R}$, possédant des racines réelles toutes simples (i.e. de multiplicités toutes égales à 1). Ainsi, il existe des nombres réels $\alpha_1 < \ldots < \alpha_n$ tel que

$$P = \operatorname{dom}(P) \cdot \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k)$$

Démontrer que le polynôme P' est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ et que $\operatorname{Spec}_{\mathbb{R}}\left(P'\right) \subset [\alpha_1, \alpha_n]$.

Q11 — Soit un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré supérieur ou égal à 2, scindé sur $\mathbb{R}$, possédant au moins deux racines réelles toutes multiples (i.e. de multiplicités toutes supérieures ou égales à 2). Ainsi, il existe

- un entier $r \geqslant 2$
- des nombres réels $\alpha_1 < \ldots < \alpha_r$
- des nombres entiers naturels $m_1 \geqslant 2, \ldots, m_r \geqslant 2$

tels que

$$P = \operatorname{dom}(P) \cdot \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k}$$

Démontrer que le polynôme P' est scindé sur $\mathbb{R}$ et que $\operatorname{Spec}_{\mathbb{R}}\left(P'\right) \subset [\alpha_1, \alpha_r]$. On pourra s'aider de **Q6**, **Q8** et exploiter de nouveau une idée qui a permis de résoudre **Q10**.

Q12 — Soit un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré supérieur ou égal à 2, scindé sur $\mathbb{R}$, possédant au moins deux racines, certaines simples (de multiplicités 1), d'autres multiples (de multiplicités supérieures ou égales à 2). Ainsi, il existe

- un entier $r \geqslant 2$
- des nombres réels $\alpha_1 < \ldots < \alpha_r$
- des nombres entiers naturels non nuls $m_1, \ldots, m_r$

tels que

$$P = \operatorname{dom}(P) \cdot \left(\prod_{k \in \mathscr{S}} (X - \alpha_k) \right) \times \left(\prod_{k \in \mathscr{M}} (X - \alpha_k)^{m_k} \right)$$

où

$$\mathscr{S} := \{k \in [\![1, r]\!] \,:\, \operatorname{mult}(\alpha_k, P) = 1\} \neq \emptyset \qquad \text{et} \qquad \mathscr{M} := \{k \in [\![1, r]\!] \,:\, \operatorname{mult}(\alpha_k, P) \geqslant 2\} \neq \emptyset$$

Démontrer que le polynôme P' est scindé sur $\mathbb{R}$ et que $\operatorname{Spec}_{\mathbb{R}}\left(P'\right) \subset [\alpha_1, \alpha_r]$.

Q13 — Si $\mathbb{K}$ est un corps, on note $\mathscr{P}(\mathbb{K})$ l'assertion

$$\forall\, P \in \mathbb{K}[X] \quad \left(\begin{array}{c} \deg(P) \geqslant 2 \\ \text{et} \\ P \text{ est scindé à racines simples sur } \mathbb{K} \end{array} \right) \Longrightarrow \left(P' \text{ est scindé à racines simples sur } \mathbb{K} \right)$$

D'après **Q11**, l'assertion $\mathscr{P}(\mathbb{K})$ est vraie si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Étudier l'assertion $\mathscr{P}(\mathbb{K})$ pour les corps $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

§ 3 Calcul de $\zeta(2)$ à l'aide de cotangentes

Soit n un entier naturel non nul.

Q14 — Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. Déterminer, s'ils existent, module et argument du nombre complexe $u = 1 + e^{i\theta}$.

On écrit

$$u = e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}} \right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$$

On distingue alors trois cas.

- Si $\theta \in [0, \pi[$ alors $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$. On a alors $|u| = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $\arg(u) = \frac{\theta}{2}$.
- Si $\theta = \pi$ alors $u = 0$. Le module est nul et la notion argument non définie.
- Si $\theta \in]\pi, 2\pi[$ alors $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) < 0$. On a alors $|u| = -2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $\arg(u) = \pi + \frac{\theta}{2}$.

On note P_n le polynôme de $\mathbb{C}[X]$ défini par

$$P_n(X) = \frac{1}{2i}\left((X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}\right)$$

Q15 — Déterminer les polynômes P_1 et P_2.

Le calcul donne $P_1 = 3X^2 - 1$ et $P_2 = 5X^4 - 10X^2 + 1$.

Q16 — Démontrer que $P_n \in \mathbb{C}_{2n}[X]$, puis donner son degré et son coefficient dominant.

P_n est différence de deux polynômes de degré $2n+1$ et est donc dans $C_{2n+1}[X]$. Le coefficient de degré $2n+1$ dans P_n est

$$\frac{1}{2i}(1-1) = 0$$

et donc $P \in \mathbb{C}_{2n}[X]$. Le coefficient de degré $2n$ dans P_n est

$$\frac{1}{2i}((2n+1)i - (2n+1)(-i)) = 2n+1 \neq 0$$

Ainsi, P_n est de degré $2n$ et son coefficient dominant est $2n+1$.

Q17 — Calculer $P_n(i)$.

On a $P_n(i) = \dfrac{(2i)^{2n+1}}{2i} = 2^{2n}(-1)^n$.

Q18 — Démontrer, par un argument géométrique, que les racines complexes de P_n sont réelles.

Nous munissons le plan usuel d'un repère orthonormé, ce qui nous autorise à l'identifier à $\mathbb{C}$. Soit a une racine de P_n. De $P_n(a) = 0$, on déduit

$$|a+i| = |a-i|$$

Les racines de P_n sont à égale distance de i et $-i$, donc sur la médiatrice du segment $[-i,i]$, i.e. l'axe des réels.

Q19 — Soit $a \in \mathbb{C}$. Démontrer l'équivalence

$$a \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(P_n) \iff \exists k \in [\![1,2n]\!] \quad a\left(e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}} - 1\right) = i\left(e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}} + 1\right)$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que a soit racine de P_n. On a alors $a \neq i$ et $\left(\dfrac{a+i}{a-i}\right)^{2n+1} = 1$. Il existe donc $k \in [\![0, 2n+1]\!]$ tel que

$$\frac{a+i}{a-i} = e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}}$$

et donc (produit en croix) :

$$a\left(e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}} - 1\right) = i\left(e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}} + 1\right)$$

On remarque alors que $k \neq 0$ car pour $k = 0$ la relation précédente est fausse ($0 \neq i$).

$\boxed{\Longleftarrow}$ Réciproquement, si $a\left(e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}} - 1\right) = i\left(e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}} + 1\right)$ avec $k \in [\![1,2n]\!]$, on a $(a+i) = (a-i)e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}}$. En élevant à la puissance $2n+1$ on trouve que $(a+i)^{2n+1} = (a-i)^{2n+1}$ et donc que $P_n(a) = 0$.

Q20 — Déterminer les racines du polynôme P_n puis retrouver le résultat de **Q18**.

Les racines de P_n sont donc les

$$a_k = i\,\frac{e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}} + 1}{e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}} - 1} = i\,\frac{2\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{2i\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

pour $k \in [\![1,2n]\!]$. On trouve bien des racines toutes réelles.

Q21 — Démontrer qu'il existe un unique polynôme Q_n de degré n et à coefficients réels tel que $P_n(X) = Q_n\left(X^2\right)$.

- Prouvons d'abord l'existence d'un tel polynôme Q_n. On développe les deux puissances par formule du binôme et on regroupe les termes

$$2iP_n(X) = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} X^k i^{2n+1-k}(1-(-1)^{2n+1-k})$$

Les termes d'indice k pairs sont nuls. Il reste donc

$$2iP_n(X) = 2\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} X^{2k} i^{2n+1-2k} = 2i\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} (-1)^{n-k} X^{2k}$$

On en déduit que

$$P_n(X) = Q_n(X^2) \ \text{ avec } \ Q_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} (-1)^{n-k} X^k$$

- Passons à l'unicité. Soient $Q_{n,1}(X)$ et $Q_{n,2}(X)$ deux polynômes de degré n à coefficients réels tels que $P_n(X) = Q_{n,1}(X^2)$ et $P_n(X) = Q_{n,2}(X^2)$. Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

$$Q_{n,1}(x) - Q_{n,2}(x) = P_n(\sqrt{x}) - P_n(\sqrt{x}) = 0$$

Le polynôme $Q_{n,1}(X) - Q_{n,2}(X)$ possède une infinité de racines. Il est donc nul.

Q22 — Expliciter Q_1 et Q_2 et déterminer leurs racines respectives.

D'après **Q15**

$$Q_1 = 3\left(X - \frac{1}{3}\right) \qquad \text{et} \qquad Q_2 = 5X^2 - 10X + 1 = 5\left(X - \frac{5+2\sqrt{5}}{5}\right)\left(X - \frac{5-2\sqrt{5}}{5}\right)$$

La factorisation donne les racines.

Q23 — Déterminer les racines de Q_n en fonction de celles de P_n.

- Si a est racine de P_n alors a^2 est racine de Q_n. En particulier, on dispose des racines

$$a_k^2 = \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

pour $k \in [\![1, n]\!]$.
- La fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \left]0, \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{cotan}(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} \end{array} \right.$$

est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\quad f'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)} < 0$$

En appliquant le critère différentiel de stricte monotonie sur l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ à la fonction f, nous obtenons que f est strictement décroissante donc injective sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Ainsi, les réels

$$a_k = \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

pour $k \in [\![1, n]\!]$, sont deux-à-deux distincts. Comme ils sont en outre positifs, leurs carrés sont donc également deux-à-deux distincts.
- Ceci donne n racines distinctes de Q_n, qui est de degré n, donc toutes les racines.

On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$$

Q24 — En utilisant des résultats obtenus en **Q23**, montrer que $S_n = \dfrac{n(2n-1)}{3}$.

S_n est la somme des racines b_k de Q_n, qui est scindé à racines simples et s'écrit (son coefficient dominant est celui de P_n)

$$Q_n = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}(X-b_k) = (2n+1)\left(X^n - \sum_{k=1}^{n} b_k X^{n-1} + \cdots + (-1)^n b_1 \ldots b_n\right)$$

On voit que l'on a besoin du coefficient de degré $n-1$ dans Q_n (formules de Viète) qui vaut $-\dbinom{2n+1}{2n-2}$ (cf. **Q21**). On a ainsi

$$S_n = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{2n-2} = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{3} = \frac{(2n+1)2n(2n-1)}{6(2n+1)} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

Q25 — Démontrer les inégalités suivantes

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\qquad 0 \leqslant \sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)$$

En déduire :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\qquad \frac{1}{\tan^2(x)} \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant 1 + \frac{1}{\tan^2(x)}$$

- Prouvons d'abord l'inégalité de gauche. Soit la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \left[0, \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - \sin(x) \end{array} \right.$$

La fonction f est dérivable sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

$$f'(x) = 1 - \cos(x) \geqslant 0.$$

La fonction f est donc croissante sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Donc pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

$$f(x) = x - \sin(x) \geqslant f(0) = 0$$

d'où :

$$\sin(x) \leqslant x.$$

- Passons à l'inégalité de droite. Soit la fonction

$$g \left| \begin{array}{ccc} \left[0, \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan(x) - x \end{array} \right.$$

La fonction g est dérivable sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

$$g'(x) = 1 + \tan^2(x) - 1 \geqslant 0$$

La fonction g est donc croissante sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Donc pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

$$g(x) = \tan(x) - x \geqslant g(0) = 0$$

d'où

$$x \leqslant \tan(x)$$

- D'après les deux points précédents

$$(\star) \qquad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\quad \sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)$$

- Enfin établissons la dernière double inégalité. Comme la fonction $y \longmapsto \dfrac{1}{y^2}$ décroît sur $\mathbb{R}_+^*$, on déduit de $(\star)$

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\qquad \frac{1}{\tan^2(x)} \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant \frac{1}{\sin^2(x)} = 1 + \frac{1}{\tan^2(x)}$$

Q26 — Justifier que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et que $\zeta(2) := \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, $\dfrac{k\pi}{2n+1} \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et donc

$$S_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2} \leqslant n + S_n$$

ce qui donne

$$\frac{\pi^2 S_n}{(2n+1)^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{\pi^2(n+S_n)}{(2n+1)^2}$$

Avec l'expression de S_n (cf. **Q24**)

$$\frac{\pi^2 S_n}{(2n+1)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{et} \qquad \frac{\pi^2(n+S_n)}{(2n+1)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{6}$$

Par théorème d'encadrement

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{6}$$

§ 4 Polynômes de $\mathbb{C}[X]$ prenant des valeurs entières aux entiers

Si A est un sous-anneau de $\mathbb{C}$, on note $\mathscr{P}(A)$ l'assertion

$$\forall P \in \mathbb{C}[X] \qquad \left(\forall a \in A \quad \widetilde{P}(a) \in A\right) \quad\Longrightarrow\quad P \in A[X]\,.$$

Q27 — Démontrer que l'assertion $\mathscr{P}(A)$ est vraie lorsque A est un sous-corps de $\mathbb{C}$. On pourra considérer des polynômes interpolateurs de Lagrange.

Q28 — Démontrer que l'assertion $\mathscr{P}(A)$ est fausse lorsque $A = \mathbb{Z}$.

Dans la suite, on fixe un entier naturel non nul n, et on s'intéresse à l'ensemble

$$\mathscr{E}_n := \left\{P \in \mathbb{C}_n[X] \,:\, \forall a \in \mathbb{Z} \quad \widetilde{P}(a) \in \mathbb{Z}\right\}$$

On définit $P_0 = 1$ et, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $P_k := \dfrac{1}{k!} \cdot \displaystyle\prod_{\ell=0}^{k-1} (X - \ell)$. On se propose de démontrer que

$$\mathscr{E}_n = \left\{\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot P_k \,:\, (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}\right\} =: \mathscr{F}_n$$

Q29 — Démontrer que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P_k \in \mathscr{E}_n$.

Q30 — En déduire que $\mathscr{F}_n$ est inclus dans $\mathscr{E}_n$.

Q31 — Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Démontrer qu'il existe un unique uplet $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot P_k$.

Q32 — En déduire que, si $P \in \mathscr{E}_n$, alors il existe un unique uplet $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ tel que $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot P_k \in \mathscr{F}_n$.