# Devoir Libre n°13

*Pour le lundi 27 février*

**(1)** On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
**(2)** Les assertions seront toutes justifiées avec soin, les raisonnements structurés, les résultats encadrés.

## § 1 Polynômes de Tchebychev

*Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $f_n$ par*

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(n \operatorname{Arccos}(x)) \end{array} \right.$$

**Q1 —** Calculer $f_0, f_1, f_2$ et $f_3$.

**Q2 —** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-1,1]$. Exprimer $f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x)$ en fonction de $f_n(x)$.

**Q3 —** Soient $n \in \mathbb{N}$. Démontrer qu'il existe un unique polynôme $T_n$ de $\mathbb{R}[X]$ dont la fonction polynomiale associée coïncide avec $f_n$ sur $[-1,1]$.

**Q4 —** Soient $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme $T_n$.

**Q5 —** Soient $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que le polynôme $T_n$ possède $n$ racines réelles deux-à-deux distinctes, toutes dans $]-1,1[$. On explicitera ces $n$ racines.

## § 2 Théorème de Lucas dans $\mathbb{R}$

*Nous souhaitons démontrer la version réelle d'un théorème de Lucas, qui s'énonce comme suit.*

**Théorème de Lucas dans $\mathbb{R}$ —** *Soit un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que*
*(H1) de degré supérieur ou égal à 2*
*(H2) scindé sur $\mathbb{R}$*
*Alors*
*(C1) le polynôme $P'$ est scindé sur $\mathbb{R}$*
*(C2)* $\operatorname{Spec}_{\mathbb{R}}(P') \subset \left[\min\left(\operatorname{Spec}_{\mathbb{R}}(P)\right), \max\left(\operatorname{Spec}_{\mathbb{R}}(P)\right)\right]$.

*Dans les questions **Q6**, **Q7**, **Q8**, nous établissons des résultats généraux, utiles pour répondre à notre problématique, mais qui ont un intérêt propre. Ensuite, nous scindons l'étude en quatre parties.*

*(a) $P$ est scindé sur $\mathbb{R}$, de degré supérieur ou égal à 2, avec une unique racine réelle.*

*(b) $P$ est scindé sur $\mathbb{R}$, de degré supérieur ou égal à 2, avec au moins deux racines réelles, toutes simples.*

*(c) $P$ est scindé sur $\mathbb{R}$, de degré supérieur ou égal à 2, avec au moins deux racines réelles, toutes multiples.*

*(d) $P$ est scindé sur $\mathbb{R}$, de degré supérieur ou égal à 2, avec au moins deux racines réelles, certaines simples et d'autres multiples.*

**Q6 —** Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ une racine de $P$ de multiplicité $m \geqslant 2$. Démontrer que $\alpha$ est racine de $P'$ et que $\mathrm{mult}\left(\alpha, P'\right) = m-1$.

**Q7 —** Soient $A, B, C$ des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que $A = BC$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ une racine de $A$ qui n'est pas racine de $B$. Démontrer que $\alpha$ est racine de $C$ et que $\mathrm{mult}(\alpha, A) = \mathrm{mult}(\alpha, C)$.

**Q8 —** Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme possédant $r \in \mathbb{N}^*$ racines deux-à-deux distinctes $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ dans $\mathbb{K}$. On note, pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, $m_k := \mathrm{mult}(\alpha_k, P)$. Démontrer qu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$\left\{\begin{array}{ll} & P = Q \displaystyle\prod_{k=1}^{r} (X-\alpha_k)^{m_k} \\ \text{et} & \\ & \alpha_1, \ldots, \alpha_r \text{ ne sont pas racines de } Q \end{array}\right.$$

On pourra raisonner par récurrence finie sur le nombre de racines deux-à-deux distinctes de $P$.

**Q9 —** Soit un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré $n \geqslant 2$, scindé sur $\mathbb{R}$, ne possédant qu'une racine réelle. Ainsi, si $\alpha$ désigne l'unique racine réelle de $P$

$$P = \mathrm{dom}(P) \cdot (X-\alpha)^n$$

Démontrer que la conclusion du théorème de Lucas (cf. propriétés C1 et C2) vaut pour $P$.

**Q10 —** Soit un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré $n \geqslant 2$, scindé sur $\mathbb{R}$, possédant des racines réelles toutes simples (i.e. de multiplicités toutes égales à 1). Ainsi, il existe des nombres réels $\alpha_1 < \ldots < \alpha_n$ tel que

$$P = \mathrm{dom}(P) \cdot \prod_{k=1}^{n} (X-\alpha_k)$$

Démontrer que le polynôme $P'$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ et que $\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}\left(P'\right) \subset [\alpha_1, \alpha_n]$.

**Q11 —** Soit un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré supérieur ou égal à 2, scindé sur $\mathbb{R}$, possédant au moins deux racines réelles toutes multiples (i.e. de multiplicités toutes supérieures ou égales à 2). Ainsi, il existe

- un entier $r \geqslant 2$
- des nombres réels $\alpha_1 < \ldots < \alpha_r$
- des nombres entiers naturels $m_1 \geqslant 2, \ldots, m_r \geqslant 2$

tels que

$$P = \mathrm{dom}(P) \cdot \prod_{k=1}^{r} (X-\alpha_k)^{m_k}$$

Démontrer que le polynôme $P'$ est scindé sur $\mathbb{R}$ et que $\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}\left(P'\right) \subset [\alpha_1, \alpha_r]$. On pourra s'aider de **Q6**, **Q8** et exploiter de nouveau une idée qui a permis de résoudre **Q10**.

**Q12 —** Soit un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré supérieur ou égal à 2, scindé sur $\mathbb{R}$, possédant au moins deux racines, certaines simples (de multiplicités 1), d'autres multiples (de multiplicités supérieures ou égales à 2). Ainsi, il existe

- un entier $r \geqslant 2$
- des nombres réels $\alpha_1 < \ldots < \alpha_r$
- des nombres entiers naturels non nuls $m_1, \ldots, m_r$

tels que

$$P = \mathrm{dom}(P) \cdot \left(\prod_{k \in \mathscr{S}} (X-\alpha_k)\right) \times \left(\prod_{k \in \mathscr{M}} (X-\alpha_k)^{m_k}\right)$$

où
$$\mathscr{S} := \{k \in [\![1,r]\!] \ : \ \mathrm{mult}(\alpha_k, P) = 1\} \neq \emptyset \qquad \text{et} \qquad \mathscr{M} := \{k \in [\![1,r]\!] \ : \ \mathrm{mult}(\alpha_k, P) \geqslant 2\} \neq \emptyset$$
Démontrer que le polynôme $P'$ est scindé sur $\mathbb{R}$ et que $\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}\left(P'\right) \subset [\alpha_1, \alpha_r]$.

**Q13 —** Si $\mathbb{K}$ est un corps, on note $\mathscr{P}(\mathbb{K})$ l'assertion
$$\forall\, P \in \mathbb{K}[X] \quad \left( \begin{array}{c} \deg(P) \geqslant 2 \\ \text{et} \\ P \text{ est scindé à racines simples sur } \mathbb{K} \end{array} \right) \Longrightarrow \left( P' \text{ est scindé à racines simples sur } \mathbb{K} \right)$$
D'après **Q11**, l'assertion $\mathscr{P}(\mathbb{K})$ est vraie si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Étudier l'assertion $\mathscr{P}(\mathbb{K})$ pour les corps $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

## § 3 Calcul de $\zeta(2)$ à l'aide de cotangentes

*Soit $n$ un entier naturel non nul.*

**Q14 —** Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. Déterminer, s'ils existent, module et argument du nombre complexe $u = 1 + e^{i\theta}$.

*On note $P_n$ le polynôme de $\mathbb{C}[X]$ défini par*
$$P_n(X) = \frac{1}{2i}\left((X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}\right)$$

**Q15 —** Déterminer les polynômes $P_1$ et $P_2$.

**Q16 —** Démontrer que $P_n \in \mathbb{C}_{2n}[X]$, puis donner son degré et son coefficient dominant.

**Q17 —** Calculer $P_n(i)$.

**Q18 —** Démontrer, par un argument géométrique, que les racines complexes de $P_n$ sont réelles.

**Q19 —** Soit $a \in \mathbb{C}$. Démontrer l'équivalence
$$a \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(P_n) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, k \in [\![1, 2n]\!] \quad a\left(e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}} - 1\right) = i\left(e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}} + 1\right)$$

**Q20 —** Déterminer les racines du polynôme $P_n$ puis retrouver le résultat de **Q18**.

**Q21 —** Démontrer qu'il existe un unique polynôme $Q_n$ de degré $n$ et à coefficients réels tel que $P_n(X) = Q_n\left(X^2\right)$.

**Q22 —** Expliciter $Q_1$ et $Q_2$ et déterminer leurs racines respectives.

**Q23 —** Déterminer les racines de $Q_n$ en fonction de celles de $P_n$.

*On pose*
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$$

**Q24 —** En utilisant des résultats obtenus en **Q23**, montrer que $S_n = \dfrac{n(2n-1)}{3}$.

**Q25 —** Démontrer les inégalités suivantes

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[ \qquad 0 \leqslant \sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)$$

En déduire :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[ \qquad \frac{1}{\tan^2(x)} \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant 1 + \frac{1}{\tan^2(x)}$$

**Q26 —** Justifier que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et que $\zeta(2) := \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

## § 4 Polynômes de $\mathbb{C}[X]$ prenant des valeurs entières aux entiers

*Si $A$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$, on note $\mathscr{P}(A)$ l'assertion*

$$\forall P \in \mathbb{C}[X] \qquad \left(\forall a \in A \quad \widetilde{P}(a) \in A\right) \quad \Longrightarrow \quad P \in A[X]\,.$$

**Q27 —** Démontrer que l'assertion $\mathscr{P}(A)$ est vraie lorsque $A$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$. On pourra considérer des polynômes interpolateurs de Lagrange.

**Q28 —** Démontrer que l'assertion $\mathscr{P}(A)$ est fausse lorsque $A = \mathbb{Z}$.

*Dans la suite, on fixe un entier naturel non nul $n$, et on s'intéresse à l'ensemble*

$$\mathscr{E}_n := \left\{P \in \mathbb{C}_n[X] \,:\, \forall a \in \mathbb{Z} \quad \widetilde{P}(a) \in \mathbb{Z}\right\}$$

*On définit $P_0 = 1$ et, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $P_k := \frac{1}{k!} \cdot \prod_{\ell=0}^{k-1} (X - \ell)$. On se propose de démontrer que*

$$\mathscr{E}_n = \left\{\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot P_k \,:\, (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}\right\} =: \mathscr{F}_n$$

**Q29 —** Démontrer que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P_k \in \mathscr{E}_n$.

**Q30 —** En déduire que $\mathscr{F}_n$ est inclus dans $\mathscr{E}_n$.

**Q31 —** Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Démontrer qu'il existe un unique uplet $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot P_k$.

**Q32 —** En déduire que, si $P \in \mathscr{E}_n$, alors il existe un unique uplet $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ tel que $P = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot P_k \in \mathscr{F}_n$.