DEVOIR LIBRE N°12

Pour le vendredi 10 février

(1) On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
(2) Les assertions seront toutes justifiées avec soin, les raisonnements structurés, les résultats encadrés.

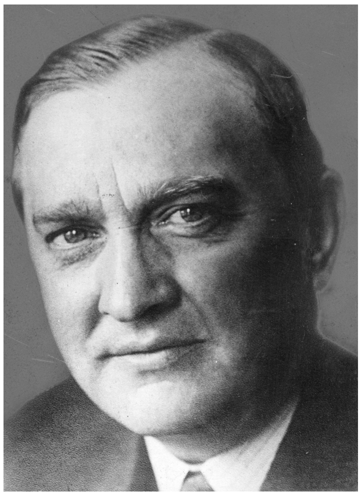
Émile Picard
mathématicien français
1856-1941

Problématique Étant donnés un ensemble E et une application $f: E \longrightarrow E$

- déterminer des conditions suffisantes, portant sur E et f, pour que l'application f possède un point fixe ;
- étudier l'unicité d'un point fixe de f ;
- construire des valeurs approchées d'un point fixe de f en estimant la qualité de l'approximation.

Résultat principal Théorème de Picard-Banach (cf. §4).

Stefan Banach
mathématicien polonais
1892-1945



Plan

§1 Nous considérons le cas où E est un segment de $\mathbb{R}$ et f est une application contractante (application k-lipschitzienne, où $k \in [0,1[$). Il s'agit d'une généralisation d'exercices étudiés en TD ou dans le DS8.

§2 Nous nous plaçons dans le cas « limite » de la situation étudiée précédemment et considérons le cas où E est un segment de $\mathbb{R}$ et f est une application 1-lipschitzienne.

§3 Nous introduisons la notion de suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ puis établissons que toute suite de Cauchy est convergente dans $\mathbb{R}$. Il s'agit d'un puissant outil pour construire des nombres réels.

§4 Nous commençons par introduire la notion d'espace métrique complet. L'ensemble des réels $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle est un tel, d'après la partie précédente. Nous établissons ensuite le théorème de Picard-Banach, qui répond à notre problématique dans le vaste cadre où E est équipé d'une distance qui en fait un espace métrique complet et f est une application contractante.

§5 Nous appliquons le théorème de Picard-Banach pour construire des valeurs approchées de l'unique racine réelle du polynôme $X^3 + X - 1$, avec une précision aussi fine que voulue.

§6 Étant donné un ensemble non vide X, nous définissons la distance d_∞ sur l'ensemble $\mathscr{B}(X,\mathbb{R})$ des applications de X dans $\mathbb{R}$ bornées et démontrons que l'espace métrique $(\mathscr{B}(X,\mathbb{R}), d_\infty)$ est complet.

§7 On déduit du théorème de Picard-Banach et de la complétude de $(\mathscr{B}(X,\mathbb{R}), d_\infty)$ un théorème de Blackwell qui trouve, par exemple, des applications en programmation dynamique.

§ 1 Un théorème de point fixe dans $\mathrm{Lip}_k([a,b],[a,b])$ où $k \in [0,1[$

Soient a, b des réels tels que $a < b$.

Q1 — Soit $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ telle que

$$\forall\, x \in [a,b] \quad \left|f'(x)\right| < 1\,.$$

Démontrer que l'application f est contractante, i.e. qu'il existe un réel $k \in [0,1[$ tel que f est k-lipschitzienne.

Soit une application $f\colon [a,b] \longrightarrow [a,b]$. On suppose qu'il existe un réel $k \in [0,1[$ tel que f est k-lipschitzienne, i.e. que l'application f est contractante. On introduit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\left\{\begin{array}{ll} & x_0 \in [a,b] \\ \textit{et} & \\ & \textit{pour tout } n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n). \end{array}\right.$$

On se propose de démontrer que cette suite converge vers l'unique point fixe α de f et d'estimer la vitesse de convergence.

Q2 — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n existe et appartient à $[a,b]$.

Q3 — Démontrer que, si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors sa limite est un point fixe de f.

Q4 — Démontrer que f possède un point fixe.

Q5 — Démontrer que f ne possède qu'un seul point fixe.

Nous notons α l'unique point fixe de f.

Q6 — Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - \alpha| \leqslant k \cdot |x_n - \alpha|$.

Q7 — En déduire que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$ et que $|x_n - \alpha| \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(k^n)$.

§ 2 Un théorème de point fixe dans $\mathrm{Lip}_1([a,b],[a,b])$

Soient a, b des réels tels que $a < b$ et $f\colon [a,b] \longrightarrow [a,b]$ une application 1-lipschitzienne. Comme en **Q4**, *on établit que f possède un point fixe. On introduit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par*

$$\left\{\begin{array}{ll} & x_0 \in [a,b] \\ \textit{et} & \\ & \textit{pour tout } n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \dfrac{f(x_n) + x_n}{2}. \end{array}\right.$$

On se propose de démontrer que cette suite converge vers un point fixe de f.

Q8 — L'application f possède-t-elle nécessairement un unique point fixe ?

Q9 — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n existe et appartient à $[a,b]$.

Q10 — Démontrer que, si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors sa limite est un point fixe de f.

Q11 — Démontrer que si $x_1 - x_0 \geqslant 0$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} - x_n \geqslant 0$.

Q12 — Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point fixe de f.

§ 3 Suites de Cauchy et complétude de $\mathbb{R}$

Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite de Cauchy si

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, (n,m) \in \mathbb{N}^2 \quad (n \geqslant N \text{ et } m \geqslant N) \Longrightarrow |x_n - x_m| \leqslant \varepsilon\,.$$

L'objectif de cette partie est de démontrer qu'une suite de nombres réels est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

Q13 — Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite convergente, de limite notée ℓ. Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Q14 — Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Q15 — Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathbb{R}$, à l'aide du théorème de Bolzano-Weierstraß.

§ 4 Théorème du point fixe de Picard-Banach

Une distance sur un ensemble E est une application

$$d \left| \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \longmapsto & d(x,y) \end{array} \right.$$

qui possède les trois propriétés suivantes.

(1) *Séparation :* $\forall\, (x,y) \in E^2 \quad d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

(2) *Symétrie :* $\forall\, (x,y) \in E^2 \quad d(x,y) = d(y,x)$

(3) *Inégalité triangulaire :* $\forall\, (x,y,z) \in E^3 \quad d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$

Un espace métrique est un couple (E,d) formé d'un ensemble E et d'une distance d sur E.

L'ensemble $\mathbb{R}$ muni de sa distance usuelle

$$d_{\mathbb{R}} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \longmapsto & |x-y| \end{array} \right.$$

est un espace métrique.

Dans un espace métrique (E,d), une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément $\ell \in E$ si

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant N \Longrightarrow d(x_n, \ell) \leqslant \varepsilon\,.$$

Elle est dite de Cauchy si

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, (n,m) \in \mathbb{N}^2 \quad (n \geqslant N \text{ et } m \geqslant N) \Longrightarrow d(x_n, x_m) \leqslant \varepsilon\,.$$

Q16 — Soient (E,d) un espace métrique, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ et $(\ell_1, \ell_2) \in E^2$. Démontrer que, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_1 et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_2, alors $\ell_1 = \ell_2$.

Q17 — Soient (E,d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $\ell \in E$. Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. On pourra s'inspirer que la solution proposée pour **Q13**.

D'après **Q16** *et* **Q17***, dans un espace métrique, la limite d'une suite convergente est unique et toute suite convergente est de Cauchy.*

On dit qu'un espace métrique (E, d) est complet si toute suite de Cauchy d'éléments de E est convergente dans E.

D'après **Q15**, *l'ensemble $\mathbb{R}$ muni de la distance $d_{\mathbb{R}}$ est un espace métrique complet.*

Q18 — Démontrer que l'ensemble $\mathbb{Q}$ muni de la distance $d_{\mathbb{Q}}$ définie par

$$d_{\mathbb{Q}} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x, y) & \longmapsto & |x - y| \end{array} \right.$$

n'est pas un espace métrique complet. On pourra, par exemple, considérer la suite $\left(\dfrac{\lfloor 10^n \sqrt{2} \rfloor}{10^n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$.

Dans la suite de cette partie, on fixe un espace métrique complet noté (E, d) et une application contractante $f : E \longrightarrow E$, i.e. telle que

$$\exists\, k \in [0, 1[\quad \forall\, (x, y) \in E^2 \quad d(f(x), f(y)) \leqslant k \cdot d(x, y)\,.$$

On considère la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\left\{ \begin{array}{ll} & x_0 \in E \\ \textit{et} & \\ & \textit{pour tout } n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n). \end{array} \right.$$

Comme en **Q2**, *on peut démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n existe et appartient à E.*

Q19 — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d(x_{n+1}, x_n) \leqslant k^n \cdot d(x_0, x_1)$.

Q20 — Démontrer que, pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \leqslant m$, $d(x_m, x_n) \leqslant \dfrac{k^n}{1-k} \cdot d(x_0, x_1)$.

Q21 — En déduire que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Comme l'espace métrique (E, d) est supposé complet, nous déduisons de **Q21** *que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un point $\alpha \in E$.*

Q22 — Justifier que la suite $(x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge également vers α.

Q23 — Démontrer que la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(\alpha)$.

Q24 — En déduire que α est un point fixe de f.

Q25 — Démontrer que α est l'unique point fixe de f. On pourra s'inspirer que la solution proposée pour **Q5**.

Q26 — Démontrer que $d(x_n, \alpha) \underset{n \to +\infty}{=} \mathrm{O}(k^n)$.

Nous venons de démontrer le résultat suivant.

> *<u>Théorème (de Picard-Banach)</u> — Soient (E, d) un espace métrique complet et $f : E \longrightarrow E$ une application contractante. Alors*
> *(1) f possède un unique point fixe α ;*
> *(2) toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in E$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$, converge vers α, avec une vitesse de convergence géométrique.*

Q27 — Démontrer que la conclusion du théorème de Picard-Banach vaut toujours si on affaiblit l'hypothèse sur l'application $f\colon E \longrightarrow E$ en demandant non pas à l'application f d'être contractante, mais à une de ses itérées de l'être, i.e. en supposant que

$$\exists\, p \in \mathbb{N}^* \quad \exists\, k \in [0,1[\quad \forall\,(x,y) \in E^2 \quad d\left(f^p(x), f^p(y)\right) \leqslant k \cdot d(x,y)\,.$$

Le théorème de Picard-Banach permet de résoudre des problèmes de points fixes dans des espaces métriques complets (E,d), où E n'est pas nécessairement un ensemble de nombres. Il existe, par exemple, de nombreux espaces de fonctions que l'on peut munir de distances les rendant métriques complets. Nous illustrerons, de manière élémentaire, ce champ d'applications dans les parties 7 et 8. Mais des résultats bien plus profonds peuvent être obtenus grâce au théorème de Picard-Banach appliqué à des espaces métriques fonctionnels complets, tels le théorème de Cauchy-Lipschitz (cf. programme de MPI) ou encore le théorème d'inversion locale dont nous proposons une version unidimensionnelle ci-dessous.

Q28 — Soit I un intervalle ouvert non vide, $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $a \in I$ tel que $f'(a) \neq 0$. Démontrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que

(i) $]a-\delta, a+\delta[\subset I$;

(ii) l'application

$$g := f_{|\,]a-\delta,a+\delta[}^{|\,f(]a-\delta,a+\delta[)} \left| \begin{array}{ccc}]a-\delta, a+\delta[& \longrightarrow & f(]a-\delta,a+\delta[) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

est bijective;

(iii) l'application réciproque de g

$$g^{-1} \left| \begin{array}{ccc} f(]a-\delta,a+\delta[) & \longrightarrow &]a-\delta,a+\delta[\\ y & \longmapsto & \text{l'unique } x \in]a-\delta,a+\delta[\text{ tel que } y = f(x) \end{array} \right.$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle ouvert $f(]a-\delta,a+\delta[)$.

Dans ce cas unidimensionnel, on peut établir ce résultat sans faire appel au théorème de Picard-Banach, à l'aide des théorèmes du chapitre 15 du cours.

§ 5 L'unique racine réelle du polynôme $X^3 + X - 1$

Q29 — Démontrer que l'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{1+x^2} \end{array} \right.$$

est $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$-lipschitzienne.

Q30 — En déduire que le polynôme $X^3 + X - 1$ possède une unique racine réelle α.

Q31 — Donner une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers α et un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x_N - \alpha| \leqslant 10^{-6}$.

Q32 — Construire une fonction Python nommée **racineApprochee** d'argument un réel strictement positif **e** qui renvoie une valeur approchée de α avec une erreur inférieure à **e**.

Q33 — À l'aide de la fonction **racineApprochee**, donner une valeur approchée de α avec une erreur inférieure à 10^{-8}.

§ 6 L'ESPACE MÉTRIQUE COMPLET $(\mathscr{B}(X,\mathbb{R}), d_\infty)$

Soit X un ensemble non vide. On note $\mathscr{B}(X,\mathbb{R})$ la partie de $\mathbb{R}^X$ formée des fonctions de X dans $\mathbb{R}$ qui sont bornées sur X, i.e.

$$\mathscr{B}(X,\mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathbb{R}^X \ : \ \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in X \quad |f(x)| \leqslant M \right\} .$$

Q34 — Démontrer que $\mathscr{B}(X,\mathbb{R})$ est non vide et stable par combinaison linéaire.

Nous définissons l'application d_∞ par

$$d_\infty \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{B}(X,\mathbb{R}) \times \mathscr{B}(X,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (f,g) & \longmapsto & \sup\left\{ |f(x)-g(x)| \ : \ x \in X \right\} . \end{array} \right.$$

Q35 — Justifier que l'application d_∞ est bien définie.

Q36 — Démontrer que d_∞ vérifie la propriété de séparation, i.e. que

$$\forall (f,g) \in \mathscr{B}(X,\mathbb{R})^2 \quad d_\infty(f,g) = 0 \iff f = g .$$

Q37 — Justifier que d_∞ vérifie la propriété de symétrie, i.e. que

$$\forall (f,g) \in \mathscr{B}(X,\mathbb{R})^2 \quad d_\infty(f,g) = d_\infty(g,f) .$$

Q38 — Justifier que d_∞ vérifie l'inégalité triangulaire i.e. que

$$\forall (f,g,h) \in \mathscr{B}(X,\mathbb{R})^3 \quad d_\infty(f,h) \leqslant d_\infty(f,g) + d_\infty(g,h) .$$

D'après **Q35**, **Q36**, **Q37** *et* **Q38**, *le couple $(\mathscr{B}(X,\mathbb{R}), d_\infty)$ est un espace métrique. Dans la suite de cette partie, nous démontrons son caractère complet.*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de l'espace métrique $(\mathscr{B}(X,\mathbb{R}), d_\infty)$.

Q39 — Fixons $x \in X$. Démontrer que la suite de nombres réels $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$.

D'après **Q39** *la fonction*

$$f \left| \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) \end{array} \right.$$

est bien définie.

Q40 — Démontrer que la fonction f est bornée sur X, i.e. que $f \in \mathscr{B}(X,\mathbb{R})$.

Q41 — Démontrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans l'espace métrique $(\mathscr{B}(X,\mathbb{R}), d_\infty)$, i.e. que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant N \Longrightarrow d_\infty(f_n, f) \leqslant \varepsilon .$$

§ 7 Un théorème de Blackwell

Nous considérons de nouveau un ensemble non vide X et l'espace métrique $(\mathscr{B}(X,\mathbb{R}), d_\infty)$ qui est complet (cf. partie 6).

Cet ensemble est muni d'une relation d'ordre définie par, pour tout $(f,g) \in \mathscr{B}(X,\mathbb{R})^2$, $f \leqslant g$ si et seulement si

$$\forall\, x \in X \quad f(x) \leqslant_{\mathbb{R}} g(x)$$

où $\leqslant_{\mathbb{R}}$ est la relation d'ordre usuelle dans $\mathbb{R}$. Si $c \in \mathbb{R}$, on note (abusivement) également c la fonction constante de X dans $\mathbb{R}$ prenant uniquement la valeur c

$$c \left| \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & c\,. \end{array} \right.$$

Q42 — Soit une application $T : \mathscr{B}(X,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{B}(X,\mathbb{R})$ vérifiant les deux propriétés suivantes.

(a) Croissance

$$\forall\, (f,g) \in \mathscr{B}(X,\mathbb{R})^2 \quad f \leqslant g \Longrightarrow T(f) \leqslant T(g)$$

(b) Actualisation

$$\exists\, k \in [0,1[\quad \forall (f,c) \in \mathscr{B}(X,\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \quad T(f+c) \leqslant T(f) + kc$$

Démontrer que l'application T possède un unique point fixe.

Il s'agit du théorème 5 de l'article de David Blackwell, intitulé « Discounted dynamic programming », paru dans la revue Ann. Math. Statist., en 1965.