Devoir Libre n°11

Pour le vendredi 27 janvier

(1) On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
(2) Les assertions seront toutes justifiées avec soin, les raisonnements structurés, les résultats encadrés.

Q1 — Soit $(\mathbb{K},+,\times)$ le corps à deux éléments dont le neutre pour l'addition est noté $\overline{0}$ et le neutre pour la multiplication est noté $\overline{1}$. Comparer les deux fonctions

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & x+\overline{1} \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & x^3+x^2+x+\overline{1} \end{array} \right. .$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathscr{P}_n$ la partie de $\mathscr{F}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ formée des fonctions $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que

$$\exists\,(a_0,a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \qquad a_n \neq 0 \quad \textit{et} \quad \left(\forall\, z \in \mathbb{C} \quad f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right).$$

Une racine d'une fonction $f \in \mathscr{P}_n$ est un nombre complexe α tel que $f(\alpha) = 0$.
La fonction nulle de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est notée $0_{\mathscr{F}(\mathbb{C},\mathbb{C})}$, i.e.

$$0_{\mathscr{F}(\mathbb{C},\mathbb{C})} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & 0\,. \end{array} \right.$$

Q2 — Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0,a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$. On suppose que, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\sum_{k=0}^{n} a_k z^k = 0$. Démontrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\sum_{k=0}^{n} a_k z^k = 0$.

Q3 — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour toute fonction $f \in \mathscr{P}_n$, $f \neq 0_{\mathscr{F}(\mathbb{C},\mathbb{C})}$.

Q4 — Soit $n \in \mathbb{N}$. La partie $\mathscr{P}_n$ de $\mathscr{F}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ est-elle stable par combinaison linéaire ?

Q5 — Soient $(n,m) \in \mathbb{N}^2$, $(a_0,a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $a_n \neq 0$ et $(b_0,b_1,\dots,b_m) \in \mathbb{C}^{m+1}$ tel que $b_m \neq 0$. On considère les deux fonctions $f \in \mathscr{P}_n$ et $g \in \mathscr{P}_m$ définies par

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k z^k \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{m} b_k z^k\,. \end{array} \right.$$

Démontrer que, si les fonctions f et g sont égales, alors $n = m$ et, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $a_k = b_k$.

Une fonction $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui appartient à $\mathscr{P} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_n$ est appelée « fonction polynomiale non nulle ».
D'après **Q5**, *si $f \in \mathscr{P}$ alors il existe un unique entier $n \in \mathbb{N}$ et un unique $(a_0,a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que*

$$a_n \neq 0 \quad \textit{et} \quad \left(\forall\, z \in \mathbb{C} \quad f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right).$$

L'entier n est appelé « degré de f » et les scalaires $a_0, a_1, \dots, a_n$ « coefficients de f ».

Q6 — Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $a_n \neq 0$ et f la fonction polynomiale de degré n définie par

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k z^k . \end{array} \right.$$

Démontrer que, si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de f alors

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad f(z) = (z - \alpha) \sum_{\ell=0}^{n-1} \left(\sum_{k=\ell+1}^{n} a_k \, \alpha^{k-\ell-1} \right) z^\ell .$$

Q7 — Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction polynomiale de degré n et $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de f. Démontrer qu'il existe une unique fonction $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ polynomiale de degré $n-1$ telle que

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad f(z) = g(z)\,(z - \alpha) .$$

Q8 — Soient $n \in \mathbb{N}$ et f, g deux fonctions polynomiales de degré n. On suppose qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ et des nombres complexes $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ deux-à-deux distincts tels que

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\} \qquad f(z) = g(z).$$

Démontrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = g(z)$.

Q9 — Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction polynomiale de degré n, $r \in [\![1, n]\!]$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ des racines de f deux-à-deux distinctes. Démontrer qu'il existe une unique fonction $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ polynomiale de degré $n - r$ telle que

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad f(z) = g(z) \prod_{k=1}^{r} (z - \alpha_k) .$$

Q10 — Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction polynomiale de degré n. Démontrer que f possède au plus n racines deux-à-deux distinctes.

On fixe pour toute la suite du sujet
(a) un entier $n \geqslant 2$;
(b) un n-uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de nombres complexes deux-à-deux distincts.

Q11 — Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Démontrer qu'il existe une unique fonction polynomiale $f_k : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ de degré $n-1$ telle que

$$\forall \ell \in [\![1, n]\!] \quad f_k(\alpha_\ell) = \delta_{k,\ell} .$$

On donnera une expression de f_k comme produit de $n-1$ polynômes de degré 1.

Q12 — Soit $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ un n-uplet de nombres complexes non tous nuls. Démontrer qu'il existe une unique fonction polynomiale non nulle $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ de degré inférieur ou égal à $n-1$ telle que

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \quad f(\alpha_k) = \beta_k .$$

On donnera une expression de f comme combinaison linéaire des fonctions $f_1, \dots, f_n$ introduites en **Q11**.

Q13 — Pour cette question, spécifions la situation de **Q12** au cas où $n = 5$, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5) = (-2, -1, 0, 1, 2)$ et $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5) = (1, 2, -1, 3, -1)$. Donner, sous forme simplifiée, l'unique fonction polynomiale non nulle $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ de degré inférieur ou égal à 4 telle que

$$f(-2) = 1 \quad , \quad f(-1) = 2 \quad , \quad f(0) = -1 \quad , \quad f(1) = 3 \quad , \quad f(2) = -1 .$$

Q14 — Soit V la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ définie par, pour tout $(k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2$, $[V]_{k,\ell} = \alpha_\ell^{k-1}$, i.e.

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \dots & \alpha_{n-1}^2 & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_1^{n-2} & \alpha_2^{n-2} & \alpha_3^{n-2} & \dots & \alpha_{n-1}^{n-2} & \alpha_n^{n-2} \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \alpha_3^{n-1} & \dots & \alpha_{n-1}^{n-1} & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Démontrer que la matrice V est inversible.

Soient $\omega := e^{i\frac{2\pi}{n}}$ et Ω la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ définie par, pour tout $(k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2$, $[\Omega]_{k,\ell} = \omega^{(k-1)(\ell-1)}$, i.e.

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{n-2} & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(n-2)} & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-2} & \omega^{2(n-2)} & \dots & \omega^{(n-2)(n-2)} & \omega^{(n-2)(n-1)} \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \dots & \omega^{(n-2)(n-1)} & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Q15 — Justifier que $\Omega \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Q16 — Soit $\ell_0 \in [\![1,n]\!]$. Calculer, pour tout $\ell \in [\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \omega^{(\ell-\ell_0)(k-1)}$.

Soient $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ fixé. On considère le système linéaire

$$(S_Y) \; : \; \Omega X = Y$$

d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, la k-ième ligne du système (S_Y) est donc

$$L_k \; : \; \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell \, \omega^{(k-1)(\ell-1)} = y_k \, .$$

Q17 — *Soit $\ell_0 \in [\![1,n]\!]$. Déterminer des nombres complexes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tels que la combinaison linéaire $\displaystyle\sum_{k=1}^{k} \lambda_k L_k$ des lignes $L_1, L_2, \dots, L_n$ permette d'isoler x_{ℓ_0}, i.e. telle que*

$$\sum_{k=1}^{k} \lambda_k L_k \; : \; x_{\ell_0} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k \, .$$

Q18 — *Déduire de* **Q17** *l'inverse de la matrice* Ω. *On donnera un lien « simple » entre les coefficients de* Ω^{-1} *et ceux de* Ω.