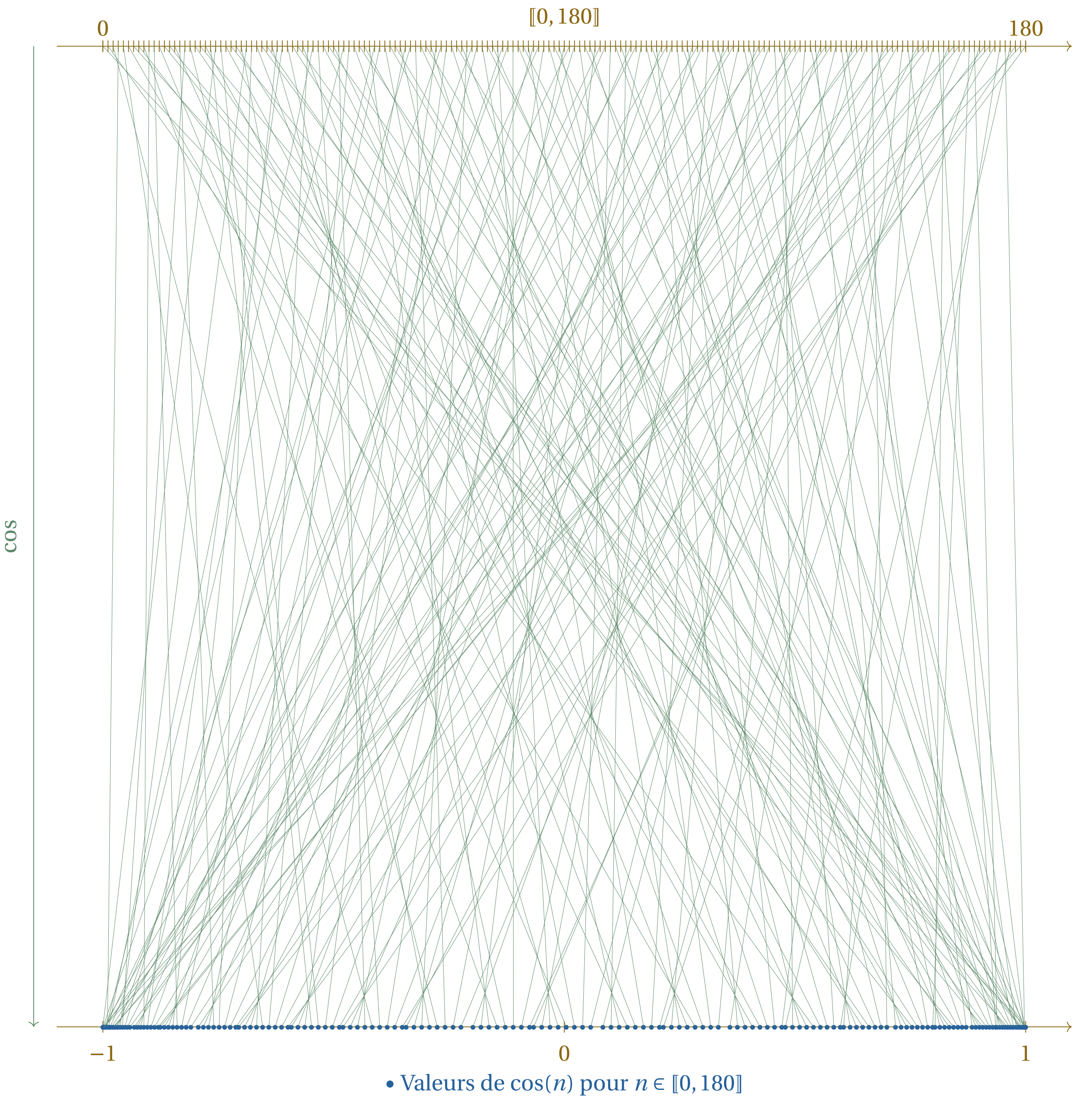
Devoir Libre n°10

Pour le mercredi 11 janvier

(1) On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
(2) Les assertions seront toutes justifiées avec soin, les raisonnements structurés, les résultats encadrés.

Nous classifions les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ *et en déduisons que l'ensemble* $\{\cos(n)\ :\ n \in \mathbb{N}\}$ *est une partie de* $[-1,1]$ *dense dans* $[-1,1]$*, i.e. que, pour tout* $(x,y) \in [-1,1]^2$ *tel que* $x < y$*, il existe* $n \in \mathbb{N}$ *vérifiant* $x < \cos(n) < y$.



• Valeurs de $\cos(n)$ pour $n \in [\![0,180]\!]$

Q1 — Soit $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$. Démontrer que

$$\alpha\mathbb{Z} := \{\alpha \cdot n \;:\; n \in \mathbb{Z}\}$$

est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ qui n'est pas une partie de $\mathbb{R}$ dense dans $\mathbb{R}$.

Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ distinct de $\{0\}$. On pose

$$H_{>0} := \{h \in H \;:\; h > 0\} \ .$$

Q2 — Justifier que $\alpha := \inf(H_{>0})$ est un nombre réel bien défini.

Q3 — On suppose que $\alpha \in H_{>0}$. Démontrer que $H = \alpha\mathbb{Z}$.

Q4 — On suppose que $\alpha \notin H_{>0}$. Démontrer que $\alpha = 0$, puis que H est une partie de $\mathbb{R}$ dense de $\mathbb{R}$.

Nous avons établi que si H est un sous-groupe non trivial de $(\mathbb{R}, +)$ alors

- *soit il existe $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $H = \alpha\mathbb{Z}$ (H est alors dit monogène) ;*
- *soit H est une partie de $\mathbb{R}$ dense dans $\mathbb{R}$.*

On rappelle que π est un nombre irrationnel.

Q5 — Démontrer que

$$\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z} := \left\{n + 2 \cdot \pi \cdot m \;:\; (n, m) \in \mathbb{Z}^2\right\}$$

est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ qui est une partie de $\mathbb{R}$ dense dans $\mathbb{R}$.

Q6 — Soit $(x, y) \in [-1, 1]^2$ tel que $x < y$. Démontrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $x < \cos(n) < y$.