DEVOIR LIBRE N°9

> **(1)** On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
> **(2)** Les assertions seront toutes justifiées avec soin, les raisonnements structurés, les résultats encadrés.
> **(3)** Tous les calculs seront tous détaillés et réalisés sans machine, à l'exception de **Q12**.

Nous définissons la partie $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ de $\mathbb{R}$ par $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] := \left\{a+b\cdot\sqrt{2} \,:\, (a,b)\in\mathbb{Z}^2\right\}$.

Q1 — Soit $x\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$. Justifier que l'écriture de x sous la forme $a+b\cdot\sqrt{2}$, avec $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$, est unique.

Q2 — Démontrer que, pour tout $(x_1,x_2)\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]\times\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$, $-x_1$, x_1+x_2 et $x_1\cdot x_2$ appartiennent à $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$.

Soit l'application σ définie par :

$$\sigma \;\left|\; \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] \\ a+b\cdot\sqrt{2},\ \textit{avec}\ (a,b)\in\mathbb{Z}^2 & \longmapsto & a-b\cdot\sqrt{2}\,. \end{array}\right.$$

Q3 — Vérifier que, pour tout $(x_1,x_2)\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]\times\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$:

$$\sigma(x_1+x_2)=\sigma(x_1)+\sigma(x_2) \qquad \text{et} \qquad \sigma(x_1\cdot x_2)=\sigma(x_1)\cdot\sigma(x_2)$$

puis démontrer que σ est bijective.

Soit l'application norme, notée N, définie par :

$$N \;\left|\; \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ x & \longmapsto & |x\cdot\sigma(x)|\,. \end{array}\right.$$

Q4 — Démontrer que, pour tout $x\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$, $x=0$ si et seulement si $N(x)=0$.

Q5 — Démontrer que, pour tout $(x_1,x_2)\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]\times\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$, $N(x_1\cdot x_2)=N(x_1)\cdot N(x_2)$.

Un élément x de $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ est appelé unité s'il existe $y\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ tel que $x\cdot y=1$. L'ensemble des unités de $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ est noté U.

Q6 — Démontrer que, pour tout $x\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$, $x\in U$ si et seulement si $N(x)=1$.

Q7 — Soit x un élément non nul de $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ et $y\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$. Démontrer qu'il existe $(q,r)\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]\times\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ tel que :

$$y=q\cdot x+r \quad \text{et} \quad N(r)<N(x)\,.$$

Le couple (q,r) est-il nécessairement unique ?

Q8 — Justifier que $1+\sqrt{2}\in U$.

Q9 — Soit $u\in U$ tel que $u>1$. Démontrer que $u\geqslant 1+\sqrt{2}$ puis qu'il existe $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $u=\left(1+\sqrt{2}\right)^n$.

Soit l'application φ définie par :

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \{-1,1\}\times\mathbb{Z} & \longrightarrow & U \\ (\varepsilon,n) & \longmapsto & \varepsilon\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)^n \end{array} \right. .$$

Q10 — Vérifier que, pour tout $(\varepsilon_1, n_1) \in \{-1,1\}\times\mathbb{Z}$ et $(\varepsilon_2, n_2) \in \{-1,1\}\times\mathbb{Z}$:

$$\varphi(\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2, n_1+n_2) = \varphi(\varepsilon_1, n_1)\cdot\varphi(\varepsilon_2, n_2)$$

puis démontrer que φ est bijective. Il s'agit d'un cas particulier du théorème des unités de Dirichlet.

Q11 — Déterminer l'ensemble solution de l'équation de Pell-Fermat :

$$(E) \qquad a^2 - 2b^2 = 1$$

d'inconnue $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$.

Q12 — Donner dix solutions distinctes de l'équation (E).