Devoir Libre n°8

Pour le mardi 3 janvier

(1) On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
(2) Les assertions seront toutes justifiées avec soin, les raisonnements structurés, les résultats encadrés.
(3) Tous les calculs seront tous détaillés et réalisés sans machine.

§ 1 Des racines rationnelles d'un polynôme à coefficients entiers

Soient $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$, $(a_k)_{k \in [\![0,n]\!]} \in \mathbb{Z}^{n+1}$ *et* $P := a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$ *un polynôme.*

Q1 — Soit $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $p \wedge q = 1$. Démontrer que si $\dfrac{p}{q}$ est racine de P, alors $p \mid a_0$ et $q \mid a_n$.

Q2 — Déduire de **Q1** que le polynôme $X^n - X + 1$ ne possède aucune racine rationnelle.

Q3 — Déduire de **Q1** l'ensemble des racines complexes de $3X^3 + 8X^2 + 12X - 5$.

§ 2 Critère de divisibilité par 3, 11 et 33

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ *d'écriture en base* 10 *notée* $N = \sum_{k=0}^{p} a_k 10^k$, *où* $p \in \mathbb{N}$ *et* $(a_0, \ldots, a_p) \in [\![0,9]\!]^{p+1}$ *avec* $a_p \neq 0$.

Q4 — Démontrer que 3 divise N si et seulement si 3 divise $\sum_{k=0}^{p} a_k$.

Q5 — Démontrer que 11 divise N si et seulement si 11 divise $\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \cdot a_k$.

Q6 — Démontrer que N est divisible par 33 si et seulement si 3 divise $\sum_{k=0}^{p} a_k$ et 11 divise $\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \cdot a_k$.

Q7 — Justifier que 12 435 687 est divisible par 33.

§ 3 Divisibilité par 7 d'une somme de carrés

Q8 — Soient $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$. On suppose que 7 divise $a^2 + b^2$. Démontrer qu'alors 7 divise a et b.

§ 4 Divisibilité par 13 d'un « grand nombre »

Q9 — Démontrer que 13 divise $2^{70} + 3^{70}$.

§ 5 Primalité relative d'une somme et d'un produit

Q10 — Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Démontrer que a et b sont premiers entre eux si et seulement si $a + b$ et $a \cdot b$ sont premiers entre eux.

§ 6 PGCD DE DEUX NOMBRES DE FIBONACCI

On considère la suite de Fibonacci $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, définie par* $u_0 = 0$*,* $u_1 = 1$ *et, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$*.*

Q11 — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$, $u_n \in \mathbb{N}$ et $u_n < u_{n+1}$.

Q12 — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} \cdot u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n\,.$$

Q13 — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \wedge u_{n+1} = 1\,.$$

Q14 — Démontrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{m+n} = u_m \cdot u_{n+1} + u_{m-1} \cdot u_n\,.$$

Q15 — Déduire de **Q14** que, pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$:

$$u_m \wedge u_n = u_m \wedge u_{m+n}\,.$$

Q16 — Soit n et m deux entiers naturels tels que $1 \leqslant m \leqslant n$. Considérons la division euclidienne de n par m :

$$n = q \cdot m + r$$

où $(q,r) \in \mathbb{N} \times [\![0, m-1]\!]$. Démontrer que :

$$u_m \wedge u_r = u_m \wedge u_n\,.$$

Q17 — Déduire de **Q16** que, pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^*$:

$$u_m \wedge u_n = u_{m\wedge n}\,.$$

Q18 — Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n à l'aide du nombre d'or $\Phi := \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Q19 — Donner un équivalent « simple » de u_n.

§ 7 ÉQUATIONS DE CONGRUENCES AFFINES

Q20 — Résoudre l'équation :

$$5 \cdot x + 4 \equiv 3\ [13]$$

d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$.

Q21 — Résoudre l'équation :

$$5 \cdot x + 4 \equiv 3\ [35]$$

d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$.

§ 8 Équations diophantiennes d'ordre un en deux variables

Q22 — Résoudre l'équation :

$$429 \cdot x + 700 \cdot y = 1$$

d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. On pourra commencer par chercher une solution particulière, avant de les déterminer toutes au moyen d'un raisonnement par analyse et synthèse.

Q23 — Résoudre l'équation :

$$323 \cdot x - 391 \cdot y = 365$$

d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

§ 9 Une équation diophantienne d'ordre trois en deux variables

On souhaite résoudre l'équation :

$$(E) \quad m^3 - n^3 = 999$$

d'inconnue $(m, n) \in \mathbb{N}^2$.

Q24 — Soit (m, n) une solution de (E). Démontrer que $m - n$ est un diviseur positif de 999 inférieur à 10, puis dresser la liste de toutes les valeurs possibles du couple $(m - n, mn)$.

Q25 — À l'aide de **Q24**, déterminer l'ensemble solution de l'équation (E).

§ 10 Congruences simultanées et théorème des restes chinois

Soient m_1, m_2 *des entiers premiers entre eux et* $(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2$. *On considère le système d'équations de congruences :*

$$(S_2) \quad \begin{cases} x & \equiv & a_1 & [m_1] \\ x & \equiv & a_2 & [m_2] \end{cases}$$

d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$.

Q26 — Démontrer que le système (S_2) possède une solution.

Q27 — Soit x_p une solution particulière de (S_2). Démontrer :

$$\mathrm{Sol}_{(S_2)} = \left\{ x_p + k \cdot m_1 \cdot m_2 \; : \; k \in \mathbb{Z} \right\} .$$

Nous souhaitons étendre le résultat précédent au cas de trois équations de congruences simultanées. Soient à présent m_1, m_2, m_3 *des entiers deux-à-deux premiers entre eux et* $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{Z}^3$. *On considère le système d'équations de congruences :*

$$(S_3) \quad \begin{cases} x & \equiv & a_1 & [m_1] \\ x & \equiv & a_2 & [m_2] \\ x & \equiv & a_3 & [m_3] \end{cases}$$

d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$.

Q28 — Déduire de **Q26** et **Q27** que le système (S_3) possède une solution et que :

$$\mathrm{Sol}_{(S_3)} = \left\{ x_p + k \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \; : \; k \in \mathbb{Z} \right\} .$$

où x_p désigne une solution particulière de (S_3).

Q29 — Une bande de 17 pirates s'est emparée d'un butin composé de pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se les partager également, et de donner le reste au cuisinier. Celui-ci recevrait alors 3 pièces. Mais les pirates se querellent, et six d'entre eux sont tués. Le cuisinier recevrait alors 4 pièces. Dans un naufrage ultérieur, seuls le butin, six pirates et le cuisinier sont sauvés, et le partage donnerait alors 5 pièces d'or à ce dernier. Quelle est la fortune minimale que peut espérer le cuisinier quand il décide d'empoisonner le reste des pirates ?