Un corrigé du devoir Libre n°7

§ 1 Convergence simple d'une série de fonctions

Q1 — Soit $x \in]0,\pi[$. Exprimer $\dfrac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$ en fonction de $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Comme $x \in]0,\pi[$, $\sin(x) > 0$ donc $\dfrac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$ est bien défini. Puisque $0 < \dfrac{x}{2} < \dfrac{\pi}{2}$, $t := \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ est également bien défini. D'après le cours (C2.61) :

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \text{et} \qquad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Nous en déduisons que $1-\cos(x) = \dfrac{2t^2}{1+t^2}$ puis $\dfrac{1-\cos(x)}{\sin(x)} = t$, i.e. $\boxed{\dfrac{1-\cos(x)}{\sin(x)} = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)}$.

Q2 — Calculer, pour tout $x \in]0,\pi[$:

$$I(x) := \int_0^1 \frac{\sin(x)}{t^2 - 2t\cos(x) + 1}\, \mathrm{d}t.$$

- Soit $x \in]0,\pi[$. Alors $\sin(x) > 0$ et, pour tout $t \in [0,1]$:

$$t^2 - 2t\cos(x) + 1 = (t-\cos(x))^2 + 1 - \cos^2(x) = (t-\cos(x))^2 + \sin^2(x) > 0$$

donc l'intégrale $I(x)$ est bien définie.

- Nous calculons :

$$\begin{aligned}
I(x) &= \sin(x) \int_0^1 \frac{1}{(t-\cos(x))^2 + \sin^2(x)}\, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\sin(x)} \int_0^1 \frac{1}{\left(\dfrac{t-\cos(x)}{\sin(x)}\right)^2 + 1}\, \mathrm{d}t \qquad [\sin(x) \neq 0] \\
&= \int_{-\mathrm{cotan}(x)}^{\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}} \frac{1}{u^2+1}\, \mathrm{d}u \qquad \left[\text{changement de variable } u = \frac{t-\cos(x)}{\sin(x)}\right] \\
&= \mathrm{Arctan}\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \mathrm{Arctan}\,(-\mathrm{cotan}(x)) \qquad [\text{cf. } \textbf{Q1}] \\
&= \frac{x}{2} + \mathrm{Arctan}\,(\mathrm{cotan}(x)) \qquad \left[\text{car } \frac{x}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\text{ et Arctan est impaire}\right].
\end{aligned}$$

- La fonction f définie par :

$$f \left| \begin{array}{ccc}]0,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \mathrm{Arctan}(\mathrm{cotan}(y)) \end{array} \right.$$

est définie et dérivable sur $]0,\pi[$ et, pour tout $y \in]0,\pi[$:

$$f'(y) = \mathrm{cotan}'(y) \cdot \frac{1}{1+\mathrm{cotan}^2(y)} = -\frac{1}{\sin^2(y)} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{\cos^2(y)}{\sin^2(y)}} = -1.$$

Par caractérisation des fonctions constantes sur un intervalle, la fonction g définie par :

$$g \left| \begin{array}{ccc}]0,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & f(y) + y \end{array} \right.$$

est constante sur $]0,\pi[$. Comme :

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right) + \frac{\pi}{2} = 0 + \frac{\pi}{2}$$

nous obtenons, pour tout $y \in]0,\pi[$, $f(y) = \dfrac{\pi}{2} - y$.

- D'après les deux points précédents, $\boxed{I(x) = \dfrac{\pi - x}{2}.}$

Q3 — Démontrer que, pour tout $(n,t,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\sin(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} t^{k-1}\sin(kx)\right)\left(t^2 - 2t\cos(x) + 1\right) + t^n\left(\sin((n+1)x) - t\sin(nx)\right).$$

- L'identité à prouver est claire pour $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$ et $t = 0$ (elle se réécrit $\sin(x) = \sin(x)$). Nous fixons $(n,t,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ pour la suite.
- Nous calculons :

$$(\star) \qquad \sum_{k=1}^{n} t^k \sin(kx) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(te^{ix}\right)^k\right)$$

et sommes conduits à distinguer les cas $te^{ix} \neq 1$ et $te^{ix} = 1$ pour ce faire.

• *Cas où $te^{ix} \neq 1$* D'après $(\star)$:

$$(\star\star) \qquad \sum_{k=1}^{n} t^k\sin(kx) = \mathrm{Im}\left(te^{ix}\cdot\sum_{k=1}^{n} t^{k-1}\sin((k-1)x)\right) = \mathrm{Im}\left(te^{ix}\cdot\sum_{k=0}^{n-1} t^k\sin(kx)\right) = \mathrm{Im}\left(te^{ix}\,\frac{1-t^ne^{inx}}{1-te^{ix}}\right).$$

Comme :

$$te^{ix}\,\frac{1-t^ne^{inx}}{1-te^{ix}} = \frac{te^{ix} - t^{n+1}e^{i(n+1)x}}{1-te^{ix}} = \frac{\left(te^{ix} - t^{n+1}e^{i(n+1)x}\right)\cdot\left(1-te^{-ix}\right)}{\left(1-te^{ix}\right)\cdot\left(1-te^{-ix}\right)} = \frac{te^{ix} - t^2 - t^{n+1}e^{i(n+1)x} + t^{n+2}e^{inx}}{t^2 - 2t\cos(x) + 1}$$

nous déduisons de $(\star\star)$ que :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} t^k\sin(kx)\right)\cdot\left(t^2 - 2t\cos(x) + 1\right) = t\sin(x) - t^{n+1}\sin((n+1)x) + t^{n+2}\sin(nx)$$

puis :

$$t\sin(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} t^k\sin(kx)\right)\cdot\left(t^2 - 2t\cos(x) + 1\right) + t^{n+1}\left(\sin((n+1)x) - t\sin(nx)\right).$$

En divisant chaque membre de cette identité par $t \neq 0$, nous obtenons le résultat demandé.

• *Cas où $te^{ix} = 1$ et $t > 0$* D'après le cas d'égalité de deux formes trigonométriques, $t = 1$ et $x \equiv 0\ [2\pi]$. Alors $\sin(x) = 0$ et :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} t^{k-1}\sin(kx)\right)\cdot\left(t^2 - 2t\cos(x) + 1\right) + t^n\left(\sin((n+1)x) - t\sin(nx)\right) = 0\cdot 0 + 1\cdot(0-0) = 0$$

et donc l'identité à établir est vérifiée.

• *Cas où $te^{ix} = 1$ et $t < 0$* Alors $1 = (-t)e^{i(x+\pi)}$. D'après le cas d'égalité de deux formes trigonométriques, $t = -1$ et $x \equiv 0\ [\pi]$. Alors $\sin(x) = 0$ et :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} t^{k-1}\sin(kx)\right)\cdot\left(t^2 - 2t\cos(x) + 1\right) + t^n\left(\sin((n+1)x) - t\sin(nx)\right) = 0\cdot 0 + 1\cdot(0-0) = 0$$

ce qui livre l'identité à prouver dans ce cas.

Q4 — En déduire que, pour tout $x \in]0,\pi[$:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(kx)}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi - x}{2}.$$

• Fixons $x \in]0,\pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

• Soit $t \in [0,1]$. D'après le début de la réponse apportée en **Q2**, $t^2 - 2t\cos(x) + 1 \neq 0$. En divisant chaque membre de l'identité établie en **Q3** par $t^2 - 2t\cos(x) + 1 \neq 0$, il vient :

$$\frac{\sin(x)}{t^2 - 2t\cos(x) + 1} = \sum_{k=1}^{n} t^{k-1}\sin(kx) + t^n\cdot\frac{\sin((n+1)x) - t\sin(nx)}{t^2 - 2t\cos(x) + 1}.$$

En intégrant cette quantité en t sur $[0,1]$ et en appliquant la linéarité de l'intégrale, nous obtenons :

$$\underbrace{\int_0^1 \frac{\sin(x)}{t^2-2t\cos(x)+1}\,\mathrm{d}t}_{I(x)} = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx)\cdot\int_0^1 t^{k-1}\,\mathrm{d}t + \underbrace{\int_0^1 t^n\cdot\frac{\sin((n+1)x)-t\sin(nx)}{t^2-2t\cos(x)+1}\,\mathrm{d}t}_{=:J_n(x)}.$$

De cette identité et de **Q2**, nous déduisons :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi-x}{2} - J_n(x)\,.$$

Il nous reste à établir que $J_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ pour démontrer le résultat demandé.

- D'après le début de la réponse apportée en **Q2** :

$$(\star)\qquad \forall\, t\in[0,1]\quad t^2-2t\cos(x)+1 \geqslant \sin^2(x)>0\,.$$

D'après l'inégalité triangulaire :

$$(\star\star)\qquad \forall\, t\in[0,1]\quad |\sin((n+1)x)-t\sin(nx)| \leqslant |\sin((n+1)x)|+|t|\cdot|\sin(nx)| \leqslant 2\,.$$

De $(\star)$, $(\star\star)$ et, pour tout $t\in[0,1]$, $t^n\geqslant 0$, nous déduisons que :

$$(\star\star\star)\qquad \forall\, t\in[0,1]\quad \left|t^n\cdot\frac{\sin((n+1)x)-t\sin(nx)}{t^2-2t\cos(x)+1}\right| \leqslant \frac{2}{\sin^2(x)}\cdot t^n\,.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} |J_n(x)| &\leqslant \int_0^1 \left|t^n\cdot\frac{\sin((n+1)x)-t\sin(nx)}{t^2-2t\cos(x)+1}\right|\mathrm{d}t && \text{[majoration de la valeur absolue d'une intégrale]}\\ &\leqslant \frac{2}{\sin^2(x)}\cdot\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t && [(\star\star\star)\text{, croissance et linéarité de l'intégrale}]\,. \end{aligned}$$

Finalement :

$$0\leqslant |J_n(x)| \leqslant \frac{2}{(n+1)\cdot\sin^2(x)}$$

et, en appliquant le théorème d'encadrement, $J_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Q5 — Justifier l'existence des deux doubles limites suivantes :

$$\lim_{x\to0^+}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(kx)}{k} \qquad\text{et}\qquad \lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to0^+}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(kx)}{k}$$

et les comparer. Qu'en déduire?

- D'après **Q4**, pour tout $x\in\,]0,\pi[$:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi-x}{2}$$

donc, par opérations sur les limites :

$$\boxed{\lim_{x\to0^+}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(kx)}{k} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1\,.}$$

- Par linéarité de la limite (la somme est finie) et la continuité de sin en 0, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\lim_{x\to0^+}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(kx)}{k} = \sum_{k=1}^{n} 0 = 0$$

et donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to0^+}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(kx)}{k} = 0\,.}$$

- Des deux points précédents, nous déduisons que les deux limites :

$$\lim_{x\to 0^+} \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to 0^+} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}$$

existent, mais sont différentes. Donc :

$$\boxed{\text{échanger la place des symboles } \lim_{x\to 0^+} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \text{ dans une expression peut modifier sa valeur.}}$$

§ 2 UNE TRANSFORMATION INTÉGRALE

Q6 — Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Démontrer que la fonction :

$$\Phi(f) \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction :

$$\widetilde{f} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{f(t)}{1+t^2} \end{array} \right.$$

est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, $\Phi(f)$ est l'unique primitive de $\widetilde{f}$ nulle en 0. Ainsi, $\Phi(f)$ est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$ avec comme dérivée $\widetilde{f}$, qui est continue sur $\mathbb{R}$. $\boxed{\text{La fonction } \Phi(f) \text{ est donc de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$

On définit l'application Φ comme suit.

$$\Phi \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \Phi(f) \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Q7 — Soient $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(f_1,f_2) \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})^2$. Démontrer l'égalité de fonctions :

$$\Phi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 \Phi(f_1) + \lambda_2 \Phi(f_2)\,.$$

- Les fonctions $\Phi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)$ et $\lambda_1\Phi(f_1)+\lambda_2\Phi(f_2)$ ont même ensemble de départ ($\mathbb{R}$) et même ensemble d'arrivée ($\mathbb{R}$).
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous calculons :

$$\begin{aligned}
\Phi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) &= \int_0^x \frac{(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x \frac{\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t && [\text{définition de la fonction } \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2] \\
&= \int_0^x \lambda_1 \cdot \frac{f_1(t)}{1+t^2} + \lambda_2 \cdot \frac{f_2(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \lambda_1 \cdot \int_0^x \frac{f_1(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \lambda_2 \cdot \int_0^x \frac{f_2(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t && [\text{linéarité de l'intégrale}] \\
&= \lambda_1 \cdot \Phi(f_1)(x) + \lambda_2 \cdot \Phi(f_2)(x) \\
&= (\lambda_1 \Phi(f_1) + \lambda_2 \Phi(f_2))(x) && [\text{définition de la fonction } \lambda_1\Phi(f_1)+\lambda_2\Phi(f_2)]
\end{aligned}$$

- Des deux points précédents, nous déduisons que $\boxed{\Phi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1\Phi(f_1) + \lambda_2\Phi(f_2)}$.

Q8 — Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_k par :

$$f_k \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^k \end{array} \right. .$$

Calculer les fonctions $\Phi(f_0)$, $\Phi(f_1)$, $\Phi(f_2)$, $\Phi(f_3)$.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\Phi(f_0)(x) = \int_0^x \frac{f_0(t)}{1+t^2}\, dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt = \text{Arctan}(x)\,.$$

Donc $\boxed{\Phi(f_0) \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \text{Arctan}(x) \end{array} \right. .}$

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\Phi(f_1)(x) = \int_0^x \frac{f_1(t)}{1+t^2}\, dt = \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\, dt = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{2t}{1+t^2}\, dt = \frac{1}{2}\cdot \ln\left(1+x^2\right)\,.$$

Donc $\boxed{\Phi(f_1) \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{2}\cdot\ln\left(1+x^2\right) \end{array} \right. .}$

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\Phi(f_2)(x) = \int_0^x \frac{f_2(t)}{1+t^2}\, dt = \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\, dt = \int_0^x \frac{1+t^2-1}{1+t^2}\, dt = \int_0^x 1\, dt - \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt = x - \Phi(f_0)(x)\,.$$

Donc $\boxed{\Phi(f_2) \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - \text{Arctan}(x) \end{array} \right. .}$

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\Phi(f_3)(x) = \int_0^x \frac{f_3(t)}{1+t^2}\, dt = \int_0^x \frac{t^3}{1+t^2}\, dt = \int_0^x \frac{t+t^3-t}{1+t^2}\, dt = \int_0^x t\, dt - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\, dt = \frac{x^2}{2} - \Phi(f_1)(x)\,.$$

Donc $\boxed{\Phi(f_3) \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{2}\cdot\left(x^2 - \ln\left(1+x^2\right)\right) \end{array} \right. .}$

Q9 — Résoudre l'équation :

$$(E_0) \qquad \Phi(f) = 0_{\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})} \quad , \quad f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

où $0_{\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ désigne la fonction nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Nous raisonnons par analyse et synthèse.

• *Analyse* Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ solution de (E_0). D'après la solution apportée en **Q6** la fonction $\Phi(f)$ est dérivable, de dérivée la fonction :

$$\widetilde{f} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{f(t)}{1+t^2} \end{array} \right. .$$

Comme la fonction $\Phi(f)$ est constante, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$0 = \widetilde{f}(t) = \frac{f(t)}{1+t^2}$$

et donc $f = 0_{\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})}$.

• *Synthèse* Réciproquement, la fonction $0_{\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ est solution de (E_0).

• *Conclusion* $\boxed{\text{Sol}_{(E_0)} = \left\{0_{\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})}\right\}\,.}$

Q10 — Déduire de **Q7** et **Q9** que l'application Φ est injective.

Soit $(f_1, f_2) \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})^2$ tel que $\Phi(f_1) = \Phi(f_2)$. Ainsi :

$$(\star) \qquad \Phi(f_1) - \Phi(f_2) = 0_{\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})}\,.$$

D'après **Q7** :

$$(\star\star) \qquad \Phi(f_1) - \Phi(f_2) = \Phi(f_1 - f_2)\,.$$

De $(\star)$ et $(\star\star)$, nous déduisons que $f_1 - f_2$ est solution de (E_0). D'après **Q9**, $f_1 - f_2 = 0_{\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ et donc $f_1 = f_2$.

Q11 — L'application Φ est-elle surjective ?

Si Φ était surjective, alors toute fonction de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ serait l'image d'une fonction de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ par Φ et donc, d'après **Q6**, toute fonction de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ serait de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, ce qui n'est pas (e.g. la fonction « valeur absolue » est continue sur $\mathbb{R}$ mais non dérivable en 0). Donc $\boxed{\text{l'application } \Phi \text{ n'est pas surjective.}}$

Q12 — Déterminer l'ensemble $\Phi\left(\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})\right) \subset \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

- Nous démontrons que :

$$\boxed{\Phi\left(\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})\right) = \left\{g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \;:\; g(0) = 0\right\}\,.}$$

$\boxed{\subset}$ Soit $g \in \Phi\left(\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})\right)$. Alors il existe $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\Phi(f) = g$. D'après la solution apportée à **Q6**, $\Phi(f)$ donc g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et nulle en 0.

$\boxed{\supset}$ Soit $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $g(0) = 0$. Démontrons qu'il existe $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\Phi(f) = g$, en raisonnant par analyse et synthèse.

— *Analyse* Supposons qu'il existe $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\Phi(f) = g$. D'après **Q6**, la fonction $\Phi(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\left(\Phi(f)\right)'(x) = \frac{f(x)}{1+x^2}\,.$$

De $\Phi(f) = g$, nous déduisons donc par dérivation que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{f(x)}{1+x^2} = g'(x)\,.$$

Ainsi f est-elle définie par :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left(1+x^2\right)\cdot g'(x)\,. \end{array} \right.$$

— *Synthèse* Considérons la fonction f obtenue en fin d'analyse.

. Comme la fonction g' est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

. Les fonctions $\Phi(f)$ et g ont même ensemble de départ ($\mathbb{R}$) et même ensemble d'arrivée ($\mathbb{R}$). Il reste à vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Phi(f)(x) = g(x)$, pour savoir que les fonctions $\Phi(f)$ et g sont égales.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\Phi(f)(x) := \int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\left(1+t^2\right)\cdot g'(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x g'(t)\,\mathrm{d}t = g(x) - g(0)\,.$$

Comme $g(0) = 0$, $\Phi(f)(x) = g(x)$.

Q13 — Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation :

$$(E_\lambda) \qquad \Phi(f) = \lambda f \quad , \quad f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})\,.$$

Le cas où $\lambda = 0$ a déjà été considéré en **Q9**. Nous supposons désormais que $\lambda \neq 0$ et résolvons l'équation (E_λ) en raisonnant par analyse et synthèse.

- *Analyse* Soit f une fonction solution de (E_λ). D'après **Q7** :

$$f = \frac{1}{\lambda}\cdot\lambda f = \frac{1}{\lambda}\cdot\Phi(f) = \Phi\left(\frac{1}{\lambda}f\right) \in \Phi\left(\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})\right)\,.$$

D'après **Q12**, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $f(0) = 0$. Par ailleurs, d'après **Q6** la fonction $\Phi(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\left(\Phi(f)\right)'(x) = \frac{f(x)}{1+x^2}\,.$$

De $\Phi(f) = \lambda f$, nous déduisons donc par dérivation que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{f(x)}{1+x^2} = \lambda f'(x)\,.$$

La fonction f est donc solution de l'EDLH1 :

$$(\mathscr{E}_\lambda) \qquad y' - \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot y = 0 \quad , \quad y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})\,.$$

La fonction :

$$a \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -\dfrac{1}{\lambda} \cdot \dfrac{1}{1+x^2} \end{array} \right.$$

est continue sur $\mathbb{R}$ et admet pour primitive la fonction :

$$A \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -\dfrac{\operatorname{Arctan}(x)}{\lambda} \end{array} \right. .$$

D'après le cours :

$$\mathrm{Sol}_{(\mathscr{E}_\lambda)} = \operatorname{Vect}\left(y_H \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{\operatorname{Arctan}(x)/\lambda} \end{array} \right. \right).$$

Ainsi existe-t-il $k \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = k \cdot y_H(x) = k \cdot e^{\operatorname{Arctan}(x)/\lambda}\,.$$

De $f(0) = 0$, nous déduisons $k = 0$, puis :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = 0\,.$$

La fonction nulle sur $\mathbb{R}$, notée $0_{\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ est donc la seule candidate possible pour être solution de (E_λ).

- *Synthèse* La fonction $0_{\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ est clairement solution de l'équation (E_λ).
- *Conclusion* $\boxed{\mathrm{Sol}_{(E_\lambda)} = \left\{0_{\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})}\right\}\,.}$