Devoir Libre n°7

Pour le vendredi 9 décembre

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Les assertions seront toutes justifiées avec soin, les raisonnements structurés, les résultats encadrés.

§ 1 Convergence simple d'une série de fonctions

Q1 — Soit $x \in]0,\pi[$. Exprimer $\dfrac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$ en fonction de $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Q2 — Calculer, pour tout $x \in]0,\pi[$:

$$I(x) := \int_0^1 \frac{\sin(x)}{t^2 - 2t\cos(x) + 1}\,\mathrm{d}t\,.$$

Q3 — Démontrer que, pour tout $(n,t,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\sin(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} t^{k-1}\sin(kx)\right)\left(t^2 - 2t\cos(x) + 1\right) + t^n\left(\sin((n+1)x) - t\sin(nx)\right)\,.$$

Q4 — En déduire que, pour tout $x \in]0,\pi[$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi - x}{2}\,.$$

Q5 — Justifier l'existence des deux doubles limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0^+}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(kx)}{k} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to 0^+}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(kx)}{k}$$

et les comparer. Qu'en déduire ?

§ 2 Une transformation intégrale

Q6 — Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Démontrer que la <u>fonction</u> :

$$\Phi(f) \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

On définit l'application Φ *comme suit.*

$$\Phi \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \Phi(f) \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Q7 — Soient $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(f_1,f_2) \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})^2$. Démontrer l'égalité de fonctions :

$$\Phi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 \Phi(f_1) + \lambda_2 \Phi(f_2)\,.$$

Q8 — Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_k par :

$$f_k \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^k\,. \end{array} \right.$$

Calculer les fonctions $\Phi(f_0)$, $\Phi(f_1)$, $\Phi(f_2)$, $\Phi(f_3)$.

Q9 — Résoudre l'équation :

$$(E_0) \qquad \Phi(f) = 0_{\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})} \quad , \quad f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

où $0_{\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ désigne la fonction nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Q10 — Déduire de **Q7** et **Q9** que l'application Φ est injective.

Q11 — L'application Φ est-elle surjective ?

Q12 — Déterminer l'ensemble $\Phi\left(\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})\right) \subset \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Q13 — Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation :

$$(E_\lambda) \qquad \Phi(f) = \lambda f \quad , \quad f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})\,.$$