UN CORRIGÉ DEVOIR LIBRE N°6 ADAPTÉ D'UN DOCUMENT DE M. TREMEAU

§ 1 FONCTION ARGUMENT TANGENTE HYPERBOLIQUE

Soient ch, sh *et* th *les fonctions cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique et tangente hyperbolique définies ci-dessous.*

$$\mathrm{ch} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x+e^{-x}}{2} \end{array} \right. \qquad \mathrm{sh} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x-e^{-x}}{2} \end{array} \right. \qquad \mathrm{th} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \end{array} \right.$$

Q1 — Simplifier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On calcule :

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) & = & \left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 & \\ & = & \dfrac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4} - \dfrac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4} & [\text{propriétés algébriques de exp}] \\ & = & 1\,. & \end{array}$$

Donc $\boxed{\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1.}$

Q2 — Calculer les dérivées de ch, sh et th. On exprimera la dérivée de th en fonction de th.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- $\mathrm{ch}'(x) = \dfrac{e^x + (-1)\times e^{-x}}{2}$ donc $\boxed{\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x).}$
- $\mathrm{sh}'(x) = \dfrac{e^x - (-1)\times e^{-x}}{2}$ donc $\boxed{\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x).}$
- $\mathrm{th}'(x) = \dfrac{\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)}$ donc $\boxed{\mathrm{th}'(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1 - \mathrm{th}^2(x).}$

Q3 — En étudiant les variations de th, démontrer que th est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I que l'on précisera.

- Comme $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{th}(-x) = -\mathrm{th}(x)$, la fonction th est impaire.
- Pout tout $x \in \mathbb{R}$, $(\mathrm{th})'(x)\frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} > 0$. th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- La fonction th est continue sur $\mathbb{R}$.
- Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\mathrm{th}(x) = \frac{e^x\left(1-e^{-2x}\right)}{e^x\left(1+e^{-2x}\right)} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$$
on a $\mathrm{th}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$, puis $\mathrm{th}(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -1$ par imparité.

- D'après le théorème de la bijection :

$$\boxed{\text{th établit donc une bijection de } \mathbb{R} \text{ dans } I = \left]\lim_{x\to-\infty} \text{th}(x), \lim_{x\to+\infty} \text{th}(x)\right[=]-1,1[.}$$

La fonction argument tangente hyperbolique est la fonction $\text{Argth}\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$*, qui est l'application réciproque de la fonction* $\text{th}^{|I}\colon \mathbb{R} \longrightarrow I$.

Q4 — Démontrer que Argth est impaire (sans utiliser le résultat de la question suivante).

Comme Argth est la bijection réciproque de $\text{th}^{|I}\colon \mathbb{R} \longrightarrow I$, on a $\text{Argth} \circ \text{th}^{|I} = \text{id}_{\mathbb{R}}$ et $\text{th}^{|I} \circ \text{Argth} = \text{id}_I$.

- L'ensemble $I =]-1,1[$ de définition de Argth est symétrique par rapport à 0.
- Soit $y \in]-1,1[$. Comme th est impaire :

$$\text{th}(-\text{Argth}(y)) = -\text{th}(\text{Argth}(y)) = -y\,.$$

En appliquant Argth à chaque membre, il vient :

$$-\text{Argth}(y) = \text{Argth}(\text{th}(-\text{Argth}(y))) = \text{Argth}(-y)\,.$$

Q5 — Soit $y \in I$. Calculer $\text{Argth}(y)$.

Par définition $\text{th}(y)$ est l'unique solution de l'équation $\text{th}(x) = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Posons $x := \text{th}(y)$.

$$\begin{aligned}
\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = y \quad &\Longrightarrow \quad e^x - e^{-x} = ye^x + e^{-x}y \\
&\Longrightarrow \quad e^{2x} - 1 = ye^{2x} + y \qquad [\text{propriétés algébriques de exp}] \\
&\Longrightarrow \quad e^{2x}(1-y) = 1+y \\
&\Longrightarrow \quad e^{2x} = \frac{1+y}{1-y} \qquad [y \neq 1] \\
&\Longrightarrow \quad 2x = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \qquad \left[\frac{1+y}{1-y} > 0\right]
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\text{Argth}(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).}$

Q6 — Calculer la dérivée de Argth.

D'après Q5, Argth est dérivable sur $]-1,1[$ et, pour tout $y \in]-1,1[$:

$$\text{Argth}'(y) = \frac{1}{2} \times \frac{1 \times (1-y) - (-1) \times (1+y)}{(1-y)^2} \times \frac{1}{\frac{1+y}{1-y}}$$

donc $\boxed{\text{Argth}'(y) = \frac{1}{1-y^2}.}$

§ 2 Une équation fonctionnelle

Le but de cette partie est de résoudre le problème suivant.

> *Déterminer les fonctions définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, dérivables en 0 et qui vérifient, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = \dfrac{2f(x)}{1+(f(x))^2}$.*

Q7 — Déterminer les fonctions constantes solutions du problème posé.

- Si il existe un réel C tel que pour tout réel x, $f(x) = C$, f étant solution du problème posé, alors C vérifie $C = \dfrac{2C}{1+C^2}$ ce qui équivaut à $C(C^2-1) = 0$ soit $C = 0$ ou $C = 1$ ou $C = -1$.
- Réciproquement, les fonctions :

$$f_1 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -1 \end{array} \right. \qquad f_2 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 0 \end{array} \right. \qquad f_3 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 \end{array} \right.$$

  sont solutions du problèmes.
- Donc $\boxed{\text{les fonctions constantes solutions du problèmes sont } f_1, f_2, f_3.}$

Q8 — Déterminer les valeurs possibles de $f(0)$ si f est solution.

Si f est solution, $f(0)$ vérifie $f(0) = \dfrac{2f(0)}{1+f(0)^2}$ ce qui donne comme à la question précédente :

$$\boxed{f(0) = 0 \text{ ou } f(0) = 1 \text{ ou } f(0) = -1.}$$

Q9 — Démontrer que, si f est solution, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad -1 \leqslant f(x) \leqslant 1\,.$$

On pourra, au préalable, exprimer $f(x)$ en fonction de $f\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Pour tout réel x, $1 - |f(x)| = 1 - \dfrac{2a}{1+a^2} = \dfrac{(1-a)^2}{1+a^2}$ où $a = \left|f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right|$. Ainsi pour tout réel x, $|f(x)| \leqslant 1$ soit $\boxed{-1 \leqslant f(x) \leqslant 1.}$

Q10 — Démontrer que, si f est solution, alors $-f$ est aussi solution.

Supposons que f soit solution. Alors $-f$ est dérivable en 0 et, pour tout réel x :

$$(-f)(2x) = -f(2x) = -\frac{2f(x)}{1+(f(x))^2} = \frac{2(-f(x))}{1+(-f(x))^2}$$

ce qui montre que $\boxed{-f \text{ est aussi solution.}}$

Q11 — Démontrer que th est solution du problème.

Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}
\frac{2\,\mathrm{th}(x)}{1+(\mathrm{th}(x))^2} &= \frac{2\,\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(x)}{(\mathrm{ch}(x))^2+(\mathrm{sh}(x))^2}\\
&= \frac{2\,\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(x)}{2(\mathrm{ch}(x))^2-1}\\
&= \frac{(e^x+e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2-2}\\
&= \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}} \qquad [\text{propriétés algébriques de exp}]\\
&= \mathrm{th}(2x)
\end{aligned}$$

ce qui montre que $\boxed{\text{th est solution du problème posé.}}$

Dans les questions Q12 à Q16, on suppose que <u>f est une solution du problème telle que $f(0)=1$ et f n'est pas constante</u>. On considère $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que $f(x_0) \neq f(0)$ et l'on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n := f\left(\frac{x_0}{2^n}\right).$$

Q12 — D point(s) — émontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.

- On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_0}{2^n} = 0$. Or f est dérivable donc continue en 0 donc $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1$.
- Il en résulte que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.}$

Q13 — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, établir une relation entre u_n et u_{n+1}. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ garde un signe constant, puis étudier sa monotonie suivant le signe de u_0.

- Pour tout entier n :
$$\boxed{u_n = f\left(2\frac{x_0}{2^{n+1}}\right) = \frac{2u_{n+1}}{1+u_{n+1}^2}.}$$
- Comme pour tout n, $1+u_{n+1}^2 > 0$, u_{n+1} et u_n ont toujours le même signe donc pour tout entier n, $\boxed{u_n \text{ a le signe de } u_0.}$
- D'autre part pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n = \frac{u_{n+1}(u_{n+1}^2)-1}{1+u_{n+1}^2}$. Puisque pour tout x, $f^2(x) \leqslant 1$, on en déduit que pour tout n, $u_{n+1}^2 - 1 \leqslant 0$ et que $(u_{n+1}-u_n)u_{n+1} \leqslant 0$.
- Ainsi $\boxed{\text{si } u_0 \geqslant 0 \text{ la suite } u \text{ est décroissante et si } u_0 \leqslant 0 \text{ la suite } u \text{ est croissante.}}$

Q14 — En utilisant les résultats des questions Q12 et Q13, aboutir à une contradiction.

Comme $f(x_0) \neq f(0)$, u_0 appartient à $[-1,1[$. Distinguons deux cas.
- Si u_0 est négatif, alors tous les termes de la suite u sont négatifs et la suite u ne peut converger vers 1.
- Si u_0 appartient à $[0,1[$, la suite u est décroissante et on a $\lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant u_0 < 1$ ce qui conduit à $1 < 1$.

Dans les deux cas, $\boxed{\text{nous avons obtenu une contradiction.}}$

Q15 — Que peut-on dire si l'hypothèse « $f(0) = 1$ » est remplacée par l'hypothèse « $f(0) = -1$ » ?

Si $f(0) = -1$, alors $g = -f$ est une solution du problème posé qui vérifie $g(0) = 1$ $\boxed{\text{ce qui est impossible}}$ d'après la question précédente.

Q16 — Conclusion ?

On déduit des questions précédentes qu' :

$\boxed{\text{il n'existe pas de fonctions non constantes solution du problème posé qui vérifie } f(0) = 1 \text{ ou } f(0) = -1.}$

Dans les questions Q17 à Q21, on suppose que f est une solution du problème posé et que $f(0) = 0$.

Q17 — En raisonnant par l'absurde et en considérant une suite du même type que celle des questions Q12 à Q16, démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) \neq -1 \text{ et } f(x) \neq 1\,.$$

Nous raisonnons par l'absurde.

- Supposons qu'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0) = 1$.
  - Soit v la suite définie par son terme général $v_n = f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)$.
  - On démontre comme en Q12 que v converge vers $f(0) = 0$.
  - Le calcul effectué en Q13 montre que la suite v est constante égale à $v_0 = 1$ et ne peut donc pas converger vers 0.
- De manière analogue, il est impossible qu'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0) = -1$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ -1 < f(x) < 1.}$

On définit alors la fonction g par :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{Argth}(f(x))\,. \end{array} \right.$$

Q18 — Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g(2x) = 2\,g(x)\,.$$

En utilisant l'expression de Argth trouvée en Q5, on a, pour tout réel x :

$$g(2x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+f(2x)}{1-f(2x)}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)^2\right) = 2\,\mathrm{Argth}(f(x)) = 2g(x)\,.$$

Q19 — Démontrer que g est dérivable en zéro.

La fonction f est dérivable en 0. La fonction Argth est dérivable sur $]-1,1[$ donc en $f(0)=0$. Par composition, $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est dérivable en } 0.}$

Q20 — Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_n = \frac{g\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}}.$$

Démontrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Soit x réel non nul. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x}{2^n} = 0$. Or g est dérivable en 0 et $g(0)=0$ donc $\lim\limits_{u\to 0} \frac{g(u)}{u} = g'(0)$. Il en résulte que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = g'(0).}$

Q21 — En déduire que g est linéaire, i.e. qu'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g(x)=ax$.

- Pour tout entier n :
$$v_n = \frac{g\left(2\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{2\frac{x}{2^{n+1}}} = \frac{g\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{\frac{x}{2^{n+1}}} = v_{n+1}$$
car $g(2b) = 2g(b)$ d'après Q18.
- La suite v est donc constante égale à $v_0 = \frac{g(x)}{x}$.
- Or elle converge vers $g'(0)$.

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad g(x) = g'(0)x$$

relation qui est encore valable pour $x=0$. $\boxed{\text{La fonction } g \text{ est donc linéaire.}}$

Q22 — Déterminer toutes les fonctions solutions du problème posé.

D'après Q8, si f est solution alors $f(0)\in\{-1,0,1\}$. La conclusion est donc scindée en trois parties.

- La seule solution f vérifiant $f(0)=-1$ est la fonction constante sur $\mathbb{R}$ égale à -1, d'après Q7 et Q16.
- La seule solution f vérifiant $f(0)=1$ est la fonction constante sur $\mathbb{R}$ égale à 1, d'après Q7 et Q16.
- Les solutions f vérifiant $f(0)=0$ sont précisément les fonctions :
$$\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{th}(ax) \end{array}\right.$$
où $a\in\mathbb{R}$, d'après Q11 et Q21.