Devoir Libre n°6

— 70 points —

Pour le lundi 14 novembre

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Les assertions seront toutes justifiées avec soin, les raisonnements structurés, les résultats encadrés.

§ 1 Fonction argument tangente hyperbolique

Soient ch, sh *et* th *les fonctions cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique et tangente hyperbolique définies ci-dessous.*

$$\mathrm{ch}\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\end{array}\right. \qquad \mathrm{sh}\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\end{array}\right. \qquad \mathrm{th}\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\end{array}\right.$$

Q1 — 2 point(s) — Simplifier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2(x)-\mathrm{sh}^2(x)$.

Q2 — 1+1+3=5 point(s) — Calculer les dérivées de ch, sh et th. On exprimera la dérivée de th en fonction de th.

Q3 — 4 point(s) — En étudiant les variations de th, démontrer que th est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I que l'on précisera.

La fonction argument tangente hyperbolique est la fonction $\mathrm{Argth}\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$*, qui est l'application réciproque de la fonction* $\mathrm{th}^{|I}\colon \mathbb{R} \longrightarrow I$.

Q4 — 3 point(s) — Démontrer que Argth est impaire (sans utiliser le résultat de la question suivante).

Q5 — 3 point(s) — Soit $y \in I$. Calculer $\mathrm{Argth}(y)$.

Q6 — 2 point(s) — Calculer la dérivée de Argth.

§ 2 Une équation fonctionnelle

Le but de cette partie est de résoudre le problème suivant.

Déterminer les fonctions définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, dérivables en 0 *et qui vérifient, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x)=\dfrac{2f(x)}{1+(f(x))^2}$.*

Q7 — 3 point(s) — Déterminer les fonctions constantes solutions du problème posé.

Q8 — 2 point(s) — Déterminer les valeurs possibles de $f(0)$ si f est solution.

Q9 — 4 point(s) — Démontrer que, si f est solution, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad -1 \leqslant f(x) \leqslant 1\,.$$

On pourra, au préalable, exprimer $f(x)$ en fonction de $f\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Q10 — 2 point(s) — Démontrer que, si f est solution, alors $-f$ est aussi solution.

Q11 — 4 point(s) — Démontrer que th est solution du problème.

Dans les questions Q12 à Q16, on suppose que f est une solution du problème telle que $f(0)=1$ et f n'est pas constante. On considère $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que $f(x_0) \neq f(0)$ et l'on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n := f\left(\frac{x_0}{2^n}\right).$$

Q12 — 2 point(s) — Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.

Q13 — 3 point(s) — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, établir une relation entre u_n et u_{n+1}. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ garde un signe constant, puis étudier sa monotonie suivant le signe de u_0.

Q14 — 5 point(s) — En utilisant les résultats des questions Q12 et Q13, aboutir à une contradiction.

Q15 — 3 point(s) — Que peut-on dire si l'hypothèse « $f(0)=1$ » est remplacée par l'hypothèse « $f(0)=-1$ » ?

Q16 — 3 point(s) — Conclusion ?

Dans les questions Q17 à Q21, on suppose que f est une solution du problème posé et que $f(0)=0$.

Q17 — 6 point(s) — En raisonnant par l'absurde et en considérant une suite du même type que celle des questions Q12 à Q16, démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) \neq -1 \text{ et } f(x) \neq 1.$$

On définit alors la fonction g par :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{Argth}(f(x)). \end{array} \right.$$

Q18 — 3 point(s) — Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g(2x) = 2\,g(x).$$

Q19 — 1 point(s) — Démontrer que g est dérivable en zéro.

Q20 — 3 point(s) — Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_n = \frac{g\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}}.$$

Démontrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Q21 — 3 point(s) — En déduire que g est linéaire, i.e. qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = ax$.

Q22 — 5 point(s) — Déterminer toutes les fonctions solutions du problème posé.