Un corrigé du devoir Libre n°5

Exercice 1 — Produit de la somme et de la somme des inverses de réels positifs

Soient $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$ et $(a_1, \dots, a_n)$ un n-uplet de réels strictement positifs.

Q1 — Démontrer :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) = n + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left(\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i}\right).$$

Le carré $[\![1,n]\!]^2$ admet la partition suivante :

$$(\star) \qquad [\![1,n]\!]^2 = \{(i,i) \,:\, i \in [\![1,n]\!]\} \sqcup \left\{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \,:\, 1 \leqslant i < j \leqslant n\right\} \sqcup \left\{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \,:\, 1 \leqslant j < i \leqslant n\right\}.$$

Nous calculons :

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) &= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i \frac{1}{a_j} \\
&= \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \frac{a_i}{a_j} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_i} + \sum_{1 \leqslant < i < j \leqslant n} \frac{a_i}{a_j} + \sum_{1 \leqslant < j < i \leqslant n} \frac{a_i}{a_j} \qquad [\text{cf. } (\star)] \\
&= n + \sum_{1 \leqslant < i < j \leqslant n} \frac{a_i}{a_j} + \sum_{1 \leqslant < i' < j' \leqslant n} \frac{a_{j'}}{a_{i'}}.
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) = n + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left(\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i}\right)}$.

Q2 — Démontrer que l'ensemble $A := \left\{x + \frac{1}{x} \,:\, x \in \mathbb{R}_{>0}\right\} \subset \mathbb{R}$ possède un minimum et calculer $\min(A)$.

La fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{>0} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + \dfrac{1}{x} \end{array} \right. .$$

est dérivable sur $\mathbb{R}_{>0}$ (fonction rationnelle) et, pour tout $x \in \mathbb{R}_{>0}$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$. D'où le tableau de variations suivant.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Nous en déduisons que pour tout $x > 0$, $f(x) := x + \frac{1}{x} \geqslant f(1) := 1 + \frac{1}{1} = 2$. Donc $\boxed{A \text{ est possède un minimum et } \min(A) = 2.}$

Q3 — Démontrer :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) \geqslant n^2 .$$

Cette inégalité est-elle optimale ?

Soit (i,j) tel que $1 \leqslant i < j \leqslant n$. En appliquant Q2 à $x \leftarrow \frac{a_i}{a_j} \in \mathbb{R}_{>0}$, il vient $\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i} \geqslant 2$. Grâce à Q1 :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) = n + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \left(\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i}\right) \geqslant n + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} 2 = n + 2\,\mathrm{Card}\left(\left\{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \,:\, 1 \leqslant i < j \leqslant n\right\}\right) = n + 2\,\frac{n(n-1)}{2} .$$

Ainsi $\boxed{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) \geqslant n^2 .}$ De plus $\boxed{\text{cette inégalité est optimale}}$ puisque c'est une égalité si $a_1 = \ldots = a_n = 1 > 0$.

Exercice 2 — Trois inégalités sur des modules de nombres complexes

Q4 — Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. Démontrer :

$$|a+b|^2 \leqslant \left(1+|a|^2\right)\left(1+|b|^2\right)$$

et étudier le cas d'égalité.

Calculons la différence des deux termes.

$$\begin{aligned}
\left(1+|a|^2\right)\left(1+|b|^2\right) - |a+b|^2 &= \left(1+a\,\overline{a}\right)\left(1+b\,\overline{b}\right) - (a+b)\left(\overline{a}+\overline{b}\right) \\
&= 1 + a\overline{a} + b\overline{b} + a\,\overline{a}\,b\,\overline{b} - \left(a\overline{a} + a\overline{b} + b\overline{a} + b\overline{b}\right) \\
&= 1 - a\overline{b} - b\overline{a} + a\,\overline{a}\,b\,\overline{b} \\
&= 1 - 2\,\mathrm{Re}\left(a\overline{b}\right) + \left|a\overline{b}\right|^2 .
\end{aligned}$$

Nous observons que, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$|1+z|^2 = (1+z)\left(1+\overline{z}\right) = 1 + 2\,\mathrm{Re}(z) + |z|^2 .$$

En appliquant cette identité à $z \leftarrow -a\overline{b}$, il vient :

$$\left(1+|a|^2\right)\left(1+|b|^2\right) - |a+b|^2 = |1-a\overline{b}|^2 .$$

Nous en déduisons que $\boxed{|a+b|^2 \leqslant \left(1+|a|^2\right)\left(1+|b|^2\right)}$ et que $\boxed{\text{l'inégalité est une égalité si et seulement si } a\overline{b} = 1 .}$

Q5 — Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et $\theta \in]-\pi,\pi]$ son argument principal. Démontrer :

$$|z\theta| \geqslant |z - |z||$$

et en déduire :

$$|z-1| \leqslant ||z|-1| + |z\theta| .$$

Comme z et $|z|$ ont même module, nous pouvons appliquer la technique de l'angle moitié :

$$z - |z| = |z|\,e^{i\theta} - |z| = |z|\left(e^{i\theta}-1\right) = |z|\,2\,i\,\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}} .$$

Ainsi $|z-|z|| = 2\,|z|\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|$. D'après le cours :

$$\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| \leqslant \left|\frac{\theta}{2}\right| .$$

Comme $2\,|z| \geqslant 0$, nous en déduisons :

$$|z-|z|| \leqslant 2\,|z|\left|\frac{\theta}{2}\right|$$

d'où $\boxed{|z-|z|| \leqslant |z\theta| .}$

D'après l'inégalité triangulaire :

$$||z|-1| = ||z|-z+z-1| \geqslant ||\,|z|-z| - |z-1|\,| \geqslant |z-1| - ||z|-z| \ .$$

Nous en déduisons :

$$|z-1| \leqslant ||z|-1| + ||z|-z| \ .$$

Avec l'inégalité précédemment démontrée, il vient $\boxed{|z-1| \leqslant ||z|-1| + |z\theta| \ .}$

Q6 — Soient $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer :

$$\left| \frac{1-(n+1)z^n + nz^{n+1}}{(1-z)^2} \right| \leqslant \frac{1-(n+1)|z|^n + n|z|^{n+1}}{(1-|z|)^2} \ .$$

Posons, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $N(z) = 1-(n+1)z^n + nz^{n+1}$. Nous observons que 1 est racine du polynôme N, d'où l'existence d'une factorisation de $N(z)$ par $z-1$, que nous calculons.

$$(\star) \qquad N(z) = 1 - z^n - nz^n + nz^{n+1} = 1^n - z^n + nz^n(z-1) = (1-z)\sum_{k=0}^{n} z^k + nz^n(z-1) = (z-1)\underbrace{\left(n z^n - \sum_{k=0}^{n-1} z^k\right)}_{=:Q(z)} .$$

Posons alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $Q(z) = nz^n - \sum_{k=0}^{n-1} z^k$. Nous observons que 1 est racine du polynôme Q, d'où l'existence d'une factorisation de $Q(z)$ par $z-1$, que nous calculons.

$$\begin{array}{rcll}
Q(z) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z^n - \sum_{k=0}^{n-1} z^k & \\
& = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(z^n - z^k\right) & \\
& = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z^k \left(z^{n-k} - 1\right) & \\
& = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z^k \left((z-1) \sum_{\ell=0}^{n-k-1} z^\ell\right) & \\
& = & \displaystyle (z-1) \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{n-k-1} z^{k+\ell} & \\
& = & \displaystyle (z-1) \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=k}^{n-1} z^p & [p = k+\ell] \\
& = & \displaystyle (z-1) \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{p} z^p & [\text{formule d'inversion}] \\
& \underset{(\star\star)}{=} & \displaystyle (z-1) \sum_{p=0}^{n-1} (p+1)\, z^p &
\end{array}$$

De $(\star)$ et $(\star\star)$ nous déduisons que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $N(z) = (z-1)^2 \sum_{p=0}^{n-1} (p+1)\, z^p$ et donc, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$:

$$\frac{1-(n+1)z^n + nz^{n+1}}{(1-z)^2} = \frac{N(z)}{(1-z)^2} = \sum_{p=0}^{n-1} (p+1)\, z^p \ .$$

Le point fondamental est que la quantité $\dfrac{1-(n+1)z^n + nz^{n+1}}{(1-z)^2} = \dfrac{N(z)}{(1-z)^2}$ est polynomiale en z (et pas uniquement rationnelle en z), avec des coefficients réels positifs.

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$. D'après l'inégalité triangulaire, $\left| \dfrac{N(z)}{(1-z)^2} \right| = \left| \displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} (p+1)\, z^p \right| \leqslant \displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} \big|(p+1)\big|\ |z|^p = \displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} (p+1)\ |z|^p = \dfrac{N(|z|)}{(1-|z|)^2}$. Ainsi $\boxed{\left| \dfrac{1-(n+1)z^n + nz^{n+1}}{(1-z)^2} \right| \leqslant \dfrac{1-(n+1)|z|^n + n|z|^{n+1}}{(1-|z|)^2} \ .}$

Exercice 3 — Inégalité entre un produit et une somme pour un uplet d'éléments $[0,1]$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Q7 — Soient $(a_1,\dots,a_n)$ et $(b_1,\dots,b_n)$ deux n-uplets d'éléments de $[0,1]$ tels que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $a_i \leqslant b_i$. Démontrer :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i - \prod_{i=1}^{n} a_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} b_i - \prod_{i=1}^{n} b_i \,.$$

Il nous faut démontrer $f(a_1,\dots,a_n) \leqslant f(b_1,\dots,b_n)$ où f est l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} [0,1]^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (\alpha_1,\dots,\alpha_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \prod_{i=1}^{n} \alpha_i \,. \end{array} \right.$$

- Nous calculons :

$$\begin{array}{rcl} f(b_1,a_2,\dots,a_n) - f(a_1,a_2,\dots,a_n) & = & b_1 + a_2 + \ldots + a_n - b_1 a_2 \ldots a_n - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + a_1 a_2 \ldots a_n \\ & = & b_1 - a_1 + (a_1 - b_1) a_2 \ldots a_n \\ & = & (b_1 - a_1)\,(1 - a_2 \ldots a_n)\,. \end{array}$$

En multipliant membre-à-membre les inégalités :

$$0 \leqslant a_2 \leqslant 1 \qquad \ldots \qquad 0 \leqslant a_n \leqslant 1$$

il vient $a_2 \ldots a_n \leqslant 1$. Nous en déduisons que :

$$f(b_1,a_2,\dots,a_n) - f(a_1,a_2,\dots,a_n) = (b_1 - a_1)\,(1 - a_2 \ldots a_n) \geqslant 0$$

et donc :

$$(1) \qquad f(a_1,a_2,\dots,a_n) \leqslant f(b_1,a_2,\dots,a_n)\,.$$

- Nous calculons :

$$\begin{array}{rcl} f(b_1,b_2,a_3,\dots,a_n) - f(b_1,a_2,a_3,\dots,a_n) & = & b_1 + b_2 + a_3 + \ldots + a_n - b_1 b_2 a_3 \ldots a_n - (b_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) + b_1 a_2 a_3 \ldots a_n \\ & = & b_2 - a_2 + (a_2 - b_2) b_1 a_3 \ldots a_n \\ & = & (b_2 - a_2)\,(1 - b_1 a_3 \ldots a_n)\,. \end{array}$$

En multipliant membre-à-membre les inégalités :

$$0 \leqslant b_1 \leqslant 1 \qquad 0 \leqslant a_3 \leqslant 1 \qquad \ldots \qquad 0 \leqslant a_n \leqslant 1$$

il vient $b_1 a_3 \ldots a_n \leqslant 1$. Nous en déduisons que :

$$f(b_1,b_2,a_3,\dots,a_n) - f(b_1,a_2,a_3,\dots,a_n) = (b_2 - a_2)\,(1 - b_1 a_3 \ldots a_n) \geqslant 0$$

et donc :

$$(2) \qquad f(b_1,a_2,a_3,\dots,a_n) \leqslant f(b_1,b_2,a_3,\dots,a_n)\,.$$

- De manière analogue, nous démontrons :

$$\begin{array}{cccc} (3) & f(b_1,b_2,a_3,a_4,\dots,a_n) & \leqslant & f(b_1,b_2,b_3,a_4,\dots,a_n) \\ \vdots & & & \\ (n-1) & f(b_1,b_2,\dots,b_{n-2},a_{n-1},a_n) & \leqslant & f(b_1,b_2,\dots,b_{n-2},b_{n-1},a_n) \\ (n) & f(b_1,b_2,\dots,b_{n-2},b_{n-1},a_n) & \leqslant & f(b_1,b_2,\dots,b_{n-2},b_{n-1},b_n)\,. \end{array}$$

- D'après les inégalités $(1),(2),(3),\dots,(n)$ et la transitivité de la relation d'ordre $\leqslant$, il vient $\boxed{f(a_1,\dots,a_n) \leqslant f(b_1,\dots,b_n)\,.}$

Q8 — Soient $(a_1,\dots,a_n)$ un n-uplet d'éléments de $[0,1]$. Démontrer :

$$\prod_{i=1}^{n} (1 - a_i) \geqslant 1 - \sum_{i=1}^{n} a_i \,.$$

En appliquant Q7 avec :

$$a_1 \leftarrow 1-a_1 \in [0,1]\ ,\ \ldots\ ,\ a_n \leftarrow 1-a_n \in [0,1]\ ,\ b_1 = 1 \in [0,1]\ ,\ \ldots\ ,\ b_n = 1 \in [0,1]$$

il vient :

$$\sum_{i=1}^{n}(1-a_i) - \prod_{i=1}^{n}(1-a_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} 1 - \prod_{i=1}^{n} 1$$

qui se réécrit :

$$n - \sum_{i=1}^{n} a_i - \prod_{i=1}^{n}(1-a_i) \leqslant n-1\,.$$

Nous en déduisons $\boxed{\prod_{i=1}^{n}(1-a_i) \geqslant 1 - \sum_{i=1}^{n} a_i\,.}$

Exercice 4 — Transformée de Fourier discrète

Soit $N \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$. On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$ qui sont N-périodiques, i.e. :

$$\mathscr{S} := \left\{ f \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}\ :\ \forall n \in \mathbb{Z} \quad f(n+N) = f(n) \right\}\,.$$

Q9 — Soit $f \in \mathscr{S}$ et $a \in \mathbb{Z}$. Démontrer que $\displaystyle\sum_{k=a}^{a+N-1} f(k) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k)$.

- En divisant euclidiennement a par N, a s'écrit $a = qN + r$, pour un unique couple $(q,r) \in \mathbb{Z} \times [\![0, N-1]\!]$.

- Avec le changement d'indice $\ell = a + k$, il vient :

$$\sum_{k=a}^{a+N-1} f(k) = \sum_{\ell=0}^{N-1} f(a+\ell) = \sum_{\ell=0}^{N-1} f(\ell + r + qN)\,.$$

Avec la N-périodicité de f, nous obtenons :

$$(\star) \qquad \sum_{k=a}^{a+N-1} f(k) = \sum_{\ell=0}^{N-1} f(\ell+r)\,.$$

- Si $r = 0$, alors $(\star)$ livre le résultat. Supposons désormais que $1 \leqslant r \leqslant N-1$ et effectuons le changement d'indice $k = \ell + r$ dans la somme $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{N-1} f(\ell+r)$ pour obtenir :

$$(\star\star) \qquad \sum_{\ell=0}^{N-1} f(\ell+r) = \sum_{k=r}^{r+N-1} f(k) = \sum_{k=r}^{N-1} f(k) + \sum_{k=N}^{r+N-1} f(k)\,.$$

avec une relation de Chasles pour la dernière identité.

- Effectuons le changement d'indice $\ell = k - N$ dans la somme $\displaystyle\sum_{k=N}^{r+N-1} f(k)$ pour obtenir :

$$\sum_{k=N}^{r+N-1} f(k) = \sum_{\ell=0}^{r-1} f(\ell+N)\,.$$

Avec la N-périodicité de f, il vient :

$$(\star\star\star) \qquad \sum_{k=N}^{r+N-1} f(k) = \sum_{\ell=0}^{r-1} f(\ell)\,.$$

- De $(\star)$, $(\star\star)$, $(\star\star\star)$, on déduit :

$$\sum_{k=a}^{a+N-1} f(k) = \sum_{\ell=0}^{N-1} f(\ell+r) = \sum_{k=r}^{N-1} f(k) + \sum_{k=N}^{r+N-1} f(k) = \sum_{k=r}^{N-1} f(k) + \sum_{\ell=0}^{r-1} f(\ell)$$

et enfin, grâce à la relation de Chasles $\boxed{\sum_{k=a}^{a+N-1} f(k) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k)\,.}$

Q10 — Justifier que l'application :

$$r \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{S} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{[\![0,N-1]\!]} \\ f & \longmapsto & f_{|[\![0,N-1]\!]} \end{array} \right.$$

est bijective.

- *Injectivité de r* Soit $(f_1, f_2) \in \mathscr{S}^2$ tel que $r(f_1) = r(f_2)$. Alors :

$$(\star) \qquad \forall\, k \in [\![0, N-1]\!] \quad f_1(k) = f_2(k)\,.$$

Démontrons que $f_1 = f_2$. Comme f_1 et f_2 ont même source et but, il reste à démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f_1(n) = f_2(n)$. Soit $n \in \mathbb{Z}$. En divisant euclidiennement n par N, n s'écrit $n = qN + r$, pour un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times [\![0, N-1]\!]$.

$$\begin{array}{rcll} f_1(n) & = & f_1(qN+r) & \\ & = & f_1(r) & \left[f_1 \text{ est } N\text{-périodique}\right] \\ & = & f_2(r) & [r \in [\![0,N-1]\!] \text{ et } (\star)] \\ & = & f_2(qN+r) & \left[f_2 \text{ est } N\text{-périodique}\right] \\ & = & f_2(n) & \end{array}$$

Donc $\boxed{\text{l'application } r \text{ est injective.}}$

- *Surjectivité de r* Soit $g \in \mathbb{C}^{[\![0,N-1]\!]}$. Nous cherchons $f \in \mathscr{S}$ tel que $r(f) = g$, i.e. tel que :

$$\forall\, k \in [\![0, N-1]\!] \quad f(k) = g(k)\,.$$

Nous proposons l'application f définie par :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ n & \longmapsto & g\left(\text{reste de la division euclidienne de } n \text{ par } N\right)\,. \end{array} \right.$$

Vérifions que cette application f convient.
  - L'application f est bien définie.
    En effet, le reste d'une division euclidienne par N est un élément de $[\![0, N-1]\!]$ et l'ensemble de départ de g est $[\![0, N-1]\!]$.
  - L'application f est N-périodique, donc appartient à $\mathscr{S}$.
    En effet, soit $n \in \mathbb{Z}$ dont nous écrivons la division euclidienne $n = qN + r$, où $(q, r) \in \mathbb{Z} \times [\![0, N-1]\!]$. Alors :

$$(\star) \qquad f(n) = g(r)\,.$$

    Nous remarquons que la division euclidienne de $n+N$ s'écrit $n + N = (q+1)N + r$, de sorte que le reste de la division euclidienne de $n+N$ par N est r, d'où :

$$(\star\star) \qquad f(n+N) = g(r)\,.$$

    De $(\star)$ et $(\star\star)$, nous déduisons $f(n) = f(n+N)$.
  - Il reste à démontrer que, pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$, $f(k) = g(k)$.
    Soit $k \in [\![0, N-1]\!]$. La division euclidienne de k s'écrit $k = 0 \times N + k$, de sorte que le reste de la division euclidienne de k par N est k, d'où $f(k) = g(k)$.

Nous avons donc établi que $\boxed{\text{l'application } r \text{ est surjective.}}$

- *Application réciproque de r* D'après l'étude précédente :

$$r^{-1} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{[\![0,N-1]\!]} & \longrightarrow & \mathscr{S} \\ g & \longmapsto & \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ n & \longmapsto & g\left(\text{reste de la division euclidienne de } n \text{ par } N\right)\,. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

À toute application $f \in \mathscr{S}$, on associe l'application :

$$\widehat{f} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ n & \longmapsto & \widehat{f}(n) := \sum_{k=0}^{N-1} f(k)\, e^{-i2\pi \frac{kn}{N}} . \end{array} \right.$$

L'application $\widehat{f}$ est appelée transformée de Fourier de f.

Q11 — Démontrer que, pour tout $f \in \mathscr{S}$, $\widehat{f} \in \mathscr{S}$.

- Soit $f \in \mathscr{S}$. L'application $\widehat{f}$ a pour source $\mathbb{Z}$ et pour but $\mathbb{C}$. Il reste à démontrer que $\widehat{f}$ est N-périodique pour établir que $\widehat{f} \in \mathscr{S}$.
- Soit $n \in \mathbb{Z}$. Nous calculons :

$$\widehat{f}(n+N) := \sum_{k=0}^{N-1} f(k)\, e^{-i2\pi \frac{k(n+N)}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} f(k)\, e^{-i2\pi\left(\frac{kn}{N}+k\right)} = \sum_{k=0}^{N-1} f(k)\, e^{-i2\pi \frac{kn}{N}} \underbrace{e^{-i2\pi k}}_{=1} = \sum_{k=0}^{N-1} f(k)\, e^{-i2\pi \frac{kn}{N}} =: \widehat{f}(n) .$$

Q12 — Soit $f \in \mathscr{S}$. Calculer, pour tout $n \in [\![0, N-1]\!]$, $\displaystyle \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} \widehat{f}(\ell)\, e^{i2\pi \frac{\ell n}{N}}$.

Soit $n \in [\![0, N-1]\!]$. Nous calculons :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=0}^{N-1} \widehat{f}(\ell)\, e^{i2\pi \frac{\ell n}{N}} &= \sum_{\ell=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} f(k)\, e^{-i2\pi \frac{k\ell}{N}}\, e^{i2\pi \frac{\ell n}{N}} \\ &= \sum_{\ell=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} f(k)\, e^{i2\pi \frac{\ell(n-k)}{N}} \\ &\underset{(\star)}{=} \sum_{k=0}^{N-1} f(k) \sum_{\ell=0}^{N-1} \left(e^{i2\pi \frac{n-k}{N}}\right)^{\ell} \end{aligned}$$

Soit $k \in [\![0, N-1]\!]$. Comme :

$$e^{i2\pi \frac{n-k}{N}} = 1 = e^{i\times 0} \quad \iff \quad N \text{ divise } n-k \qquad [\text{cas d'égalité de deux formes trigonométriques}]$$

et $-(N-1) \leqslant n-k \leqslant N-1$, il vient :

$$e^{i2\pi \frac{n-k}{N}} \quad \iff \quad k = n .$$

Ainsi :

$$\sum_{\ell=0}^{N-1} \left(e^{i2\pi \frac{n-k}{N}}\right)^{\ell} \underset{(\star\star)}{=} \begin{cases} N & \text{si } k = n \\ \dfrac{1-\left(e^{i2\pi \frac{n-k}{N}}\right)^{N}}{1-e^{i2\pi \frac{n-k}{N}}} = \dfrac{1-e^{i2\pi(n-k)}}{1-e^{i2\pi \frac{n-k}{N}}} = 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

De $(\star)$ et $(\star)$ nous déduisons :

$$\sum_{\ell=0}^{N-1} \widehat{f}(\ell)\, e^{i2\pi \frac{\ell n}{N}} = N f(n) .$$

Ainsi $\boxed{\displaystyle \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} \widehat{f}(\ell)\, e^{i2\pi \frac{\ell n}{N}} = f(n) .}$

Q13 — L'application :

$$T \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{S} & \longrightarrow & \mathscr{S} \\ f & \longmapsto & T(f) := \widehat{f} \end{array} \right.$$

est-elle injective, surjective, bijective ?

• *Injectivité de T* Soit $(f_1, f_2) \in \mathscr{S}^2$ tel que $T(f_1) = T(f_2)$, i.e. tel que $\widehat{f_1} = \widehat{f_2}$. Démontrons $f_1 = f_2$.
De $\widehat{f_1} = \widehat{f_2}$ et Q12 nous en déduisons que, pour tout $n \in [\![0, N-1]\!]$, $f_1(n) = f_2(n)$, i.e. $r(f_1) = r(f_2)$. D'après Q10, r est injective et donc $f_1 = f_2$.
Nous avons démontré que $\boxed{\text{l'application } T \text{ est injective.}}$

• *Surjectivité de T* Soit $g \in \mathscr{S}$. Nous cherchons une application $f \in \mathscr{S}$ telle que $T(f) = g$, i.e. telle que $\widehat{f} = g$.
Nous raisonnons par analyse-synthèse.

— *Analyse* Supposons qu'il existe une application $f \in \mathscr{S}$ telle que $\widehat{f} = g$. D'après Q12, si une telle application f existe, alors :

$$\forall\, n \in [\![0, N-1]\!] \qquad f(n) = \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} g(\ell)\, e^{i2\pi \frac{\ell n}{N}}\,.$$

Nous obervons que l'application :

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ n & \longmapsto & \displaystyle\frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} g(\ell)\, e^{i2\pi \frac{\ell n}{N}} \end{array}\right.$$

est N-périodique (démonstration analogue à Q11), donc appartient à $\mathscr{S}$. Comme cette application et f coïncident sur $[\![0, N-1]\!]$ et comme r est injective, nous en déduisons que f est l'application :

$$f \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ n & \longmapsto & \displaystyle\frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} g(\ell)\, e^{i2\pi \frac{\ell n}{N}}\,. \end{array}\right.$$

Nous avons un unique candidat pour f, ce qui fournit une nouvelle démonstration de l'injectivité de T.

— *Synthèse* Vérifions si l'application f trouvée en fin d'analyse convient. Nous avons déjà remarqué que cette application f appartient à $\mathscr{S}$ en cours d'analyse. Il reste à vérifier que $\widehat{f} = g$. Comme $\widehat{f}$ et g sont des éléments de $\mathscr{S}$ et comme r est injective, il suffit de démontrer que :

$$\forall\, n \in [\![0, N-1]\!] \quad \widehat{f}(n) = g(n)\,.$$

Soit $n \in [\![0, N-1]\!]$. Le calcul de la somme :

$$\widehat{f}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k)\, e^{-i2\pi \frac{kn}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} g(\ell)\, e^{i2\pi \frac{\ell k}{N}}\, e^{-i2\pi \frac{kn}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} g(\ell) \sum_{k=0}^{N-1} \left(e^{i2\pi \frac{\ell-n}{N}}\right)^k$$

est analogue à celui effectué en Q12 et livre $\widehat{f}(n) = g(n)$.

Nous avons démontré que $\boxed{\text{l'application } T \text{ est surjective.}}$

• *Application réciproque de T* Il ressort de notre étude que :

$$T^{-1} \left|\begin{array}{ccc} \mathscr{S} & \longrightarrow & \mathscr{S} \\ g & \longmapsto & \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ n & \longmapsto & \displaystyle\frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} g(\ell)\, e^{i2\pi \frac{\ell n}{N}}\,. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Soit $(f, g) \in \mathscr{S}^2$. Le produit de convolution de f par g est défini par :

$$f * g \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ n & \longmapsto & f * g\,(n) := \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} f(k) g(n-k)\,. \end{array}\right.$$

Q14 — Vérifier que, pour tout $(f, g) \in \mathscr{S}^2$, $f * g \in \mathscr{S}$.

Soit $(f, g) \in \mathscr{S}^2$.

• L'application $f * g$ a pour source $\mathbb{Z}$ et pour but $\mathbb{C}$. Pour démontrer $f * g \in \mathscr{S}$, il reste à démontrer que $f * g$ est N-périodique.

- Soit $n \in \mathbb{Z}$. Comme g est N-périodique :

$$f * g(n+N) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k)g(n+N-k) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k)g(n-k) = f * g(n)\,.$$

Donc $\boxed{f * g \in \mathscr{S}.}$

Q15 — Démontrer que, pour tout $(f,g) \in \mathscr{S}^2$, $f * g = g * f$.

Soit $(f,g) \in \mathscr{S}^2$.

- Les applications $f * g$ et $g * f$ ont même source et but. Pour démontrer qu'elles sont égales, il reste à démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f * g(n) = g * f(n)$.

- Soit $n \in \mathbb{Z}$. Nous calculons :

$$(\star) \qquad f * g(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k)g(n-k) = \sum_{\ell=n-N+1}^{n} f(n-\ell)g(\ell)$$

avec le changement d'indice $\ell = n-k$ dans la somme $\sum_{k=0}^{N-1} f(k)g(n-k)$. Comme f et g sont N-périodiques, l'application :

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \ell & \longmapsto & f(n-\ell)g(\ell) \end{array} \right.$$

est N-périodique. En appliquant Q9 avec $f \leftarrow \varphi$ et $a \leftarrow n-N+1$, il vient :

$$(\star\star) \qquad \sum_{\ell=n-N+1}^{n} f(n-\ell)g(\ell) = \sum_{\ell=0}^{N-1} f(n-\ell)g(\ell)\,.$$

De $(\star)$ et $(\star\star)$, nous déduisons :

$$f * g(n) = \sum_{\ell=n-N+1}^{n} f(n-\ell)g(\ell) = \sum_{\ell=0}^{N-1} f(n-\ell)g(\ell) = g * f(n)\,.$$

Ainsi avons-nous établi $\boxed{f * g = g * f.}$

Q16 — Démontrer que, pour tout $(f,g,h) \in \mathscr{S}^3$, $(f * g) * h = f * (g * h)$.

Soit $(f,g,h) \in \mathscr{S}^3$.

- Les applications $(f * g) * h$ et $f * (g * h)$ ont même source et but. Pour démontrer qu'elles sont égales, il reste à démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(f * g) * h(n) = f * (g * h)(n)$.

- Soit $n \in \mathbb{Z}$. Nous calculons :

$$(\star) \qquad (f * g) * h(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f * g(k)\, h(n-k) = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{\ell=0}^{N-1} f(\ell)\, g(k-\ell)\, h(n-k) = \sum_{\ell=0}^{N-1} f(\ell) \sum_{k=0}^{N-1} g(k-\ell)\, h(n-k)\,.$$

Soit $\ell \in [\![0, N-1]\!]$. En effectuant le changement d'indice $p = k-l$ dans la somme $\sum_{k=0}^{N-1} g(k-\ell)\, h(n-k)$, il vient :

$$\sum_{k=0}^{N-1} g(k-\ell)\, h(n-k) = \sum_{p=-\ell}^{N-1-\ell} g(p)\, h(n-\ell-p)$$

Comme g et h sont N-périodiques, l'application :

$$\psi \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ p & \longmapsto & g(p)\, h(n-\ell-p) \end{array} \right.$$

est N-périodique. En appliquant Q9 avec $f \leftarrow \psi$ et $a \leftarrow -\ell$, il vient :

$$(\star\star) \qquad \sum_{p=-\ell}^{N-1-\ell} g(p)\, h(n-\ell-p) = \sum_{p=0}^{N-1} g(p)\, h(n-\ell-p)\,.$$

De $(\star)$ et $(\star\star)$ nous déduisons :

$$(f*g)*h(n) = \sum_{\ell=0}^{N-1} f(\ell) \sum_{k=0}^{N-1} g(k-\ell)\, h(n-k) = \sum_{\ell=0}^{N-1} f(\ell) \sum_{p=0}^{N-1} g(p)\, h(n-\ell-p) = f*(g*h)(n)\,.$$

Ainsi avons-nous établi $\boxed{(f*g)*h = f*(g*h).}$

Q17 — Démontrer qu'il existe un unique $\delta \in \mathscr{S}$ tel que, pour tout $f \in \mathscr{S}$, $f*\delta = f = \delta * f$.

Nous raisonnons par analyse-synthèse.

- *Analyse* Supposons qu'il existe $\delta \in \mathscr{S}$ tel que, pour tout $f \in \mathscr{S}$, $f*\delta = f = \delta * f$. Alors pour tout $f \in \mathscr{S}$:

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{lclcll} f(0) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \delta(k)\, f(-k) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} f(k)\,\delta(-k) & [\text{Q15}] \\ f(1) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \delta(k)\, f(1-k) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} f(k)\,\delta(1-k) & [\text{Q15}] \\ f(2) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \delta(k)\, f(2-k) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} f(k)\,\delta(2-k) & [\text{Q15}] \\ & \vdots & & & & \\ f(N-1) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \delta(k)\, f(N-1-k) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} f(k)\,\delta(N-1-k) & [\text{Q15}]\,. \end{array} \right.$$

L'application :

$$f_0 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ n & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 1 & n \text{ est un multiple de } n \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

est N-périodique et donc appartient à $\mathscr{S}$. Comme le seul multiple de N appartenant à $[\![0, N-1]\!]$ est 0, la spécialisation du système (S) à $f \leftarrow f_0$ livre :

$$\left\{ \begin{array}{lclclcl} 1 & = & f_0(0) & = & f_0(0)\,\delta(0) & = & \delta(0) \\ 0 & = & f_0(1) & = & f_0(0)\,\delta(1) & = & \delta(1) \\ 0 & = & f_0(2) & = & f_0(0)\,\delta(2) & = & \delta(2) \\ & \vdots & & & & & \\ 0 & = & f_0(N-1) & = & f_0(0)\,\delta(N-1) & = & \delta(N-1)\,. \end{array} \right.$$

Nous observons donc que $r(f_0) = r(\delta)$ et comme r est injective (Q10), il vient $\delta = f_0$. Un seul candidat pour δ apparaît en fin d'analyse, ce qui assure l'unicité de δ.

- *Synthèse* Vérifions si le candidat f_0 trouvé pour δ en fin d'analyse.
  — Nous avons déjà observé que $f_0 \in \mathscr{S}$.
  — Soit $f \in \mathscr{S}$. Les applications f et $f_0 * f$ ont même source et but. Pour prouver que ces deux applications sont égales, il reste à prouver que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f_0 * f(n) = f(n)$.
  Soit $n \in \mathbb{Z}$. Comme le seul multiple de N appartenant à $[\![0, N-1]\!]$ est 0 :

$$f_0 * f(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f_0(k)\, f(n-k) = f_0(0)\, f(n) = f(n)\,.$$

  — Ainsi $f = f_0 * f$. D'après Q15, nous en déduisons $f = f_0 * f = f * f_0$.

- *Conclusion* D'après notre étude, $\boxed{\text{il existe un unique } \delta \in \mathscr{S} \text{ tel que, pour tout } f \in \mathscr{S},\ f*\delta = f = \delta * f}$ et ce δ est donné par :

$$\delta \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} 1 & n \text{ est un multiple de } n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right. .$$

Q18 — Démontrer que, pour tout $(f,g) \in \mathscr{S}^2$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\widehat{f * g}\,(n) = \widehat{f}\,(n)\,\widehat{g}\,(n)$.

Soient $(f,g) \in \mathscr{S}^2$ et $n \in \mathbb{Z}$. Nous calculons :

$$(\star) \qquad \widehat{f*g}\,(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f*g(k)\, e^{-i2\pi\frac{kn}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{\ell=0}^{N-1} f(\ell)\, g(k-\ell)\, e^{-i2\pi\frac{kn}{N}} = \sum_{\ell=0}^{N-1} f(\ell) \sum_{k=0}^{N-1} g(k-\ell)\, e^{-i2\pi\frac{kn}{N}} .$$

Soit $\ell \in [\![0, N-1]\!]$. En effectuant le changement de variable $p = k - \ell$ dans la somme $\sum_{k=0}^{N-1} g(k-\ell)\, e^{-i2\pi\frac{kn}{N}}$ il vient :

$$\sum_{k=0}^{N-1} g(k-\ell)\, e^{-i2\pi\frac{kn}{N}} = \sum_{p=-\ell}^{N-1-\ell} g(p)\, e^{-i2\pi\frac{(\ell+p)n}{N}} = \sum_{p=-\ell}^{N-1-\ell} g(p)\, e^{-i2\pi\frac{\ell n}{N}}\, e^{-i2\pi\frac{pn}{N}} .$$

Comme les applications g et :

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ p & \longmapsto & e^{-i2\pi\frac{pn}{N}} \end{array} \right.$$

sont N-périodiques (cf. calcul effectué en Q11), l'application :

$$\theta \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ p & \longmapsto & g(p)\, e^{-i2\pi\frac{\ell n}{N}}\, e^{-i2\pi\frac{pn}{N}} \end{array} \right.$$

est N-périodique. En appliquant Q9 avec $f \leftarrow \theta$ et $a \leftarrow -\ell$, il vient :

$$(\star\star) \qquad \sum_{k=0}^{N-1} g(k-\ell)\, e^{-i2\pi\frac{kn}{N}} = \sum_{p=-\ell}^{N-1-\ell} g(p)\, e^{-i2\pi\frac{\ell n}{N}}\, e^{-i2\pi\frac{pn}{N}} = \sum_{p=0}^{N-1} g(p)\, e^{-i2\pi\frac{\ell n}{N}}\, e^{-i2\pi\frac{pn}{N}}$$

De $(\star)$ et $(\star\star)$, nous déduisons :

$$\widehat{f*g}\,(n) = \sum_{\ell=0}^{N-1} f(\ell) \sum_{k=0}^{N-1} g(k-\ell)\, e^{-i2\pi\frac{kn}{N}} = \sum_{\ell=0}^{N-1} f(\ell) \sum_{p=0}^{N-1} g(p)\, e^{-i2\pi\frac{\ell n}{N}}\, e^{-i2\pi\frac{pn}{N}} = \left(\sum_{\ell=0}^{N-1} f(\ell)\, e^{-i2\pi\frac{\ell n}{N}}\right)\left(\sum_{p=0}^{N-1} g(p)\, e^{-i2\pi\frac{pn}{N}}\right)$$

i.e. $\boxed{\widehat{f*g}\,(n) = \widehat{f}\,(n)\,\widehat{g}\,(n) .}$

Q19 — Soit $f \in \mathscr{S}$ non identiquement nulle, i.e. distincte de l'application :

$$0_{\mathscr{S}} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ n & \longmapsto & 0 . \end{array} \right.$$

Existe-t-il nécessairement $g \in \mathscr{S}$ telle que, $f * g = g * f = \delta$?

$\boxed{\text{Non.}}$ Pour donner un contre-exemple, considérons l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ n & \longmapsto & 1 \end{array} \right.$$

qui est bien sûr N-périodique, puisque constante. Elle est donc élément de $\mathscr{S}$. Supposons qu'il existe $g \in \mathscr{S}$ tel que $f * g = g * f = \delta$. Alors :

$$1 = \delta(0) = g * f(0) = \sum_{k=0}^{N-1} g(k) f(-k) = \sum_{k=0}^{N-1} g(k) \qquad \text{et} \qquad 0 = \delta(1) = g * f(1) = \sum_{k=0}^{N-1} g(k) f(1-k) = \sum_{k=0}^{N-1} g(k)$$

d'où une contradiction.

Dans la suite de cet exercice, on pose $N := 3$ et on note $f \in \mathscr{S}$ l'application définie par :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ n & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \textit{si } n \equiv 0\ [3] \ ; \\ 0 & \textit{si } n \equiv 1\ [3] \ ; \\ 2 & \textit{si } n \equiv 2\ [3] \ . \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Q20 — Calculer $\widehat{f}$.

- Nous posons $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} \in \mathbb{U}_3$ pour la suite. Nous savons que $j^3 = 1$, $1 + j + j^2 = 0$ et $j^{-1} = \overline{j} = j^2$.
- Soit $n \in \mathbb{Z}$ dont nous écrivons la division euclidienne par 3 : $n = 3q + r$, où $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in \{0, 1, 2\}$. Nous calculons :

$$\widehat{f}(n) = \sum_{k=0}^{2} f(k)\ j^{-kn} = \sum_{k=0}^{2} f(k)\ j^{-3qk-rk} = \sum_{k=0}^{2} f(k)\ \left(j^3\right)^{-qk}\ j^{-rk} = \sum_{k=0}^{2} f(k) j^{-rk} = 1 + 2j^{-2r} = 1 + 2\left(j^{-2}\right)^r = 1 + 2j^r\ .$$

Donc :

$$\boxed{\widehat{f}(n) = \left\{ \begin{array}{cl} 3 & \text{si } n \equiv 0\ [3] \\ 1 + 2j = \sqrt{3}\, i & \text{si } n \equiv 1\ [3] \\ 1 + 2\overline{j} = -\sqrt{3}\, i & \text{si } n \equiv 2\ [3]\ . \end{array} \right.}$$

Q21 — Calculer $f * f$.

Soit $n \in \mathbb{Z}$ dont nous écrivons la division euclidienne par 3 : $n = 3q + r$, où $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in \{0, 1, 2\}$. Nous calculons, avec la 3-périodicité de f :

$$f * f(n) = \sum_{k=0}^{2} f(k) f(n-k) = \sum_{k=0}^{2} f(k) f(3q + r - k) = \sum_{k=0}^{2} f(k) f(r-k) = \left\{ \begin{array}{cl} f(0)f(0) + f(1)f(-1) + f(2)f(-2) & \text{si } r = 0 \\ f(0)f(1) + f(1)f(0) + f(2)f(-1) & \text{si } r = 1 \\ f(0)f(2) + f(1)f(1) + f(2)f(0) & \text{si } r = 2\ . \end{array} \right.$$

Donc :

$$\boxed{f * f(n) = \left\{ \begin{array}{cl} 1 & \text{si } n \equiv 0\ [3] \\ 4 & \text{si } n \equiv 1\ [3] \\ 4 & \text{si } n \equiv 2\ [3]\ . \end{array} \right.}$$

Q22 — Résoudre l'équation $f * g = \delta$ d'inconnue $g \in \mathscr{S}$.

Soit $g \in \mathscr{S}$.

$$\begin{array}{rcll} f * g = \delta & \Longleftrightarrow & r(f * g) = r(\delta) & [r \text{ est injective, cf. Q10}] \\ & \Longleftrightarrow & f * g(0) = \delta(0)\,,\ f * g(1) = \delta(1)\,,\ f * g(2) = \delta(2) & \\ & \Longleftrightarrow & f * g(0) = 1\,,\ f * g(1) = 0\,,\ f * g(2) = 0 & [\text{cf. Q17}] \\ & \Longleftrightarrow & g * f(0) = 1\,,\ g * f(1) = 0\,,\ g * f(2) = 0 & [\text{cf. Q15}] \end{array}$$

Ainsi, g est solution de l'équation $f * g = \delta$ si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} g(0)f(0) & + & g(1)f(-1) & + & g(2)f(-2) & = & 1 \\ g(0)f(1) & + & g(1)f(0) & + & g(2)f(-1) & = & 0 \\ g(0)f(2) & + & g(1)f(1) & + & g(2)f(0) & = & 0 \end{array} \right.$$

i.e. si et seulement si :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} g(0) & + & 2g(1) & & & = & 1 \\ & & g(1) & + & 2g(2) & = & 0 \\ 2g(0) & & & + & g(2) & = & 0 \end{array} \right.$$

En résolvant ce système avec l'algorithme du pivot de Gauß, il vient :

$$(S) \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccc} g(0) & = & 1/9 \\ g(1) & = & 4/9 \\ g(2) & = & -2/9\ . \end{array} \right.$$

Avec Q10, nous en déduisons que :

l'équation proposée possède une unique solution, qui est l'application $g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} 1/9 & \text{si } n \equiv 0\,[3] \ ; \\ 4/9 & \text{si } n \equiv 1\,[3] \ ; \\ -2/9 & \text{si } n \equiv 2\,[3] \ . \end{cases} \end{array} \right.$

Remarque — La transformée de Fourier discrète, objet de cet exercice, a des applications en physique, dans l'étude des signaux échantillonnés.

Exercice 5 — Théorème de Bernstein

Soient E, F des ensembles et $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow E$ deux applications injectives. On pose :

$$h = g \circ f \qquad R = E \setminus g(F) \qquad \mathscr{F} := \{M \in \mathscr{P}(E) \ : \ R \cup h(M) \subset M\} \qquad A := \bigcap_{M \in \mathscr{F}} M\,.$$

Q23 — Soient A_1, A_2 deux parties de E telles que $A_1 \subset A_2$. Démontrer : $h(A_1) \subset h(A_2)$.

Soit $y \in h(A_1)$. Alors il existe $x_1 \in A_1$ tel que $y = h(x_1)$. Comme $A_1 \subset A_2$, $y = h(x_1) \in h(A_2)$.
Nous avons établi $\boxed{h(A_1) \subset h(A_2).}$

Q24 — Démontrer : $h(A) = \bigcap_{M \in \mathscr{F}} h(M)$.

Nous raisonnons par double inclusion.

$\boxed{\subset}$ Soit $y \in h(A)$. Alors il existe $x \in A := \bigcap_{M \in \mathscr{F}} M$ tel que $y = h(x)$.
Soit $M \in \mathscr{F}$. Comme $x \in M$, $y = h(x) \in h(M)$.
Comme, pour tout $M \in \mathscr{F}$, $y \in h(M)$, il vient $y \in \bigcap_{M \in \mathscr{F}} h(M)$.

Nous avons démontré $\boxed{h(A) \subset \bigcap_{M \in \mathscr{F}} h(M).}$

$\boxed{\supset}$ Soit $y \in \bigcap_{M \in \mathscr{F}} h(M)$.
Soit $M \in \mathscr{F}$. Comme $y \in h(M)$, il existe $x_M \in M$ tel que $y = h(x_M)$.
L'application h est injective, comme composée d'applications injectives. Ainsi, les éléments $x_M \in M$ où $M \in \mathscr{F}$, sont tous égaux. Notons x leur valeur commune.
Puisque, pour tout $M \in \mathscr{F}$, $x = x_M \in M$, l'élément x de E appartient à $A := \bigcap_{M \in \mathscr{F}} M$.

Ainsi $y = h(x) \in h(A)$. Nous avons démontré $\boxed{h(A) \supset \bigcap_{M \in \mathscr{F}} h(M).}$

Q25 — Démontrer : $E \in \mathscr{F}$ et $A \in \mathscr{F}$.

- E est une partie de E.

Par ailleurs, R est une partie de E et, comme l'ensemble d'arrivée de h est E, $h(E) \subset E$. Ainsi $R \cup h(E) \subset E$.
Nous en déduisons que $\boxed{E \in \mathscr{F}}$.

- A est une partie de E.

Démontrons que $R \subset A$. Soit $x \in R$. Soit $M \in \mathscr{F}$. Comme $x \in R \subset R \cup h(M) \subset M$, $x \in M$. Nous en déduisons que $x \in A := \bigcap_{M \in \mathscr{F}} M$.
Démontrons que $h(A) \subset A$. Soit $x \in h(A) = \bigcap_{M \in \mathscr{F}} h(M)$ (Q24). Soit $M \in \mathscr{F}$. Comme $x \in h(M) \subset R \cup h(M) \subset M$, $x \in M$. Nous en déduisons que $x \in A := \bigcap_{M \in \mathscr{F}} M$.
Comme $R \subset A$ et $h(A) \subset A$, $R \cup h(A) \subset A$.
Nous en déduisons que $\boxed{A \in \mathscr{F}}$.

Q26 — Démontrer, pour tout $M \in \mathscr{F}$: $R \cup h(M) \in \mathscr{F}$.

Soit $M \in \mathscr{F}$.
Comme R est une partie et E et comme h a pour ensemble d'arrivée E, $R \cup h(M)$ est une partie de E.
Il reste à prouver que $R \cup h(R \cup h(M)) \subset R \cup h(M)$ pour conclure à l'appartenance de $R \cup h(M)$ à $\mathscr{F}$.
Nous savons que $R \cup h(M) \subset M$. D'après Q23, nous en déduisons $h(R \cup h(M)) \subset h(M)$ puis $R \cup h(R \cup h(M)) \subset R \cup h(M)$.
Nous avons établi $\boxed{R \cup h(M) \in \mathscr{F}.}$

On pose $B := E \setminus A$, $A' := f(A)$ *et* $B' := g^{-1}(B)$.

Q27 — Démontrer : $R \cup h(A) = A$ et $B' = F \setminus A'$.

- Nous démontrons $R \cup h(A) = A$ en raisonnant par double inclusion.
  $\boxed{\subset}$ Nous savons que $A \in \mathscr{F}$ d'après Q25. Ainsi $\boxed{R \cup h(A) \subset A}$.
  $\boxed{\supset}$ D'après Q25 et Q26, $R \cup h(A) \in \mathscr{F}$.
  Soit $x \in A$. Alors, pour tout $M \in \mathscr{F}$, $x \in M$. En particulier pour $M = R \cup h(A) \in \mathscr{F}$, $x \in R \cup h(A)$ et donc $\boxed{R \cup h(A) \supset A}$.

- Nous démontrons $B' = F \setminus A'$ en raisonnant par double inclusion.
  $\boxed{\subset}$ Soit $y \in B'$, de sorte que $g(y) \in B$, i.e. $g(y) \notin A$.
  Nous démontrons que $y \in F \setminus A'$, en raisonnant par l'absurde. Supposons donc que $y \in A'$. Alors il existe $a \in A$ tel que $y = f(a)$. Nous en déduisons $g(y) = g(f(a)) = h(a) \in h(A) \subset R \cup h(A) \subset A$ d'après le point précédent. Nous obtenons $g(y) \in A$. Contradiction.
  Nous avons donc établi que $\boxed{B' \subset F \setminus A'.}$
  $\boxed{\supset}$ Soit $y \in F \setminus A'$. Alors $y \notin A' = f(A)$.
  Démontrons que $y \in B'$, i.e. $g(y) \in B$, ou encore $g(y) \notin A$ en raisonnant par l'absurde. Supposons donc que $g(y) \in A = R \cup h(A)$ d'après le point précédent. Ainsi $g(y) \in R$ ou $g(y) \in h(A)$.
  — Si $g(y) \in R$ alors $g(y) \notin g(F)$, ce qui n'est pas possible car $y \in F$.
  — Si $g(y) \in h(A)$, alors il existe $a \in A$ tel que $g(y) = h(a) = g(f(a))$. Comme g est injective, il vient $y = f(a) \in f(A)$. Contradiction.
  Nous avons démontré que $\boxed{B' \supset F \setminus A'.}$

Q28 — Démontrer : $f' := f_{|A}^{|A'}$ et $g' := g_{|B'}^{|B}$ sont bijectives.

- Démontrons que $f_{|A}^{|A'}$ est bijective.
  — L'application $\boxed{f_{|A}^{|A'} \text{ est injective}}$ comme restriction et corestriction d'une application injective.
  — Soit $y \in A' = f(A)$. Alors il existe $a \in A$ tel que :
  $$y = f(a) = f_{|A}^{|A'}(a)\,.$$
  Ainsi l'application $\boxed{f_{|A}^{|A'} \text{ est surjective.}}$

- Démontrons que $g_{|B'}^{|B}$ est bijective.
  — L'application $\boxed{g_{|B'}^{|B} \text{ est injective}}$ comme restriction et corestriction d'une application injective.
  — Soit $y \in B$, de sorte que $y \notin A$.
  Nous démontrons $y \notin R$ en raisonnant par l'absurde. Supposons que $y \in R$. Alors, pour tout $M \in \mathscr{F}$:
  $$y \in R \subset R \cup h(M) \subset M$$
  et donc $y \in M$. Nous en déduisons que $y \in A := \bigcap_{M \in \mathscr{F}} M$, contradiction.
  Comme $y \notin R$, $y \in g(F)$. Il existe donc $x \in F$ tel que $y = g(x)$. Comme $y \in B$, $x \in g^{-1}(B) = B'$.
  Nous avons déterminé un élément $x \in B'$ tel que :
  $$y = g(x) = g_{|B'}^{|B}(x)\,.$$
  L'application $\boxed{g_{|B'}^{|B} \text{ est donc surjective.}}$

Q29 — Soit l'application :

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f'(x) & \text{si } x \in A \\ (g')^{-1}(x) & \text{si } x \in B \end{cases} \end{array} \right. .$$

Démontrer : φ est bijective.

- Démontrons que φ est injective.

Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$. Notons bien que $E = A \sqcup B$.
  - — Si $x_1 \in A$ et $x_2 \in B$, alors $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) \in A' \cap B' = \varnothing$ (Q27), ce qui est impossible.
  - — De $x_1 \in B$ et $x_2 \in A$ livrent une contradiction.
  - — Si x_1 et x_2 appartiennent à A, alors l'injectivité de f' (Q28) livre $x_1 = x_2$.
  - — Si x_1 et x_2 appartiennent à B, alors l'injectivité de g' (Q28) livre $x_1 = x_2$.

Nous en déduisons que $\boxed{\varphi \text{ est injective.}}$

- Démontrons que φ est surjective. Notons bien que $F = A' \sqcup B'$ (Q27). Soit $y \in F$.
  - — Supposons $y \in A'$. Alors comme f' est surjective (Q28), il existe $x \in A$ tel que :

$$y = f'(x) = \varphi(x) .$$

  - — Supposons $y \in B'$. Alors comme g' est bijective (Q28) :

$$(g')^{-1}\left(g'(y)\right) = y$$

et $x := g'(y) \in B$. Ainsi :

$$y = (g')^{-1}(x) = \varphi(x) .$$

Nous en déduisons que $\boxed{\varphi \text{ est surjective.}}$

Remarque — *On a ainsi démontré le théorème de Bernstein : s'il existe une injection d'un ensemble E dans un ensemble F et une injection de F dans E, alors il existe une bijection de E dans F.*