Devoir Libre n°5

Pour le lundi 7 novembre

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Les assertions seront toutes justifiées avec soin, les raisonnements structurés, les résultats encadrés.

Exercice 1 — Produit de la somme et de la somme des inverses de réels positifs

Soient $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$ et $(a_1, \ldots, a_n)$ un n-uplet de réels strictement positifs.

Q1 — Démontrer :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) = n + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left(\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i}\right).$$

Q2 — Démontrer que l'ensemble $A := \left\{ x + \frac{1}{x} \ : \ x \in \mathbb{R}_{>0} \right\} \subset \mathbb{R}$ possède un minimum et calculer $\min(A)$.

Q3 — Démontrer :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) \geqslant n^2 .$$

Cette inégalité est-elle optimale ?

Exercice 2 — Trois inégalités sur des modules de nombres complexes

Q4 — Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. Démontrer :

$$|a+b|^2 \leqslant \left(1+|a|^2\right)\left(1+|b|^2\right)$$

et étudier le cas d'égalité.

Q5 — Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$ son argument principal. Démontrer :

$$|z\theta| \geqslant |z - |z||$$

et en déduire :

$$|z-1| \leqslant ||z|-1| + |z\theta| .$$

Q6 — Soient $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer :

$$\left| \frac{1-(n+1)z^n + nz^{n+1}}{(1-z)^2} \right| \leqslant \frac{1-(n+1)|z|^n + n|z|^{n+1}}{(1-|z|)^2} .$$

Exercice 3 — Inégalité entre un produit et une somme pour un uplet d'éléments $[0,1]$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Q7 — Soient $(a_1,\dots,a_n)$ et $(b_1,\dots,b_n)$ deux n-uplets d'éléments de $[0,1]$ tels que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $a_i \leqslant b_i$. Démontrer :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i - \prod_{i=1}^{n} a_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} b_i - \prod_{i=1}^{n} b_i \, .$$

Q8 — Soient $(a_1,\dots,a_n)$ un n-uplet d'éléments de $[0,1]$. Démontrer :

$$\prod_{i=1}^{n} (1-a_i) \geqslant 1 - \sum_{i=1}^{n} a_i \, .$$

Exercice 4 — Transformée de Fourier discrète

Soit $N \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$. On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$ qui sont N-périodiques, i.e. :

$$\mathscr{S} := \left\{ f \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \, : \, \forall\, n \in \mathbb{Z} \quad f(n+N) = f(n) \right\} .$$

Q9 — Soit $f \in \mathscr{S}$ et $a \in \mathbb{Z}$. Démontrer que $\displaystyle\sum_{k=a}^{a+N-1} f(k) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k)$.

Q10 — Justifier que l'application :

$$r \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{S} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{[\![0,N-1]\!]} \\ f & \longmapsto & f_{|[\![0,N-1]\!]} \end{array} \right.$$

est bijective.

À toute application $f \in \mathscr{S}$, on associe l'application :

$$\widehat{f} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ n & \longmapsto & \widehat{f}(n) := \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} f(k)\, e^{-i2\pi\frac{kn}{N}} \end{array} \right. .$$

L'application $\widehat{f}$ est appelée transformée de Fourier de f.

Q11 — Démontrer que, pour tout $f \in \mathscr{S}$, $\widehat{f} \in \mathscr{S}$.

Q12 — Soit $f \in \mathscr{S}$. Calculer, pour tout $n \in [\![0,N-1]\!]$, $\displaystyle\frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1} \widehat{f}(\ell)\, e^{i2\pi\frac{\ell n}{N}}$.

Q13 — L'application :

$$T \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{S} & \longrightarrow & \mathscr{S} \\ f & \longmapsto & T(f) := \widehat{f} \end{array} \right.$$

est-elle injective, surjective, bijective ?

Soit $(f,g) \in \mathscr{S}^2$. Le produit de convolution de f par g est défini par :

$$f * g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ n & \longmapsto & f*g\,(n) := \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} f(k)g(n-k) \end{array} \right. .$$

Q14 — Vérifier que, pour tout $(f,g) \in \mathscr{S}^2$, $f * g \in \mathscr{S}$.

Q15 — Démontrer que, pour tout $(f,g) \in \mathscr{S}^2$, $f * g = g * f$.

Q16 — Démontrer que, pour tout $(f,g,h) \in \mathscr{S}^3$, $(f * g) * h = f * (g * h)$.

Q17 — Démontrer qu'il existe un unique $\delta \in \mathscr{S}$ tel que, pour tout $f \in \mathscr{S}$, $f * \delta = f = \delta * f$.

Q18 — Démontrer que, pour tout $(f,g) \in \mathscr{S}^2$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\widehat{f * g}(n) = \widehat{f}(n)\, \widehat{g}(n)$.

Q19 — Soit $f \in \mathscr{S}$ non identiquement nulle, i.e. distincte de l'application :

$$0_{\mathscr{S}} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ n & \longmapsto & 0 \,. \end{array} \right.$$

Existe-t-il nécessairement $g \in \mathscr{S}$ telle que, $f * g = g * f = \delta$?

Dans la suite de cet exercice, on pose $N := 3$ et on note $f \in \mathscr{S}$ l'application définie par :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ n & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 1 & si\ n \equiv 0\ [3] \ ; \\ 0 & si\ n \equiv 1\ [3] \ ; \\ 2 & si\ n \equiv 2\ [3] \ . \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Q20 — Calculer $\widehat{f}$.

Q21 — Calculer $f * f$.

Q22 — Résoudre l'équation $f * g = \delta$ d'inconnue $g \in \mathscr{S}$.

Remarque — La transformée de Fourier discrète, objet de cet exercice, a des applications en physique, dans l'étude des signaux échantillonnés.

Exercice 5 — Théorème de Bernstein

Soient E, F des ensembles et $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow E$ deux applications injectives. On pose :

$$h = g \circ f \qquad R = E \setminus g(F) \qquad \mathscr{F} := \{M \in \mathscr{P}(E) \,:\, R \cup h(M) \subset M\} \qquad A := \bigcap_{M \in \mathscr{F}} M \,.$$

Q23 — Soient A_1, A_2 deux parties de E telles que $A_1 \subset A_2$. Démontrer : $h(A_1) \subset h(A_2)$.

Q24 — Démontrer : $h(A) = \displaystyle\bigcap_{M \in \mathscr{F}} h(M)$.

Q25 — Démontrer : $E \in \mathscr{F}$ et $A \in \mathscr{F}$.

Q26 — Démontrer, pour tout $M \in \mathscr{F}$: $R \cup h(M) \in \mathscr{F}$.

On pose $B := E \setminus A$, $A' := f(A)$ et $B' := g^{-1}(B)$.

Q27 — Démontrer : $R \cup h(A) = A$ et $B' = F \setminus A'$.

Q28 — Démontrer : $f' := f_{|A}^{|A'}$ et $g' := g_{|B'}^{|B}$ sont bijectives.

Q29 — Soit l'application :

$$\varphi \left| \begin{array}{lcc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f'(x) & \text{si } x \in A \\ (g')^{-1}(x) & \text{si } x \in B \end{cases} \end{array} \right. .$$

Démontrer : φ est bijective.

Remarque — On a ainsi démontré le théorème de Bernstein : s'il existe une injection d'un ensemble E dans un ensemble F et une injection de F dans E, alors il existe une bijection de E dans F.