# Un corrigé du Devoir Libre n°4

**Q1 —** Soient $E, F, G$ des ensembles et $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ des applications. Démontrer que :

$$\forall A \in \mathscr{P}(E) \qquad (g \circ f)(A) = g(f(A)) \quad \text{et} \quad \mathrm{id}_E(A) = A\,.$$

Soit $A$ une partie de $A$.

- Démontrons $(g \circ f)(A) = g(f(A))$ en raisonnant par double inclusion.

  $\boxed{\subset}$ Soit $z \in (g \circ f)(A)$. Alors il existe $a \in A$ tel que $z = g \circ f(a) = g(f(a))$.
  - Comme $a \in A$, $f(a) \in f(A)$.
  - Comme $f(a) \in f(A)$, $g(f(a)) \in g(f(A))$.

  Ainsi $z = g(f(a)) \in g(f(A))$.

  $\boxed{\supset}$ Soit $z \in g(f(A))$.
  - Alors il existe $y \in f(A)$ tel que $z = g(y)$.
  - Comme $y \in f(A)$ il existe $a \in A$ tel que $y = f(a)$.

  Ainsi $z = g(f(a)) = g \circ f(a)$. Puisque $a \in A$, $z \in (g \circ f)(A)$.
- Démontrons à présent que $\mathrm{id}_E(A) = A$, en raisonnant une nouvelle fois par double inclusion.

  $\boxed{\subset}$ Soit $x \in \mathrm{id}_E(A)$. Alors il existe $a \in A$ tel que $x = \mathrm{id}_E(a) = a$. Ainsi $x = a \in A$.

  $\boxed{\supset}$ Soit $a \in A$. Comme $a = \mathrm{id}_E(a)$, $a$ est l'image d'un élément de $A$ par $\mathrm{id}_E$. Ainsi $a \in \mathrm{id}_E(A)$.

Tout notre solution repose uniquement sur la définition d'image directe d'une partie par une application.

*Soit $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$ un repère orthonormé du plan $\mathscr{P}$ grâce auquel nous identifions l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes et le plan $\mathscr{P}$.*

*Soit $(\omega, R) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}_{>0}$. On considère le cercle $\mathscr{C}(\omega, R) := \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z - \omega| = R\}$ de centre le point d'affixe $\omega$ et de rayon $R$.*

*Soit $w \in \mathbb{C}$. On considère l'application :*

$$\tau_w \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z + w \end{array} \right.$$

*qui est la translation associée au vecteur d'affixe $w$.*

**Q2 —** Démontrer que l'application $\tau_w$ est bijective et préciser son application réciproque.

Guidés par l'effet de la transformation géométrique $\tau_w$ sur un point du plan $\mathscr{P}$, nous conjecturons que $\tau_{-w} \circ \tau_w = \mathrm{id}_{\mathbb{C}} = \tau_w \circ \tau_{-w}$. Démontrons ce résultat.

- Les applications $\tau_{-w} \circ \tau_w$ et $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ ont même source et but.
  Soit $z \in \mathbb{C}$.
  $$\tau_{-w} \circ \tau_w(z) = \tau_{-w}(\tau_w(z)) = \tau_{-w}(z + w) = z + w - w = z = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}(z).$$
  Nous en déduisons que $\tau_{-w} \circ \tau_w = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$.
- Les applications $\tau_w \circ \tau_{-w}$ et $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ ont même source et but.
  Soit $z \in \mathbb{C}$.
  $$\tau_w \circ \tau_{-w}(z) = \tau_w(\tau_{-w}(z)) = \tau_w(z - w) = z - w + w = z = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}(z).$$
  Nous en déduisons que $\tau_w \circ \tau_{-w} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$.

Des deux points précédents, nous déduisons que $\boxed{\tau_w \text{ est bijective et } (\tau_w)^{-1} = \tau_{-w}.}$

**Q3 —** Déterminer $\tau_w(\mathscr{C}(\omega, R))$.
*Indication : On pourra commencer par conjecturer un objet géométrique $\mathscr{C}'$ tel que $\tau_w(\mathscr{C}(\omega,R)) = \mathscr{C}'$ à l'aide d'une figure par exemple. Ensuite on pourra démontrer l'inclusion $(\star)$ $\tau_w(\mathscr{C}(\omega,R)) \subset \mathscr{C}'$. Pour l'inclusion réciproque, on pourra s'appuyer sur l'inclusion $(\star)$,* **Q1** *et* **Q2**.

Nous conjecturons, par voie géométrique, que $\tau_w(\mathscr{C}(\omega,R)) = \mathscr{C}(\omega+w,R)$. Démontrons ce résultat en raisonnant par double inclusion.

$\boxed{\subset}$ Soit $z' \in \tau_w(\mathscr{C}(\omega,R))$. Alors il existe $z \in \mathscr{C}(\omega,R)$ tel que $z' = \tau_w(z) = z+w$. Nous calculons :

$$\left|z' - (\omega+w)\right| = |z+w-(\omega+w)| = |z-\omega| = R$$

puisque $z \in \mathscr{C}(\omega,R)$. Ainsi $z' \in \mathscr{C}(\omega+w,R)$. Nous avons établi l'inclusion :

$$\boxed{\tau_w(\mathscr{C}(\omega,R)) \subset \mathscr{C}(\omega+w,R)}$$

$\boxed{\supset}$ L'inclusion précédente vaut pour des complexes $\omega$ et $w$ quelconques. En la spécialisant à :

$$\omega \longleftarrow \omega+w \qquad\qquad w \longleftarrow -w$$

il vient $\tau_{-w}(\mathscr{C}(\omega+w,R)) \subset \mathscr{C}(\omega,R)$. Nous en déduisons :

$$(\star) \qquad \tau_w(\tau_{-w}(\mathscr{C}(\omega+w,R))) \subset \tau_w(\mathscr{C}(\omega,R)) \;.$$

D'après Q1 et Q2 :

$$(\star\star) \qquad \tau_w(\tau_{-w}(\mathscr{C}(\omega+w,R))) = \tau_w \circ \tau_{-w}(\mathscr{C}(\omega+w,R)) = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}(\mathscr{C}(\omega+w,R)) = \mathscr{C}(\omega+w,R) \;.$$

De $(\star)$ et $(\star\star)$, nous déduisons $\boxed{\mathscr{C}(\omega+w,R) \subset \tau_w(\mathscr{C}(\omega,R))\;.}$

D'après les deux inclusions précédentes, $\boxed{\tau_w(\mathscr{C}(\omega,R)) = \mathscr{C}(\omega+w,R).}$

*Soit $r \in \mathbb{R}_{>0}$. On considère l'application :*

$$h_r \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & r\,z \end{array} \right.$$

*qui est une l'homothétie de centre O et de rapport $r$.*

**Q4 —** Démontrer que l'application $h_r$ est bijective et préciser son application réciproque.

Guidés par l'effet de la transformation géométrique $h_r$ sur un point du plan $\mathscr{P}$, nous conjecturons que $h_{1/r} \circ h_r = \mathrm{id}_{\mathbb{C}} = h_r \circ \tau_{1/r}$. Démontrons ce résultat.

- Les applications $h_{1/r} \circ h_r$ et $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ ont même source et but.
  Soit $z \in \mathbb{C}$.
  $$h_{1/r} \circ h_r(z) = h_{1/r}(h_r(z)) = h_{1/r}(r \times z) = \frac{1}{r} \times r \times z = z = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}(z).$$
  Nous en déduisons que $h_{1/r} \circ h_r = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$.
- Les applications $h_r \circ h_{1/r}$ et $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ ont même source et but.
  Soit $z \in \mathbb{C}$.
  $$h_r \circ h_{1/r}(z) = h_r(h_{1/r}(z)) = h_r\left(\frac{1}{r} \times z\right) = r \times \frac{1}{r} \times z = z = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}(z).$$
  Nous en déduisons que $h_r \circ \tau_{1/r} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$.

Des deux points précédents, nous déduisons que $\boxed{h_r \text{ est bijective et } (h_r)^{-1} = h_{1/r}.}$

**Q5 —** Déterminer $h_r(\mathscr{C}(\omega,R))$.
*Indication : On pourra commencer par conjecturer un objet géométrique $\mathscr{C}'$ tel que $h_r(\mathscr{C}(\omega,R)) = \mathscr{C}'$ à l'aide*

*d'une figure par exemple. Ensuite on pourra démontrer l'inclusion* $(\star)$ $h_r(\mathscr{C}(\omega,R)) \subset \mathscr{C}'$. *Pour l'inclusion réciproque, on pourra s'appuyer sur l'inclusion* $(\star)$, **Q1** *et* **Q4**.

Nous conjecturons, par voie géométrique, que $h_r(\mathscr{C}(\omega,R)) = \mathscr{C}(r\omega, rR)$. Démontrons ce résultat en raisonnant par double inclusion.

$\boxed{\subset}$ Soit $z' \in h_r(\mathscr{C}(\omega,R))$. Alors il existe $z \in \mathscr{C}(\omega,R)$ tel que $z' = h_r(z) = rz$. Nous calculons :

$$|z' - r\omega| = |rz - r\omega| = |r|\ |z-\omega| = rR$$

puisque $z \in \mathscr{C}(\omega,R)$ et $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Ainsi $z' \in \mathscr{C}(r\omega, rR)$. Nous avons établi l'inclusion :

$$\boxed{h_r(\mathscr{C}(\omega,R)) \subset \mathscr{C}(r\omega,rR)}$$

$\boxed{\supset}$ L'inclusion précédente vaut pour un complexe $\omega$ et des réels strictement positifs $R, r$ quelconques. En la spécialisant à :

$$\omega \longleftarrow r\omega \qquad R \longleftarrow rR \qquad r \longleftarrow \frac{1}{r}$$

il vient $h_{1/r}(\mathscr{C}(r\omega,rR)) \subset \mathscr{C}(\omega,R)$. Nous en déduisons :

$$(\star) \qquad h_r(h_{1/r}(\mathscr{C}(r\omega,rR))) \subset h_r(\mathscr{C}(\omega,R))\ .$$

D'après Q1 et Q4 :

$$(\star\star) \qquad h_r(h_{1/r}(\mathscr{C}(r\omega,rR))) = h_r \circ h_{1/r}(\mathscr{C}(r\omega,rR)) = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}(\mathscr{C}(r\omega,rR)) = \mathscr{C}(r\omega,rR)\ .$$

De $(\star)$ et $(\star\star)$, nous déduisons $\boxed{\mathscr{C}(r\omega,rR) \subset h_r(\mathscr{C}(\omega,R))\ .}$

D'après les deux inclusions précédentes, $\boxed{h_r(\mathscr{C}(\omega,R)) = \mathscr{C}(r\omega,rR).}$

*Soit* $\theta \in \mathbb{R}$. *On considère l'application :*

$$\rho_\theta \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & e^{i\theta} z \end{array} \right.$$

*qui est la rotation de centre O et d'angle* $\theta$.

**Q6 —** Démontrer que l'application $\rho_\theta$ est bijective et préciser son application réciproque.

Guidés par l'effet de la transformation géométrique $\rho_\theta$ sur un point du plan $\mathscr{P}$, nous conjecturons que $\rho_{-\theta} \circ \rho_\theta = \mathrm{id}_{\mathbb{C}} = \rho_\theta \circ \rho_{-\theta}$. Démontrons ce résultat.

- Les applications $\rho_{-\theta} \circ \rho_\theta$ et $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ ont même source et but.
  Soit $z \in \mathbb{C}$.
  $$\rho_{-\theta} \circ \rho_\theta(z) = \rho_{-\theta}(\rho_\theta(z)) = \rho_{-\theta}(e^{i\theta} \times z) = e^{-i\theta} \times e^{i\theta} \times z = z = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}(z).$$
  Nous en déduisons que $\rho_{-\theta} \circ \rho_\theta = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$.
- Les applications $\rho_\theta \circ \rho_{-\theta}$ et $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ ont même source et but.
  Soit $z \in \mathbb{C}$.
  $$\rho_\theta \circ \rho_{-\theta}(z) = \rho_\theta(\rho_{-\theta}(z)) = \rho_\theta\left(e^{-i\theta} \times z\right) = e^{i\theta} \times e^{-i\theta} \times z = z = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}(z).$$
  Nous en déduisons que $\rho_\theta \circ \rho_{-\theta} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$.

Des deux points précédents, nous déduisons que $\boxed{\rho_\theta \text{ est bijective et } \left(\rho_\theta\right)^{-1} = \rho_{-\theta}.}$

**Q7 —** Déterminer $\rho_\theta(\mathscr{C}(\omega,R))$.
*Indication : On pourra commencer par conjecturer un objet géométrique* $\mathscr{C}'$ *tel que* $\rho_\theta(\mathscr{C}(\omega,R)) = \mathscr{C}'$ *à l'aide d'une figure par exemple. Ensuite on pourra démontrer l'inclusion* $(\star)$ $\rho_\theta(\mathscr{C}(\omega,R)) \subset \mathscr{C}'$. *Pour l'inclusion réciproque, on pourra s'appuyer sur l'inclusion* $(\star)$, **Q1** *et* **Q6**.

Nous conjecturons, par voie géométrique, que $\rho_\theta(\mathscr{C}(\omega,R)) = \mathscr{C}\left(e^{i\theta}\omega, R\right)$. Démontrons ce résultat en raisonnant par double inclusion.

$\boxed{\subset}$ Soit $z' \in \rho_\theta(\mathscr{C}(\omega,R))$. Alors il existe $z \in \mathscr{C}(\omega,R)$ tel que $z' = \rho_\theta(z) = e^{i\theta}z$. Nous calculons :

$$\left|z' - e^{i\theta}\omega\right| = \left|e^{i\theta}z - e^{i\theta}\omega\right| = \left|e^{i\theta}\right| \, |z-\omega| = R$$

puisque $z \in \mathscr{C}(\omega,R)$ et $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$. Ainsi $z' \in \mathscr{C}\left(e^{i\theta}\omega,R\right)$. Nous avons établi l'inclusion :

$$\boxed{\rho_\theta(\mathscr{C}(\omega,R)) \subset \mathscr{C}\left(e^{i\theta}\omega,R\right)}$$

$\boxed{\supset}$ L'inclusion précédente vaut pour un complexe $\omega$ et un réel $\theta$ quelconques. En la spécialisant à :

$$\omega \longleftarrow e^{i\theta}\omega \qquad\qquad \theta \longleftarrow -\theta$$

il vient $\rho_{-\theta}\left(\mathscr{C}\left(e^{i\theta}\omega,R\right)\right) \subset \mathscr{C}(\omega,R)$. Nous en déduisons :

$$(\star) \qquad \rho_\theta\left(\rho_{-\theta}\left(\mathscr{C}\left(e^{i\theta},R\right)\right)\right) \subset \rho_\theta(\mathscr{C}(\omega,R)) \;.$$

D'après Q1 et Q6 :

$$(\star\star) \qquad \rho_\theta\left(\rho_{-\theta}\left(\mathscr{C}\left(e^{i\theta}\omega,R\right)\right)\right) = \rho_\theta\circ\rho_{-\theta}\left(\mathscr{C}\left(e^{i\theta}\omega,R\right)\right) = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}\left(\mathscr{C}\left(e^{i\theta}\omega,R\right)\right) = \mathscr{C}\left(e^{i\theta}\omega,R\right) .$$

De $(\star)$ et $(\star\star)$, nous déduisons $\boxed{\mathscr{C}\left(e^{i\theta}\omega,R\right) \subset \rho_\theta(\mathscr{C}(\omega,R)) \;.}$

D'après les deux inclusions précédentes, $\boxed{\rho_\theta(\mathscr{C}(\omega,R)) = \mathscr{C}\left(e^{i\theta}\omega,R\right).}$

*On considère l'application :*

$$\mathrm{inv} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & \dfrac{1}{z} . \end{array} \right.$$

**Q8 —** Démontrer que l'application inv est bijective et préciser son application réciproque.

Comme la source et le but de inv sont égaux à $\mathbb{C}^*$ et comme, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\dfrac{1}{1/z} = z$, $\mathrm{inv}\circ\mathrm{inv} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^*}$.
Ainsi $\boxed{\text{inv est bijective et } \mathrm{inv}^{-1} = \mathrm{inv}.}$

**Q9 —** On suppose que $0 \notin \mathscr{C}(\omega,R)$ de sorte que $\mathscr{C}(\omega,R) \subset \mathbb{C}^*$. Déterminer $\mathrm{inv}(\mathscr{C}(\omega,R))$.
*Indication : À l'aide d'une analyse, on pourra commencer par déterminer un objet géométrique $\mathscr{C}'$ tel que $(\star)$ $\mathrm{inv}(\mathscr{C}(\omega,R)) \subset \mathscr{C}'$. Pour l'inclusion réciproque, on pourra s'appuyer sur l'inclusion $(\star)$,* **Q1** *et* **Q8**.

- *Un cas particulier* Supposons tout d'abord que :

**(C)** $\omega \in \mathbb{R}^+$, i.e. que le centre du cercle $\mathscr{C}(\omega,R)$ est situé sur le demi-axe des réels positifs.

Dans ce cas, nous conjecturons, par voie géométrique, que $\mathrm{inv}(\mathscr{C}(\omega,R))$ est le cercle de diamètre $[AB]$ où $A\left(\dfrac{1}{\omega+R}\right)$ et $B\left(\dfrac{1}{\omega-R}\right)$, i.e. $\mathrm{inv}(\mathscr{C}(\omega,R)) = \mathscr{C}\left(\dfrac{\omega}{\omega^2-R^2}, \dfrac{R}{\left|\omega^2-R^2\right|}\right)$. Nous démontrons ce résultat en raisonnant par double inclusion.

$\boxed{\subset}$ Soit $z' \in \text{inv}(\mathscr{C}(\omega, R))$. Alors il existe $z \in \mathscr{C}(\omega, R)$ tel que $z' = \dfrac{1}{z}$. Nous calculons :

$$\begin{aligned}
\left|z' - \frac{\omega}{\omega^2 - R^2}\right| &= \left|\frac{1}{z} - \frac{\omega}{\omega^2 - R^2}\right| \\
&= \left|\frac{\omega^2 - R^2 - \omega z}{z\left(\omega^2 - R^2\right)}\right| \\
&= \left|\frac{\omega(\omega - z) - |\omega - z|^2}{z\left(\omega^2 - R^2\right)}\right| && [z \in \mathscr{C}(\omega, R) \text{ donc } R = |z - \omega|] \\
&= \left|\frac{\omega(\omega - z) - (\omega - z)(\omega - \overline{z})}{z\left(\omega^2 - R^2\right)}\right| && [\omega \in \mathbb{R}_+] \\
&= \frac{|\omega - z|\ \left|\overline{z}\right|}{|z|\ \left|\omega^2 - R^2\right|} && \left[\text{Propriétés algébriques du module}\right] \\
&= \frac{R}{\left|\omega^2 - R^2\right|} && \left[\left|\overline{z}\right| = |z| \text{ et } R = |z - \omega|\ \right]
\end{aligned}$$

Ainsi $z' \in \mathscr{C}\left(\dfrac{\omega}{\omega^2 - R^2}, \dfrac{R}{\left|\omega^2 - R^2\right|}\right)$. Nous avons donc établi $\boxed{\text{inv}(\mathscr{C}(\omega, R)) \subset \mathscr{C}\left(\dfrac{\omega}{\omega^2 - R^2}, \dfrac{R}{\left|\omega^2 - R^2\right|}\right)}$.

$\boxed{\subset}$ L'inclusion précédente vaut pour un réel positif $\omega$ et un rayon $R > 0$ quelconque. En la spécialisant à :

$$\omega \longleftarrow \frac{\omega}{\omega^2 - R^2} \qquad\qquad R \longleftarrow \frac{R}{\left|\omega^2 - R^2\right|}$$

il vient $\text{inv}\left(\mathscr{C}\left(\dfrac{\omega}{\omega^2 - R^2}, \dfrac{R}{\left|\omega^2 - R^2\right|}\right)\right) \subset \mathscr{C}(\omega, R)$. Nous en déduisons :

$$(\star) \qquad \text{inv}\left(\text{inv}\left(\mathscr{C}\left(\frac{\omega}{\omega^2 - R^2}, \frac{R}{\left|\omega^2 - R^2\right|}\right)\right)\right) \subset \text{inv}(\mathscr{C}(\omega, R))\ .$$

D'après Q1 et Q8 :

$$\begin{aligned}
(\star\star) \qquad \text{inv}\left(\text{inv}\left(\mathscr{C}\left(\frac{\omega}{\omega^2 - R^2}, \frac{R}{\left|\omega^2 - R^2\right|}\right)\right)\right) &= \text{inv} \circ \text{inv}\left(\mathscr{C}\left(\frac{\omega}{\omega^2 - R^2}, \frac{R}{\left|\omega^2 - R^2\right|}\right)\right) \\
&= \text{id}_{\mathbb{C}}\left(\mathscr{C}\left(\frac{\omega}{\omega^2 - R^2}, \frac{R}{\left|\omega^2 - R^2\right|}\right)\right) \\
&= \mathscr{C}\left(\frac{\omega}{\omega^2 - R^2}, \frac{R}{\left|\omega^2 - R^2\right|}\right).
\end{aligned}$$

De $(\star)$ et $(\star\star)$, nous déduisons $\boxed{\mathscr{C}\left(\dfrac{\omega}{\omega^2 - R^2}, \dfrac{R}{\left|\omega^2 - R^2\right|}\right) \subset \text{inv}(\mathscr{C}(\omega, R))}$.

D'après les deux inclusions précédentes, $\boxed{\text{inv}(\mathscr{C}(\omega, R)) = \mathscr{C}\left(\dfrac{\omega}{\omega^2 - R^2}, \dfrac{R}{\left|\omega^2 - R^2\right|}\right)}$.

• *Cas général* Si $\omega = 0$, alors $\omega \in \mathbb{R}_+$ et le résultat établi sous la condition (C) s'applique au cercle $\mathscr{C}(0, R)$ :

$$\boxed{\mathrm{inv}(\mathscr{C}(0,R)) = \mathscr{C}\left(0, \frac{1}{R}\right).}$$

Supposons désormais que $\omega \in \mathbb{C}^*$ et notons $\theta \in \mathbb{R}$ un argument de $\omega$. Remarquons que :

$$e^{-i\theta}\omega = |\omega| \qquad \text{et} \qquad e^{-i2\theta}\omega = \overline{\omega}\,.$$

Comme $e^{-i\theta}\omega \in \mathbb{R}_+$, le résultat établi sous la condition (C) s'applique au cercle $\mathscr{C}\left(e^{-i\theta}\omega, R\right)$ :

$$(\star) \qquad \mathrm{inv}\left(\mathscr{C}\left(e^{-i\theta}\omega, R\right)\right) = \mathscr{C}\left(\frac{e^{-i\theta}\omega}{e^{-i2\theta}\omega^2 - R^2}, \frac{R}{\left|e^{-i2\theta}\omega^2 - R^2\right|}\right) = \mathscr{C}\left(\frac{e^{-i\theta}\omega}{|\omega|^2 - R^2}, \frac{R}{\left||\omega|^2 - R^2\right|}\right).$$

D'après Q1 et Q7, nous pouvons reformuler ce résultat sous la forme suivante :

$$(\star\star) \qquad \mathrm{inv}\left(\mathscr{C}\left(e^{-i\theta}\omega, R\right)\right) = \mathrm{inv}\left(\rho_{-\theta}\left(\mathscr{C}(\omega,R)\right)\right) = \mathrm{inv}\circ\rho_{-\theta}\left(\mathscr{C}(\omega,R)\right)\,.$$

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Nous calculons :

$$\mathrm{inv}\circ\rho_{-\theta}(z) = \mathrm{inv}\left(\rho_{-\theta}(z)\right) = \mathrm{inv}\left(e^{-i\theta}z\right) = \frac{e^{i\theta}}{z} = e^{i\theta}\,\mathrm{inv}(z) = \rho_\theta\left(\mathrm{inv}(z)\right) = \rho_\theta \circ \mathrm{inv}(z)\,.$$

Ainsi $(\star\star)$ peut se réécrire :

$$(\star\star\star) \qquad \mathrm{inv}\left(\mathscr{C}\left(e^{-i\theta}\omega, R\right)\right) = \rho_\theta \circ \mathrm{inv}\left(\mathscr{C}(\omega,R)\right)\,.$$

De $(\star)$ et $(\star\star\star)$ nous déduisons :

$$\rho_\theta \circ \mathrm{inv}\left(\mathscr{C}(\omega,R)\right) = \mathscr{C}\left(\frac{e^{-i\theta}\omega}{|\omega|^2 - R^2}, \frac{R}{\left||\omega|^2 - R^2\right|}\right).$$

D'après Q1 et Q6, il vient :

$$\mathrm{inv}\left(\mathscr{C}(\omega,R)\right) = \rho_{-\theta}\left(\mathscr{C}\left(\frac{e^{-i\theta}\omega}{|\omega|^2 - R^2}, \frac{R}{\left||\omega|^2 - R^2\right|}\right)\right).$$

D'après Q7, nous pouvons alors conclure que $\mathrm{inv}\left(\mathscr{C}(\omega,R)\right) = \mathscr{C}\left(\frac{e^{-i2\theta}\omega}{|\omega|^2 - R^2}, \frac{R}{\left||\omega|^2 - R^2\right|}\right)$, soit :

$$\boxed{\mathrm{inv}\left(\mathscr{C}(\omega,R)\right) = \mathscr{C}\left(\frac{\overline{\omega}}{|\omega|^2 - R^2}, \frac{R}{\left||\omega|^2 - R^2\right|}\right).}$$

Remarquons que cette identité vaut encore pour $\omega = 0$.

On pourra visualiser le résultat obtenu dans cette question grâce au lien Geogebra suivant.

https://www.geogebra.org/m/jsst5nds

Le point $M$ est animé, tout comme son image $M'$ par inv. Le point $\omega$ peut être déplacé et le rayon $R$ modifié. On notera avec intérêt ce qui se produit lorsque le cercle $\mathscr{C}(\omega, R)$ a un point voisin de l'origine.

*Soient* $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ *tel que* $ad - bc = 1$. *On considère l'homographie :*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \left\{ -\dfrac{d}{c} \right\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \setminus \left\{ \dfrac{a}{c} \right\} \\ & & \\ z & \longmapsto & \dfrac{az+b}{cz+d}. \end{array} \right.$$

**Q10 —** Démontrer que l'application $f$ est bien définie, bijective et préciser son application réciproque.

- Vérifions tout d'abord que l'application $f$ est bien définie.
  - Si $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ -\dfrac{d}{c} \right\}$ alors $cz + d \neq 0$ et donc nous pouvons calculer $\dfrac{az+b}{cz+d}$.
  - Soit $z \setminus \left\{ -\dfrac{d}{c} \right\}$. Démontrons que $\dfrac{az+b}{cz+d} \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \dfrac{a}{c} \right\}$ en raisonnant par l'absurde.

    Supposons donc $\dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{a}{c}$. Nous en déduisons :

    $$acz + bc = acz + ad$$

    puis $ab - bc = 0$ ce qui contredit $ad - bc = 1$.

  D'après les deux études précédentes, $\boxed{\text{l'application } f \text{ est bien définie}}$.
- Étudions à présent la bijectivité de $f$. Soit $z' \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \dfrac{a}{c} \right\}$ fixé. Résolvons l'équation :

  $$(E_{z'}) \quad f(z) = z' \text{ d'inconnue } z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}.$$

  Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ -\dfrac{d}{c} \right\}$.

  $$\begin{aligned} f(z) = z' &\iff az + b = czz' + dz' \\ &\iff z(-cz' + a) = dz' - b \\ &\iff z = \frac{dz' - b}{-cz' + a} \qquad [\text{car } -cz' + a \neq 0] \end{aligned}$$

  Si $\dfrac{dz'-b}{-cz'+a} = -\dfrac{d}{c}$ alors $cdz' - bc = cdz' - ad$ puis $ad - bc = 0$, ce qui n'est pas. Ainsi l'équation $(E_{z'})$ possède une unique solution dans $\mathbb{C} \setminus \left\{ -\dfrac{d}{c} \right\}$.

  Nous en déduisons que $\boxed{\text{l'application est bijective}}$ et :

  $$\boxed{f^{-1} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \left\{ \dfrac{a}{c} \right\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \setminus \left\{ -\dfrac{d}{c} \right\} \\ & & \\ z' & \longmapsto & \dfrac{dz'-b}{-cz'+a}. \end{array} \right.}$$

**Q11 —** Déterminer :

- une application $\tau_1$ qui est une restriction de corestriction d'une translation $\tau_{w_1}$ $(w_1 \in \mathbb{C})$ ;
- une application $\rho$ qui est une restriction de corestriction d'une rotation $\rho_\theta$ $(\theta \in \mathbb{R})$ ;
- une application $h$ qui est une restriction de corestriction d'une homothétie $h_r$ $(r \in \mathbb{R}_{>0})$ ;
- une application $\tau_2$ qui est une restriction de corestriction d'une translation $\tau_{w_2}$ $(w_2 \in \mathbb{C})$ ;

telle que $f = \tau_2 \circ h \circ \rho \circ \mathrm{inv} \circ \tau_1$.

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$. Nous calculons :

$$\begin{array}{rcl} f(z) & = & \dfrac{az+b}{cz+d} \\ & = & \dfrac{\frac{a}{c}(cz+d) - \frac{ad}{c} + b}{cz+d} \\ & = & \dfrac{a}{c} + \dfrac{bc-ad}{c} \times \dfrac{1}{cz+d} \\ & = & \dfrac{a}{c} - \dfrac{1}{c^2} \times \dfrac{1}{z+\frac{d}{c}} \qquad [ad-bc=1] \ . \end{array}$$

Le nombre complexe $-\frac{1}{c^2}$ est non nul. Soient $r>0$ son module et $\theta \in \mathbb{R}$ un de ses arguments. Si on pose :

$$\tau_1 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & z + \frac{d}{c} \end{array} \right. \qquad \rho \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & e^{i\theta} z \end{array} \right.$$

$$h \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & rz \end{array} \right. \qquad \tau_2 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\} \\ z & \longmapsto & z + \frac{a}{c} \end{array} \right.$$

les applications $\tau_1, \rho, h, \tau_2$ sont bien des resctrictions et corestrictions des transformations géométriques demandées et, de plus, elles vérifient $f = \tau_2 \circ h \circ \rho \circ \mathrm{inv} \circ \tau_1$.

**Q12 —** On suppose que $-\frac{d}{c} \notin \mathscr{C}(\omega, R)$ de sorte que $\mathscr{C}(\omega, R) \subset \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$. Déterminer $f(\mathscr{C}(\omega, R))$.

Grâce à la décomposition $f = \tau_2 \circ h \circ \rho \circ \mathrm{inv} \circ \tau_1$, l'image du cercle $\mathscr{C}(\omega, R)$ par $f$ peut être aisément déterminé grâce à Q1 (qui aura donc joué un rôle clé tout du long), Q3, Q5, Q7 et Q9.

$$\boxed{f(\mathscr{C}(\omega, R)) = \mathscr{C}\left( \frac{a}{c} - \frac{\left(\frac{\overline{\omega}}{c^2} + \frac{\overline{d}}{c\,|c|^2}\right)}{\left|\omega + \frac{d}{c}\right|^2 - R^2}, \frac{R}{\left|\omega + \frac{d}{c}\right|^2 - R^2} \right).}$$