DEVOIR LIBRE N°4

Pour le vendredi 14 octobre

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Les assertions seront toutes justifiées avec soin, les raisonnements structurés, les résultats encadrés.

Q1 — Soient E, F, G des ensembles et $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ des applications. Démontrer que :

$$\forall A \in \mathscr{P}(E) \qquad (g \circ f)(A) = g(f(A)) \quad \text{et} \quad \mathrm{id}_E(A) = A\,.$$

Soit $\left(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ un repère orthonormé du plan $\mathscr{P}$ grâce auquel nous identifions l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes et le plan $\mathscr{P}$.

Soit $(\omega, R) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}_{>0}$. On considère le cercle $\mathscr{C}(\omega, R) := \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z - \omega| = R\}$ de centre le point d'affixe ω et de rayon R.

Soit $w \in \mathbb{C}$. On considère l'application :

$$\tau_w \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z + w \end{array} \right.$$

qui est la translation associée au vecteur d'affixe w.

Q2 — Démontrer que l'application τ_w est bijective et préciser son application réciproque.

Q3 — Déterminer $\tau_w(\mathscr{C}(\omega, R))$.
*Indication : On pourra commencer par conjecturer un objet géométrique $\mathscr{C}'$ tel que $\tau_w(\mathscr{C}(\omega, R)) = \mathscr{C}'$ à l'aide d'une figure par exemple. Ensuite on pourra démontrer l'inclusion $(\star)$ $\tau_w(\mathscr{C}(\omega, R)) \subset \mathscr{C}'$. Pour l'inclusion réciproque, on pourra s'appuyer sur l'inclusion $(\star)$, **Q1** et **Q2**.*

Soit $r \in \mathbb{R}_{>0}$. On considère l'application :

$$h_r \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & r\,z \end{array} \right.$$

qui est une l'homothétie de centre O et de rapport r.

Q4 — Démontrer que l'application h_r est bijective et préciser son application réciproque.

Q5 — Déterminer $h_r(\mathscr{C}(\omega, R))$.
*Indication : On pourra commencer par conjecturer un objet géométrique $\mathscr{C}'$ tel que $h_r(\mathscr{C}(\omega, R)) = \mathscr{C}'$ à l'aide d'une figure par exemple. Ensuite on pourra démontrer l'inclusion $(\star)$ $h_r(\mathscr{C}(\omega, R)) \subset \mathscr{C}'$. Pour l'inclusion réciproque, on pourra s'appuyer sur l'inclusion $(\star)$, **Q1** et **Q4**.*

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On considère l'application :

$$\rho_\theta \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & e^{i\theta}\,z \end{array} \right.$$

qui est la rotation de centre O et d'angle θ.

Q6 — Démontrer que l'application ρ_θ est bijective et préciser son application réciproque.

Q7 — Déterminer $\rho_\theta\left(\mathscr{C}(\omega,R)\right)$.
Indication : On pourra commencer par conjecturer un objet géométrique $\mathscr{C}'$ tel que $\rho_\theta\left(\mathscr{C}(\omega,R)\right)=\mathscr{C}'$ à l'aide d'une figure par exemple. Ensuite on pourra démontrer l'inclusion $(\star)$ $\rho_\theta\left(\mathscr{C}(\omega,R)\right)\subset\mathscr{C}'$. Pour l'inclusion réciproque, on pourra s'appuyer sur l'inclusion $(\star)$, **Q1** *et* **Q6**.

On considère l'application :

$$\mathrm{inv}\ \left|\ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & \dfrac{1}{z}. \end{array}\right.$$

Q8 — Démontrer que l'application inv est bijective et préciser son application réciproque.

Q9 — On suppose que $0\notin\mathscr{C}(\omega,R)$ de sorte que $\mathscr{C}(\omega,R)\subset\mathbb{C}^*$. Déterminer $\mathrm{inv}\left(\mathscr{C}(\omega,R)\right)$.
Indication : À l'aide d'une analyse, on pourra commencer par déterminer un objet géométrique $\mathscr{C}'$ tel que $(\star)$ $\mathrm{inv}\left(\mathscr{C}(\omega,R)\right)\subset\mathscr{C}'$. Pour l'inclusion réciproque, on pourra s'appuyer sur l'inclusion $(\star)$, **Q1** *et* **Q8**.

Soient $(a,b,c,d)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}$ tel que $ad-bc=1$. On considère l'homographie :

$$f\ \left|\ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\} & \longrightarrow & \mathbb{C}\setminus\left\{\dfrac{a}{c}\right\} \\ z & \longmapsto & \dfrac{az+b}{cz+d}. \end{array}\right.$$

Q10 — Démontrer que l'application f est bien définie, bijective et préciser son application réciproque.

Q11 — Déterminer :
- une application τ_1 qui est une restriction de corestriction d'une translation τ_{w_1} $(w_1\in\mathbb{C})$;
- une application ρ qui est une restriction de corestriction d'une rotation ρ_θ $(\theta\in\mathbb{R})$;
- une application h qui est une restriction de corestriction d'une homothétie h_r $(r\in\mathbb{R}_{>0})$;
- une application τ_2 qui est une restriction de corestriction d'une translation τ_{w_2} $(w_2\in\mathbb{C})$;

telle que $f=\tau_2\circ h\circ\rho\circ\mathrm{inv}\circ\tau_1$.

Q12 — On suppose que $-\dfrac{d}{c}\notin\mathscr{C}(\omega,R)$ de sorte que $\mathscr{C}(\omega,R)\subset\mathbb{C}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$. Déterminer $f\left(\mathscr{C}(\omega,R)\right)$.