Un corrigé du Devoir Libre n°3

Q1 — En spécialisant l'hypothèse de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$, nous en déduisons que la fonction :

$$h \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax^2+bx+c \end{array} \right.$$

est la fonction nulle. Sa dérivée seconde :

$$h'' \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2a \end{array} \right.$$

est donc également nulle, d'où $a=0$. Ainsi la fonction h se réécrit-elle :

$$h \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & bx+c\,. \end{array} \right.$$

Sa dérivée première :

$$h' \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & b \end{array} \right.$$

est également nulle, d'où $b=0$. De $a=b=0$ et de la nullité de la fonction h, nous déduisons $c=0$. Nous avons établi $\boxed{a=b=c=0.}$

Q2 — Soit $z\in\mathbb{C}$. De $z^3+a_1z^2+b_1z+c_1=z^3+a_2z^2+b_2z+c_2$, nous déduisons :

$$(a_1-a_2)z^2+(b_1-b_2)z+(c_1-c_2)=0\,.$$

Cette dernière identité valant pour un complexe z quelconque, Q1 nous livre $a_1-a_2=0$, $b_1-b_2=0$, $c_1-c_2=0$. Ainsi $\boxed{a_1=a_2,\ b_1=b_2 \text{ et } c_1=c_2.}$

Q3 — Soient $(\alpha,z)\in\mathbb{C}^2$. Nous calculons :

$$g(z)=f(z+\alpha)=(z+\alpha)^2+a(z+\alpha)^2+b(z+\alpha)+c=z^3+(3\alpha+a)z^2+(3\alpha^2+2a\alpha+b)z+\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+c\,.$$

La fonction g est donc polynomiale unitaire de degré 3 et son coefficient de degré 2 est $3\alpha+a$. Nous en déduisons que la fonction :

$$g \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & f(z+\alpha) \end{array} \right.$$

a un coefficient de degré 2 nul si et seulement si $\boxed{\alpha=-\frac{a}{3}}$.

Q4 — D'après le calcul effectué en Q3 et comme $\alpha=-\frac{a}{3}$, il vient, pour tout $z\in\mathbb{C}$:

$$g(z)=z^3+\left(3\left(-\frac{a}{3}\right)^2+2a\left(-\frac{a}{3}\right)+b\right)z+\left(-\frac{a}{3}\right)^3+a\left(-\frac{a}{3}\right)^2+b\left(-\frac{a}{3}\right)+c=z^3+\left(b-\frac{a^2}{3}\right)z+\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c$$

Nous en déduisons $\boxed{p=b-\frac{a^2}{3} \text{ et } q=\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c.}$

Q5 — Supposons qu'il existe $(\omega,\lambda)\in\mathbb{C}^2$ tel que, pour tout $z\in\mathbb{C}$:

$$g(z)=(z-\omega)^2(z-\lambda)=z^3-(2\omega+\lambda)z+(\omega^2+2\omega\lambda)z-\lambda\omega^2\,.$$

Comme par ailleurs, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $g(z) = z^3 + pz + q$, nous déduisons de Q2 :

$$\left\{ \begin{array}{ccccll} 2\omega & + & \lambda & = & 0 & (L1) \\ \omega^2 & + & 2\omega\lambda & = & p & (L2) \\ & & \lambda\omega^2 & = & q & (L3) \end{array} \right.$$

D'après (L_1), $\lambda = -2\omega$. En substituant -2ω à λ dans (L_2) et (L_3), il vient :

$$p = -3\omega^2 \qquad \text{et} \qquad q = -2\omega^3 .$$

Nous en déduisons alors aisément que $\boxed{4p^3 + 27q^2 = 0}$.

Q6 — Supposons désormais que $4p^3+27q^2 = 0$ et démontrons qu'il existe $(\omega, \lambda) \in \mathbb{C}^2$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$g(z) = (z-\omega)^2(z-\lambda).$$

Nous raisonnons par analyse-synthèse.

- *Analyse* Supposons qu'il existe $(\omega, \lambda) \in \mathbb{C}^2$ comme souhaité. Alors la démarche initiée en Q5 nous apprend que ω et λ satisfont $(L1), (L2), (L3)$.
  En combinant $(L1)$ et $(L2)$, il vient $p = -3\omega^2$. Comme q est réel et comme $4p^3 + 27q^2 = 0$, le nombre réel p est nécessairement négatif ou nul et donc $-\frac{p}{3} \geqslant 0$. Ainsi :
  $$\omega = \varepsilon \sqrt{-\frac{p}{3}} \quad \text{où } \varepsilon \in \{-1, 1\} .$$
  De $(L1)$ nous déduisons alors :
  $$\lambda = -2\,\varepsilon \sqrt{-\frac{p}{3}} .$$
  En fin d'analyse, nous avons alors des expressions pour ω et λ, qui dépendent d'un choix de signe (la valeur de ε qui est -1 ou 1).
- *Synthèse* Soit ω et λ comme en fin d'analyse, où $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.
  Soit $z \in \mathbb{C}$.
  $$(z-\omega)^2(z-\lambda) = z^3 - (2\omega+\lambda)z + (\omega^2 + 2\omega\lambda)z - \lambda\omega^2 .$$
  Calculons alors les coefficients $-(2\omega+\lambda)$, $\omega^2 + 2\omega\lambda$ et $-\lambda\omega^2$.
  — *Calcul de* $-(2\omega+\lambda)$
  $$-(2\omega+\lambda) = -\left(2\varepsilon\sqrt{-\frac{p}{3}} - 2\,\varepsilon\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) = 0$$
  — *Calcul de* $\omega^2 + 2\omega\lambda$
  $$\omega^2 + 2\omega\lambda = \left(\varepsilon\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^2 + 2\,\varepsilon\sqrt{-\frac{p}{3}}\left(-2\,\varepsilon\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) = -\frac{\varepsilon^2}{3}p + \frac{4\varepsilon^2}{3}p = p$$
  puisque $\varepsilon^2 = 1$.
  — *Calcul de* $-\lambda\omega^2$
  $$-\lambda\omega^2 = 2\,\varepsilon\sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\varepsilon\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^2 = \varepsilon^3\sqrt{-\frac{4\,p^3}{27}} = \varepsilon^3\sqrt{q^2} = \varepsilon^3\,|q|$$
  car $4p^3 + 27q^2 = 0$.
- *Conclusion* Si $q \geqslant 0$ (resp. $q < 0$), alors nous choisissons $\varepsilon := 1$ (resp $\varepsilon := -1$) pour que $\varepsilon^3\,|q| = q$. Ainsi, quel que soit le signe de q, nous aurons avec les choix effectués pour $\omega, \lambda, \varepsilon$:
  $$\forall\, z \in \mathbb{C} \qquad (z-\omega)^2(z-\lambda) = z^3 + pz + q = g(z) .$$

Q7 — De l'étude effectuée en Q6, sous l'hypothèse $4p^3+27q^2=0$, il ressort que :

- si $q \geqslant 0$, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^3+pz+q=(z-\omega)^2(z-\lambda)$, où $\omega := \sqrt{-\frac{p}{3}}$ et $\lambda := -2\sqrt{-\frac{p}{3}}$;
- si $q<0$, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^3+pz+q=(z-\omega)^2(z-\lambda)$ où $\omega := -\sqrt{-\frac{p}{3}}$ et $\lambda := 2\sqrt{-\frac{p}{3}}$.

Comme $\mathbb{C}$ est intègre, nous en déduisons que :

$$\boxed{\left\{z\in\mathbb{C} \,:\, z^3+pz+q=0\right\} = \begin{cases} \left\{\sqrt{-\frac{p}{3}}, -2\sqrt{-\frac{p}{3}}\right\} & \text{si } q \geqslant 0 \\ \left\{-\sqrt{-\frac{p}{3}}, 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\right\} & \text{si } q<0\,. \end{cases}}$$

Q8 — Pour résoudre l'équation :

$$z^3+\underbrace{3}_{a}z^2+\underbrace{(-9)}_{b}z+\underbrace{5}_{c}=0$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, nous tentons d'appliquer la démarche initiée dans les questions Q3–Q7. Pour cela, nous posons $p := b-\frac{a^2}{3}=-12$ et $q := \frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c=16$ (cf. Q4) et calculons :

$$4p^3+27q^2=0\,.$$

Nous pouvons alors appliquer Q7 ($q=16\geqslant 0$) pour obtenir que, pour tout $z\in\mathbb{C}$:

$$(\star) \qquad z^3+pz+q=0 \iff \left(z=\sqrt{-\frac{p}{3}}=2 \text{ ou } z=-2\sqrt{-\frac{p}{3}}=-4\right).$$

D'après Q3, comme $\alpha := -\frac{a}{3}=-1$, pour tout $z\in\mathbb{C}$, $(z-1)^3+3(z-1)^2-9(z-1)+5=z^3+pz+q$ et donc $(z \leftarrow z+1)$:

$$z^3+3z^2-9z+5=(z+1)^3+p(z+1)+q\,.$$

Soit $z\in\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} z^3+3z^2-9z+5=0 &\iff (z+1)^3+p(z+1)+q=0 \\ &\underset{(\star)}{\iff} (z+1=2 \text{ ou } z+1=-4)\,. \end{aligned}$$

Nous en déduisons $\boxed{\left\{z\in\mathbb{C} \,:\, z^3+3z^2-9z+5=0\right\}=\{1,-5\}\,.}$

Q9 — Notre solution repose sur le théorème de d'Alembert-Gauß, sur Q5 et sur Q3.

- D'après le théorème de d'Alembert-Gauß rappelé en début d'énoncé, il existe des nombres complexes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tels que, pour tout $z\in\mathbb{C}$:

$$z^3+pz+q=(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_3)\,.$$

- Si deux des nombres complexes $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ étaient égaux, alors l'application :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z^3+zp+q \end{array} \right.$$

  auraient une racine de multiplicité au moins 2 (cf. définition donnée en Q5) et $4p^3+27q^2$ serait nul (cf. Q5), ce qui n'est pas. Nous en déduisons donc que les nombres complexes $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ sont deux-à-deux distincts.
- Comme $\mathbb{C}$ est intègre :

$$\boxed{\text{l'équation } (E') \,:\, z^3+pz+q=0 \text{ possède trois solutions distinctes, qui sont } \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3.}$$

- Nous savons (cf. Q3) que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $(z+\alpha)^3 + a(z+\alpha)^2 + b(z+\alpha) + c = z^3 + pz + q$, où $\alpha := -\frac{a}{3}$. Nous en déduisons ($z \leftarrow z - \alpha$) que, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$z^3 + az^2 + bz + c = (z-\alpha)^3 + p(z-\alpha) + q\,.$$

Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{array}{rcl} z^3 + az^2 + bz + c = 0 & \iff & (z-\alpha)^3 + p(z-\alpha) + q = 0 \\ & \iff & z - \alpha \in \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}\,. \end{array}$$

Ainsi :

$\boxed{\text{l'équation } (E)\ :\ z^3 + az^2 + bz + c = 0 \text{ possède trois solutions distinctes, qui sont } \alpha_1 + \alpha, \alpha_2 + \alpha, \alpha_3 + \alpha.}$

Nous observons qu'une fois l'ensemble solution de l'équation (E') connu, l'ensemble solution de l'équation (E) s'obtient par simple translation de $\alpha := -\frac{a}{3}$.

Q10 — Soit $z \in \mathbb{C}$. Le polynôme de degré 2 :

$$X^2 - zX - \frac{p}{3}$$

possède deux racines dans $\mathbb{C}$ (éventuellement confondues), cf. C3.122. Si l'on note u et v ses deux racines ($u = v$ si le discriminant du trinôme est nul), alors d'après C3.124 :

$$u + v = -(-z) \qquad \text{et } uv = -\frac{p}{3}$$

d'où $\boxed{\text{l'existence de deux nombres complexes } u \text{ et } v \text{ tels que } u + v = z \text{ et } 3uv + p = 0.}$

Q11 — Nous savons que $z^3 + pz + q = 0$, puisque z est solution de (E'). Comme $u + v = z$ et $3uv + p = 0$, nous en déduisons :

$$(u+v)^3 - 3uv(u+v) + q = 0$$

et donc $u^3 + v^3 = -q$. De $3uv + p = 0$, nous déduisons également que $u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27}$. Ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} u^3 & + & v^3 & = & -q \\ & & u^3 v^3 & = & -\dfrac{p^3}{27} \end{array} \right.$$

D'après C3.126 :

$$\boxed{u^3 \text{ et } v^3 \text{ sont donc les deux racines du trinôme } X^2 + qX - \frac{p^3}{27}.}$$

Notons que le discriminant $q^2 + \frac{4p^3}{27} = \frac{4p^3 + 27q^2}{27} \in \mathbb{R}$ de ce trinôme étant non nul (cf. hypothèse pour cette partie du sujet), ce trinôme possède bien deux racines distinctes.

Q12 — Nous raisonnons par analyse-synthèse pour tout d'abord résoudre l'équation (E'). Les solutions de l'équation (E) s'en déduiront alors aisément (cf. Q9). Notre solution repose de manière essentielle sur le fait que nous savons que (E') possède trois solutions deux-à-deux distinctes (cf. Q9).

- *Analyse* Soit $z \in \mathbb{C}$ une solution de l'équation (E'). Soient également u et v deux nombres tels que :

$$u + v = z \qquad \text{et } 3uv + p = 0\,.$$

Leur existence a été établie en Q10. En Q11, nous avons démontré que u^3 et v^3 sont les racines du trinôme :

$$(\star) \qquad X^2 + qX - \frac{p^3}{27} = \left(X + \frac{q}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\frac{4p^3 + 27q^2}{27}\,.$$

Nous notons $\Delta := \dfrac{4p^3 + 27q^2}{27}$ le discriminant du précédent trinôme et scindons l'étude en deux parties suivant le signe de $\Delta \neq 0$ (cf. hypothèse pour cette partie du sujet).

— Cas où $4p^3 + 27q^2 > 0$. La forme canonique $(\star)$ livre :

$$X^2 + qX - \frac{p^3}{27} = \left(X + \frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)^2 = \left(X + \frac{q + \sqrt{\Delta}}{2}\right)\left(X + \frac{q - \sqrt{\Delta}}{2}\right)\,.$$

Nous en déduisons :

$$\begin{cases} & u^3 = \dfrac{-q-\sqrt{\Delta}}{2} =: Z_1 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad v^3 = \dfrac{-q+\sqrt{\Delta}}{2} =: Z_2 \in \mathbb{R} \\ \text{ou} & \\ & u^3 = \dfrac{-q+\sqrt{\Delta}}{2} = Z_2 \quad \text{et} \quad v^3 = \dfrac{-q-\sqrt{\Delta}}{2} = Z_1 \end{cases}$$

puis grâce au cours sur les racines cubiques d'un nombre complexe :

$$\begin{cases} & u = \sqrt[3]{Z_1}\, e^{i\frac{2\pi k_u}{3}} \text{ où } k_u \in \{0,1,2\} \quad \text{et} \quad v = \sqrt[3]{Z_2}\, e^{i\frac{2\pi k_v}{3}} \text{ où } k_v \in \{0,1,2\} \\ \text{ou} & \\ & u = \sqrt[3]{Z_2}\, e^{i\frac{2\pi k_u}{3}} \text{ où } k_u \in \{0,1,2\} \quad \text{et} \quad v = \sqrt[3]{Z_1}\, e^{i\frac{2\pi k_v}{3}} \text{ où } k_v \in \{0,1,2\}\,. \end{cases}$$

La condition $uv = -\dfrac{p}{3} \in \mathbb{R}$ restreint les possibilités pour le couple (u,v). Ne restent les valeurs suivantes.

$$\begin{cases} & u = \sqrt[3]{Z_1} \quad \text{et} \quad v = \sqrt[3]{Z_2} \\ \text{ou} & \\ & u = \sqrt[3]{Z_1}\, j \quad \text{et} \quad v = \sqrt[3]{Z_2}\, j^2 \\ \text{ou} & \\ & u = \sqrt[3]{Z_1}\, j^2 \quad \text{et} \quad v = \sqrt[3]{Z_2}\, j \\ \text{ou} & \\ & u = \sqrt[3]{Z_2} \quad \text{et} \quad v = \sqrt[3]{Z_1} \\ \text{ou} & \\ & u = \sqrt[3]{Z_2}\, j \quad \text{et} \quad v = \sqrt[3]{Z_1}\, j^2 \\ \text{ou} & \\ & u = \sqrt[3]{Z_2}\, j^2 \quad \text{et} \quad v = \sqrt[3]{Z_1}\, j \end{cases}$$

Ainsi la solution $z = u + v$ de l'équation (E') considérée ne peut prendre que les trois valeurs suivantes.

$$\sqrt[3]{Z_1} + \sqrt[3]{Z_2} \qquad \text{ou} \qquad \sqrt[3]{Z_1}\, j + \sqrt[3]{Z_2}\, j^2 \qquad \text{ou} \qquad \sqrt[3]{Z_1}\, j^2 + \sqrt[3]{Z_2}\, j$$

— Cas où $4p^3 + 27q^2 < 0$. La forme canonique $(\star)$ livre :

$$X^2 + qX - \frac{p^3}{27} = \left(X + \frac{q}{2}\right)^2 - \left(i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\right)^2 = \left(X + \frac{q + i\sqrt{-\Delta}}{2}\right)\left(X + \frac{q - i\sqrt{-\Delta}}{2}\right)\,.$$

Nous en déduisons :

$$\left\{\begin{array}{l} u^3 = \dfrac{-q-i\sqrt{-\Delta}}{2} =: Z \quad \text{et} \quad v^3 = \dfrac{-q+i\sqrt{-\Delta}}{2} = \overline{Z} \\ \text{ou} \\ u^3 = \dfrac{-q+i\sqrt{-\Delta}}{2} = \overline{Z} \quad \text{et} \quad v^3 = \dfrac{-q-i\sqrt{-\Delta}}{2} = Z\,. \end{array}\right.$$

Le nombre complexe Z est non nul (sa partie imaginaire est non nulle). D'après le cours sur les racines cubiques d'un nombre complexe :

$$\left\{\begin{array}{l} u = \sqrt[3]{|Z|}\,e^{i\frac{2\pi k_u+\arg(Z)}{3}} \text{ où } k_u \in \{0,1,2\} \quad \text{et} \quad v = \sqrt[3]{|Z|}\,e^{i\frac{2\pi k_v-\arg(Z)}{3}} \text{ où } k_v \in \{0,1,2\} \\ \text{ou} \\ u = \sqrt[3]{|Z|}\,e^{i\frac{2\pi k_u-\arg(Z)}{3}} \text{ où } k_u \in \{0,1,2\} \quad \text{et} \quad v = \sqrt[3]{|Z|}\,e^{i\frac{2\pi k_v+\arg(Z)}{3}} \text{ où } k_v \in \{0,1,2\}\,. \end{array}\right.$$

Comme dans le cas où $4p^3+27q^2>0$, la condition $uv = -\dfrac{p}{3} \in \mathbb{R}$ restreint les possibilités pour le couple (u,v) et nous n'obtenons *in fine* que les trois valeurs suivantes pour la solution $z=u+v$ de l'équation (E') considérée.

$$\sqrt[3]{|Z|}\,e^{i\frac{\arg(Z)}{3}} + \sqrt[3]{|Z|}\,e^{-i\frac{\arg(Z)}{3}} \text{ ou } \sqrt[3]{|Z|}\,e^{i\frac{\arg(Z)}{3}}\,j + \sqrt[3]{|Z|}\,e^{-i\frac{\arg(Z)}{3}}\,j^2 \text{ ou } \sqrt[3]{|Z|}\,e^{i\frac{\arg(Z)}{3}}\,j^2 + \sqrt[3]{|Z|}\,e^{i\frac{-\arg(Z)}{3}}\,j$$

- *Synthèse* Dans chacun des cas $4p^3+27q^2>0$ et $4p^3+27q^2<0$, nous avons établi que si z est solution de l'équation (E') alors z ne peut prendre que trois valeurs. Puisque l'équation (E') possèdent trois solutions distinctes d'après Q10, les trois valeurs trouvées sont les racines de l'équation (E'). En effet une inclusion d'un ensemble à 3 éléments dans un ensemble à « 3 ou moins de 3 » éléments est nécessairement une égalité.
- *Conclusion* Si $4p^3+27q^2>0$ alors, en posant $\Delta := \dfrac{4p^3+27q^2}{27}$, $r_1 := \sqrt[3]{\dfrac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}}$, $r_2 := \sqrt[3]{\dfrac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}}$:

$$\boxed{\{z\in\mathbb{C} : z^3+pz+q=0\} = \{r_1+r_2, r_1 j + r_2 j^2, r_1 j^2 + r_2 j\}}$$

et donc d'après Q9 :

$$\boxed{\{z\in\mathbb{C} : z^3+az^2+bz+c=0\} = \left\{r_1+r_2-\frac{a}{3}, r_1 j + r_2 j^2 - \frac{a}{3}, r_1 j^2 + r_2 j - \frac{a}{3}\right\}}\,.$$

Si $4p^3+27q^2<0$ alors, en posant $\Delta := \dfrac{4p^3+27q^2}{27}$, $Z := \dfrac{-q-i\sqrt{-\Delta}}{2}$, $\xi := \sqrt[3]{|Z|}\,e^{i\frac{\arg(Z)}{3}}$:

$$\boxed{\{z\in\mathbb{C} : z^3+pz+q=0\} = \left\{\xi+\overline{\xi}, \xi j + \overline{\xi} j^2, \xi j^2 + \overline{\xi} j\right\}}$$

et donc d'après Q9 :

$$\boxed{\{z\in\mathbb{C} : z^3+az^2+bz+c=0\} = \left\{\xi+\overline{\xi}-\frac{a}{3}, \xi j + \overline{\xi} j^2 - \frac{a}{3}, \xi j^2 + \overline{\xi} j - \frac{a}{3}\right\}}\,.$$

Q13 — Nous cherchons une CNS pour que la fonction :

$$\gamma \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3+px+q \end{array}\right.$$

s'annule en trois points distincts sur $\mathbb{R}$. Nous raisonnons par analyse-synthèse.

- *Analyse (recherche d'une condition nécessaire)* Supposons que la fonction γ s'annule en trois points distincts sur $\mathbb{R}$. Elle ne peut donc être strictement monotone, donc sa dérivée :

$$\gamma' \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3x^2+p \end{array}\right.$$

n'a pas un signe constant. Nous en déduisons que $p<0$ d'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\gamma'(x) = 3\left(x - \sqrt{\frac{-p}{3}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{-p}{3}}\right).$$

Le tableau de variations de la fonction γ est donc le suivant.

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{-p}{3}}$		$\sqrt{\frac{-p}{3}}$		$+\infty$
$\gamma'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
γ	$-\infty$	$\nearrow$	?	$\searrow$	?	$\nearrow$	$+\infty$

Pour que γ s'annule trois fois sur $\mathbb{R}$, il faut donc :

$$\gamma\left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right) > 0 \qquad \text{et} \qquad \gamma\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right) < 0$$

et donc que :

$$0 > \gamma\left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)\gamma\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right) = \frac{4p^3+27q^2}{27}.$$

Donc, si γ s'annule en trois points distincts de $\mathbb{R}$, alors $4p^3+27q^2<0$.

- *Synthèse (vérification que la condition $4p^3+27q^2<0$ est suffisante)* Supposons que $4p^3+27q^2<0$. Alors nécessairement $p<0$ et l'on obtient le tableau de variations suivant pour la fonction γ.

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{-p}{3}}$		$\sqrt{\frac{-p}{3}}$		$+\infty$
$\gamma'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
γ	$-\infty$	$\nearrow$	?	$\searrow$	?	$\nearrow$	$+\infty$

Comme $\gamma\left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)\gamma\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right) = \dfrac{4p^3+27q^2}{27} < 0$ les nombres $\gamma\left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)$ et $\gamma\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)$ sont de signe contraire. Comme de plus $\gamma\left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right) > \gamma\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)$, il vient $\gamma\left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right) > 0$ et $\gamma\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right) < 0$.

— En appliquant le théorème de la bijection à la fonction γ sur l'intervalle $I_1 := \left]-\infty, -\sqrt{\frac{-p}{3}}\right]$ (elle y est strictement monotone et continue), nous obtenons un unique $x_1 \in I_1$ tel que $\gamma(x_1)=0$.

— De même, on obtient un unique $x_2 \in I_2 := \left]-\sqrt{\frac{-p}{3}}, \sqrt{\frac{-p}{3}}\right]$ (resp. $x_3 \in I_3 := \left]\sqrt{\frac{-p}{3}}, \infty\right[$) tel que $\gamma(x_2)=0$ (resp. $\gamma(x_3)=0$).

Nous en déduisons que la fonction γ s'annule trois fois sur $\mathbb{R}$.

- *Conclusion* Nous avons démontré que :

$$\boxed{\text{les solutions de l'équation } (E') \text{ sont toutes réelles si et seulement si } 4p^3+27q^2<0.}$$

Remarque

Nous aurions pu donner une autre démonstration de cette CNS, basée sur Q12.

- Si $4p^3+27q^2<0$, alors il est clair que toutes les solutions de l'équation (E') déterminées en Q12 sont égales à leurs conjugués ($\overline{j}=j^2$ et $\overline{j^2}=j$).
- Supposons à présent que $4p^3+27q^2>0$ et conservons les notations introduites en Q12. Si $r_1 j + r_2 j^2$ égale son conjugué alors :

$$r_1 j + r_2 j^2 = r_1 j^2 + r_2 j.$$

Nous en déduisons $r_1 = r_2$, puis $\Delta := \dfrac{4p^3+27q^2}{27} = 0$ ce qui n'est pas. Donc l'équation (E') possède une racine non réelle.

Q14 — Pour résoudre l'équation :

$$z^3 + \underbrace{(-3)}_{a} z^2 + \underbrace{(-3)}_{b} z + \underbrace{(-1)}_{c} = 0$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, nous tentons d'appliquer la démarche initiée dans le sujet. Pour cela, nous posons $p := b - \dfrac{a^2}{3} = -6$ et $q := \dfrac{2a^3}{27} - \dfrac{ab}{3} + c = -6$ (cf. Q4) et calculons :

$$4p^3 + 27q^2 = 108 > 0\,.$$

Nous pouvons alors appliquer Q12. Nous calculons :

- $\Delta := \dfrac{4p^3+27q^2}{27} = 4$;
- $r_1 := \sqrt[3]{\dfrac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}} = \sqrt[3]{2}$;
- $r_2 := \sqrt[3]{\dfrac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}} = \sqrt[3]{4}$.

Nous en déduisons :

$$\{z \in \mathbb{C} \,:\, z^3 + pz + q = 0\} = \{r_1 + r_2, r_1 j + r_2 j^2, r_1 j^2 + r_2 j\} = \left\{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4},\ \sqrt[3]{2} j + \sqrt[3]{4} j^2,\ \sqrt[3]{2} j^2 + \sqrt[3]{4} j\right\}$$

puis :

$$\{z \in \mathbb{C} \,:\, z^3 + az^2 + bz + c = 0\} = \left\{r_1 + r_2 - \frac{a}{3}, r_1 j + r_2 j^2 - \frac{a}{3}, r_1 j^2 + r_2 j - \frac{a}{3}\right\}$$

d'où $\boxed{\{z \in \mathbb{C} \,:\, z^3 - 3z^2 - 3z - 1 = 0\} = \left\{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} + 1,\ \sqrt[3]{2} j + \sqrt[3]{4} j^2 + 1,\ \sqrt[3]{2} j^2 + \sqrt[3]{4} j + 1\right\}.}$

Analyse du sujet

- Le sujet traite de la recherche des racines complexes d'une équation cubique :

$$(E) \qquad z^3 + az^2 + bz + c = 0$$

  d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, où a, b, c sont des réels fixés. D'après le théorème de d'Alembert-Gauß, l'équation (E) possède trois solutions complexes (non nécessairement deux-à-deux distinctes). En suivant la démarche de Cardano et Tartaglia, on exprime les solutions de (E) en extrayant des racines carrées ou cubiques de nombres qui sont des expressions polynomiales en les coefficients.
- La première étape est de faire disparaître le terme de degré 2. Pour cela, on remarque qu'en translatant l'inconnue de $\alpha := -\dfrac{a}{3}$, résoudre (E) revient à résoudre l'équation :

$$(E') \qquad z^3 + pz + q = 0$$

  d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, où $p = b - \dfrac{a^2}{3}$ et $q = \dfrac{2a^3}{27} - \dfrac{ab}{3} + c$. C'est l'objet de Q3 et Q4. On cherche désormais à résoudre (E'), qui possède également trois solutions complexes (non nécessairement deux-à-deux distinctes).
- On s'intéresse tout d'abord au cas où au moins deux des trois solutions complexes de (E') sont égales. On démontre que ceci se produit si et seulement si $4p^3 + 27q^2 = 0$, cf. Q5 et Q6.
- Si $4p^3 + 27q^2 = 0$, alors on résout aisément l'équation (E') comme expliqué en Q7.

- Le cas où $4p^3+27q^2 \neq 0$ est plus intéressant. Alors que l'objectif est de chercher <u>une</u> solution $z \in \mathbb{C}$ de l'équation $(E')\ :\ z^3+pz+q=0$, Cardano et Tartaglia ont l'idée géniale de remplacer la recherche de z par la recherche de <u>deux</u> complexes u et v satisfaisant les deux conditions :
  — $u+v$ est solution de (E') ;
  — $3uv+p=0$.

  Ce faisant, on démontre que u^3 et v^3 sont racines du trinôme $X^2+qX-\dfrac{p^3}{27}$. Dès lors, nous pouvons écrire des « formules » pour u et v, ce qui fournit une liste de candidats de la forme $u+v$ pour être solution de (E'). Cf. Q9–Q12.
- Ci-dessous on propose une synthèse des résultats obtenus.

Résolution de l'équation $z^3+az^2+bz+c=0$ dans $\mathbb{C}$ où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

On pose $p := b-\dfrac{a^2}{3}$ et $q = \dfrac{2a^3}{27}-\dfrac{ab}{3}+c$.

- *Cas où* $4p^3+27q^2=0$

$$\left\{z \in \mathbb{C}\ :\ z^3+az^2+bz+c=0\right\} = \begin{cases} \left\{\sqrt{-\dfrac{p}{3}}-\dfrac{a}{3}, -2\sqrt{-\dfrac{p}{3}}-\dfrac{a}{3}\right\} & \text{si } q \geqslant 0 \\ \left\{-\sqrt{-\dfrac{p}{3}}-\dfrac{a}{3}, 2\sqrt{-\dfrac{p}{3}}-\dfrac{a}{3}\right\} & \text{si } q < 0\,. \end{cases}$$

- *Cas où* $4p^3+27q^2>0$ On pose $\Delta := \dfrac{4p^3+27q^2}{27}$, $r_1 := \sqrt[3]{\dfrac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}}$, $r_2 := \sqrt[3]{\dfrac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}}$.

$$\left\{z \in \mathbb{C}\ :\ z^3+az^2+bz+c=0\right\} = \left\{r_1+r_2-\frac{a}{3}, r_1 j + r_2 j^2-\frac{a}{3}, r_1 j^2+r_2 j-\frac{a}{3}\right\}$$

- *Cas où* $4p^3+27q^2<0$ On pose $\Delta := \dfrac{4p^3+27q^2}{27}$, $Z := \dfrac{-q-i\sqrt{-\Delta}}{2}$, $\xi := \sqrt[3]{|Z|}\, e^{i\frac{\arg(Z)}{3}}$.

$$\left\{z \in \mathbb{C}\ :\ z^3+az^2+bz+c=0\right\} = \left\{\xi+\overline{\xi}-\frac{a}{3}, \xi j+\overline{\xi} j^2-\frac{a}{3}, \xi j^2+\overline{\xi} j-\frac{a}{3}\right\}$$