Devoir Libre n°3

Pour le mercredi 28 septembre

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Les assertions seront toutes justifiées avec soin, les raisonnements structurés, les résultats encadrés.

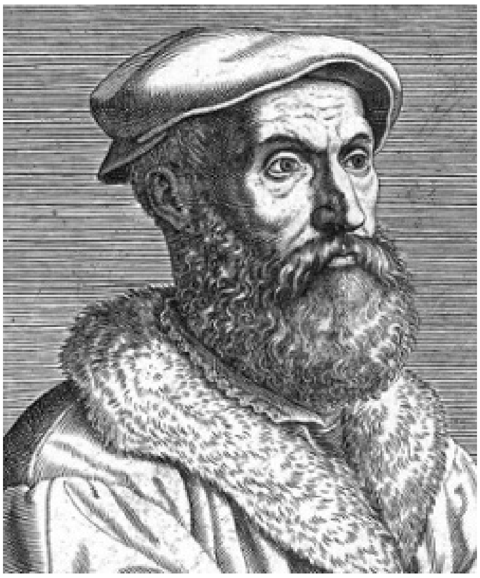
Ce problème porte sur les racines complexes d'un polynôme de degré 3 :

$$P := X^3 + aX^2 + bX + c$$

à coefficients a, b, c réels. D'après le théorème de d'Alembert-Gauß,

$$\boxed{\exists\,(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{C}^3 \qquad P = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \alpha_3)\,.}$$

Niccolò Fontana Tartaglia



Niccolò Fontana Tartaglia (1500-1557, italien) et Gerolamo Cardano (1501-1576, italien) ont développé une méthode permettant d'exprimer les racines $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ de P de manière explicite, sous la forme de radicaux. Les deux hommes ne s'entendaient pas à merveille et attribuer le résultat à l'un ou à l'autre ne semble pas possible. C'est pourquoi les formules que vous allez construire sont dénommées « formules de Cardano-Tartaglia ». Elles parurent dans l'ouvrage *Ars Magna* (1547), de Gerolamo Cardano.

Gerolamo Cardano

Notation Pour tout triplet (a, b, c) de nombres réels, on note $f_{a,b,c}$ la fonction polynomiale définie par :

$$f_{a,b,c} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z^3 + az^2 + bz + c\,. \end{array} \right.$$

Une telle fonction est appelée *fonction polynomiale unitaire de degré 3 à coefficients réels.*

Q1 — Soient a, b, c des nombres réels tels que :

$$\forall\, z \in \mathbb{C} \qquad az^2 + bz + c = 0\,.$$

Démontrer : $a = b = c = 0$.

Q2 — Soient $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ des nombres réels tels que les fonctions f_{a_1,b_1,c_1} et f_{a_2,b_2,c_2} sont égales, i.e. tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad f_{a_1,b_1,c_1}(z) = f_{a_2,b_2,c_2}(z)\,.$$

Démontrer : $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ et $c_1 = c_2$.

Terminologie Si f est une fonction polynomiale unitaire de degré 3 à coefficients réels alors (par définition) il existe un triplet de nombre réels (a, b, c) tel que f soit la fonction $f_{a,b,c}$. D'après **Q2**, ce triplet (a, b, c) est unique, ce qui légitime de nommer a, b et c.

- Le nombre réel a est appelé *coefficient de degré 2 de f*.
- Le nombre réel b est appelé *coefficient de degré 1 de f*.
- Le nombre réel c est appelé *coefficient de degré 0 de f*.

Notation Dans toute la suite du problème, nous fixons trois nombres réels a, b, c et nous notons plus simplement f la fonction $f_{a,b,c}$ afin d'alléger les notations. Ainsi :

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad f(z) = z^3 + az^2 + bz + c\,.$$

Objectif Nous nous proposons de déterminer les racines de f, i.e. de résoudre l'équation (E) définie par :

$$\boxed{(E) \qquad z^3 + az^2 + bz + c = 0}$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. D'après le théorème de d'Alembert-Gauß, l'équation (E) possède trois solutions complexes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, non nécessairement distinctes. Notre objectif est d'exprimer ces dernières par des formules mettant en jeu les coefficients a, b, c et des racines carrées ou cubiques, dans l'esprit de ce que vous connaissez déjà pour les équations de degré 2.

Q3 — Déterminer qu'il existe un unique réel α dépendant de a, b, c tel que la fonction g définie par :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & f(z+\alpha) \end{array} \right.$$

est une fonction polynomiale unitaire de degré 3 à coefficients réels dont le coefficient de degré 2 est nul.

Q4 — Si l'on note p le coefficient de degré 1 de g et q le coefficient de degré 0 de g, il résulte de **Q3** que la fonction g s'écrit :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z^3 + pz + q\,. \end{array} \right.$$

Exprimer p et q en fonction de a, b et c.

Q5 — On dit que g *admet une racine de multiplicité au moins 2 dans* $\mathbb{R}$ si :

$$\exists \omega \in \mathbb{R} \quad \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall z \in \mathbb{C} \qquad g(z) = (z-\omega)^2(z-\lambda)\,.$$

Démontrer que si g admet une racine de multiplicité au moins 2 dans $\mathbb{R}$, alors $4p^3 + 27q^2 = 0$.

Q6 — Réciproquement, démontrer que si $4p^3 + 27q^2 = 0$, alors g admet une racine de multiplicité au moins 2 dans $\mathbb{R}$. On pourra distinguer plusieurs cas, suivant le signe de q.

Q7 — On suppose que la condition $4p^3 + 27q^2 = 0$ est vérifiée. Déduire de **Q6**, l'ensemble solution de l'équation (E') définie par :

$$\boxed{(E') \qquad z^3 + pz + q = 0}$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, puis l'ensemble solution de l'équation (E).

Q8 — Résoudre l'équation :

$$z^3 + 3z^2 - 9z + 5 = 0$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

$$\boxed{\text{Dans toute la suite du problème, nous supposons } 4p^3 + 27q^2 \neq 0.}$$

Q9 — Préciser le nombre de solutions distinctes de l'équation (E'), puis le nombre de solutions distinctes de l'équation (E). Justifier avec soin les deux réponses.

Q10 — Démontrer que, pour tout nombre complexe z, il existe deux nombres complexes u et v vérifiant les deux conditions suivantes.

$$\begin{array}{lccccc} (C_1) & u & + & v & = & z \\ (C_2) & 3uv & + & p & = & 0 \end{array}$$

Q11 — Soit z un nombre complexe solution de l'équation (E'). Soient u et v des nombres complexes vérifiant les conditions (C_1) et (C_2) introduites en **Q10**. Démontrer que u^3 et v^3 sont les racines Z_1 et Z_2 d'une équation du second degré que l'on formera.

Q12 — Déduire de **Q11**, les solutions de (E') puis celles de (E), en distinguant les cas $4p^3 + 27q^2 > 0$ et $4p^3 + 27q^2 < 0$.

Q13 — Dans quel cas les racines de g (i.e. les solutions de (E')) sont-elles toutes réelles? Comparer avec l'étude des variations de la fonction γ, obtenue en restreignant les ensembles de départ et d'arrivée de g :

$$\gamma \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = x^3 + px + q\,. \end{array} \right.$$

Q14 — Résoudre l'équation :

$$z^3 - 3z^2 - 3z - 1 = 0$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.