UN CORRIGÉ DU DEVOIR LIBRE N°2

EXERCICE 1 (MINORATION DU PRODUIT DES PREMIÈRES FACTORIELLES DES ENTIERS PAIRS)

Q1 — Nous démontrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathscr{P}(n) \ : \ 2! \times 4! \times 6! \times \ldots \times (2n)! \geqslant ((n+1)!)^n$$

est vrai en raisonnant par récurrence simple.

- *Initialisation à $n = 1$* La proposition $\mathscr{P}(0)$ s'écrit $2! \geqslant (2!)^1$, qui se reformule en $2 \geqslant 2$. Elle est donc vraie.
- *Hérédité* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Démontrons $\mathscr{P}(n+1)$, i.e. :

  $$2! \times 4! \times 6! \times \ldots \times (2n)! \times (2n+2)! \geqslant ((n+2)!)^{n+1}\ .$$

  Nous savons (HR) que :

  $$2! \times 4! \times 6! \times \ldots \times (2n)! \geqslant ((n+1)!)^n\ .$$

  En multipliant chacun des membres de cette inégalité par $(2n+2)! \geqslant 0$, il vient :

  $$2! \times 4! \times 6! \times \ldots \times (2n)! \times (2n+2)! \geqslant ((n+1)!)^n \times (2n+2)!\ .$$

  Ainsi, si nous démontrons :

  $$(\star) \qquad ((n+1)!)^n \times (2n+2)! \geqslant ((n+2)!)^{n+1}$$

  la proposition $\mathscr{P}(n+1)$ sera établie (cf. transitivité de la relation d'ordre usuelle sur $\mathbb{R}$). Nous décomposons $(2n+2)!$:

  $$(2n+2)! = \underbrace{(2n+2) \times (2n+1) \times (2n) \times \ldots \times (n+4) \times (n+3)}_{(2n+2)-(n+3)+1=n \text{ facteurs}} \times (n+2)!\ .$$

  En multipliant membre-à-membre les $n+1$ inégalités :

  $$\begin{array}{ccccc} 2n+2 & \geqslant & n+2 & \geqslant & 0 \\ 2n+1 & \geqslant & n+2 & \geqslant & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n+4 & \geqslant & n+2 & \geqslant & 0 \\ n+3 & \geqslant & n+2 & \geqslant & 0 \\ (n+2)! & \geqslant & (n+2)! & \geqslant & 0 \end{array}$$

  nous obtenons :

  $$(2n+2)! = (2n+2) \times (2n+1) \times (2n) \times \ldots \times (n+4) \times (n+3) \times (n+2)! \geqslant (n+2)^n \times (n+2)!\ .$$

  En multipliant chaque membre de cette dernière inégalité par $((n+1)!)^n \geqslant 0$, il vient :

  $$((n+1)!)^n \times (2n+2)! \geqslant ((n+1)!)^n \times (n+2)^n \times (n+2)! = ((n+2)!)^{n+1}$$

  qui est précisément l'inégalité $(\star)$ souhaitée.
- *Conclusion* De l'initialisation au rang 1, de l'hérédité et de l'axiome de récurrence, nous déduisons que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ 2! \times 4! \times 6! \times \ldots \times (2n)! \geqslant ((n+1)!)^n.}$

Exercice 2 (Convergence de la suite de terme général $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$)

Q2 — Nous calculons les premières valeurs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_{\geq 2}}$.

$$u_2 = \frac{1}{2} \qquad u_2 = \frac{2}{3} \qquad u_3 = \frac{3}{4} \qquad u_4 = \frac{4}{5}$$

Nous conjecturons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathscr{P}(n) \ : \ u_n = \frac{n-1}{n}\,.$$

Nous démontrons cette propriété par récurrence simple.

- *Initialisation à $n = 2$* La proposition $\mathscr{P}(2)$ a été établi lors de la phase de conjecture.
- *Hérédité* Soit $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$ fixé tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Démontrons $\mathscr{P}(n+1)$. Nous calculons :

$$u_{n+1} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{(k-1)k} = \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} \right) + \frac{1}{n(n+1)} \underset{\text{HR}}{=} \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{(n-1)(n+1)+1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}\,.$$

- *Conclusion* De l'initialisation au rang 2, de l'hérédité et de l'axiome de récurrence, nous déduisons que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2},\ u_n = \frac{n-1}{n}.}$

Q3 — Nous allons démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante majorée. Nous en déduirons qu'elle converge, d'après le théorème de la limite monotone.

- *Caractère croissant* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Nous calculons :

$$v_{n+1} - v_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \right) + \frac{1}{(n+1)^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \geqslant 0\,.$$

  Nous en déduisons que $\boxed{\text{la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante.}}$

- *Caractère majoré* Démontrons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est également majorée.
  Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Nous observons que, pour tout $k \in [\![2,n]\!]$, $0 < k(k-1) = k^2 - k \leqslant k^2$ et donc :

$$\forall\, k \in [\![2,n]\!] \qquad \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)} \qquad [\text{la fonction inverse est décroissante sur } \mathbb{R}_{>0}]\,.$$

  En sommant ces $n-2+1 = n-1$ inégalités membre-à-membre, nous obtenons :

$$v_n - 1 = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = u_n \underset{\text{Q2}}{=} \frac{n-1}{n} \leqslant 1\,.$$

  Nous en déduisons que, pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$, $v_n \leqslant 2$. Comme $v_1 = 1 \leqslant 2$, nous pouvons étendre notre résultat en :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \qquad v_n \leqslant 2 \text{ (indépendant de } n)\,.$$

  $\boxed{\text{La suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est donc majorée.}}$

Exercice 3 (Tout entier naturel non nul est d'une unique manière somme de puissances de 2)

Q4 — Nous démontrons par récurrence forte que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathscr{P}(n) \ : \ \exists\, r \in \mathbb{N}^* \quad \exists\, (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in \mathbb{N}^r \qquad \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_r \quad \text{et} \quad n = \sum_{k=1}^{r} 2^{\alpha_k}\,.$$

- *Initialisation au rang 1* Si l'on pose $r := 1$ et $\alpha_1 := 0$, alors :
$$\sum_{k=1}^{r} 2^{\alpha_k} = 2^{\alpha_1} = 2^0 = 1\,.$$
La proposition $\mathscr{P}(1)$ est donc vraie.
- *Hérédité* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la proposition $\mathscr{P}(k)$ est vraie. Nous démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ en raisonnant par disjonction de cas, suivant la parité de $n+1$.
  — *Cas où $n+1$ est pair* Il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que $n+1 = 2k$. Comme, $n \geqslant 1$:
$$1 \leqslant k = \frac{n+1}{2} \leqslant \frac{n+n}{2} = n\,.$$
De $k \in [\![1, n]\!]$ et de l'hypothèse de récurrence généralisée, nous déduisons que $\mathscr{P}(k)$ est vraie. Ainsi, il existe $r \in \mathbb{N}^*$ et des entiers $0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_r$ tels que :
$$k = 2^{\alpha_1} + 2^{\alpha_2} + \ldots + 2^{\alpha_r}\,.$$
Nous en déduisons :
$$n+1 = 2k = 2^{\alpha_1+1} + 2^{\alpha_2+1} + \ldots + 2^{\alpha_r+1}\,.$$
En posant :
$$0 \leqslant \alpha'_1 := \alpha_1 + 1 < \alpha'_2 := \alpha_2 + 1 < \ldots < \alpha'_r := \alpha_r + 1$$
il vient
$$\sum_{k=1}^{r} 2^{\alpha'_k} = \sum_{k=1}^{r} 2^{\alpha_k+1} = n+1\,.$$
qui est une décomposition de $n+1$ de la forme attendue.
  — *Cas où $n+1$ est impair* La proposition $\mathscr{P}(n)$ livre l'existence d'un entier $r \geqslant 1$ et d'entiers $0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_r$ tels que :
$$n = 2^{\alpha_1} + 2^{\alpha_2} + \ldots + 2^{\alpha_r}\,.$$
Comme n est pair, $\alpha_1 \geqslant 1$. En posant :
$$0 \leqslant \alpha'_1 = 0 < \alpha'_2 := \alpha_1 < \alpha'_3 := \alpha_2 < \ldots < \alpha'_{r+1} := \alpha_r$$
il vient
$$\sum_{k=1}^{r+1} 2^{\alpha'_k} = 2^{\alpha'_1} + \sum_{k=2}^{r+1} 2^{\alpha'_k} = 2^0 + \sum_{k=2}^{r+1} 2^{\alpha_{k-1}} = 1 + \sum_{\ell=1}^{r} 2^{\alpha_\ell} = 1 + n$$
qui est une décomposition de $n+1$ de la forme attendue.
- *Conclusion* De l'initialisation au rang 1, de l'hérédité et de l'axiome de récurrence, nous déduisons que :
$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad \exists\, r \in \mathbb{N}^* \quad \exists\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in \mathbb{N}^r \qquad \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_r \quad \text{et} \quad n = \sum_{k=1}^{r} 2^{\alpha_k}\,.}$$

Q5 — Nous proposons une démonstration reposant sur une somme télescopique, mais d'autres voies sont envisageables pour établir ce résultat, comme un raisonnement par récurrence simple.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous calculons :
$$\begin{aligned}(1-x)\left(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}+x^n\right) &= 1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}+x^n-\left(x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-1}+x^n+x^{n+1}\right)\\ &= 1+\underbrace{x+x^2+\ldots+x^n-x-x^2-x^3-\ldots-x^n}_{=0}-x^{n+1}\\ &= 1-x^{n+1}\,.\end{aligned}$$
En divisant membre-à-membre l'identité :
$$(1-x)\left(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}+x^n\right) = 1-x^{n+1}$$
par $1-x \neq 0$, il vient :

$$\boxed{1+x+x^2+\ldots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}\,.}$$

Q6 — Nous démontrons par récurrence forte que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathscr{P}(n)\ :\ \text{« la décomposition de } n \text{ comme somme de puissances de 2 obtenue en } \textbf{Q4} \text{ est unique »}\ .$$

- *Initialisation au rang 1* Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $2^k > 1$. Nous en déduisons que la seule décomposition de 1 comme somme de puissances de 2 est $1 = 2^0$.
- *Hérédité* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la proposition $\mathscr{P}(k)$ est vraie. Soient $r \in \mathbb{N}^*$, $s \in \mathbb{N}^*$ et des entiers $0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_r$, $0 \leqslant \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_s$ tels que :

$$(\star) \qquad n+1 = 2^{\alpha_1}+2^{\alpha_2}+\ldots+2^{\alpha_r} \quad \text{et} \quad n+1 = 2^{\beta_1}+2^{\beta_2}+\ldots+2^{\beta_s}\,.$$

De $(\star)$ nous déduisons :

$$2^{\alpha_r} \leqslant n+1 = 2^{\beta_1}+2^{\beta_2}+\ldots+2^{\beta_s} \leqslant \sum_{k=0}^{\beta_s} 2^k \underset{\textbf{Q5}}{=} \frac{1-2^{\beta_s+1}}{1-2} = 2^{\beta_s+1}-1$$

puis $\alpha_r \leqslant \beta_s$. De manière analogue, nous établissons $\beta_s \leqslant \alpha_r$. Finalement $\alpha_r = \beta_s$.
Nous scindons alors l'étude en deux parties.

— *Cas où $n+1 = 2^{\alpha_r} = 2^{\beta_s}$* Les deux décompositions de $n+1$ données en $(\star)$ sont donc identiques.

— *Cas où $n+1 > 2^{\alpha_r} = 2^{\beta_s}$* Nous déduisons alors de $(\star)$ que :

$$1 \leqslant n+1-2^{\alpha_r} \underset{(\star\star)}{=} 2^{\alpha_1}+2^{\alpha_2}+\ldots+2^{\alpha_{r-1}} \leqslant n \quad \text{et} \quad 1 \leqslant n+1-2^{\beta_s} \underset{(\star\star\star)}{=} 2^{\beta_1}+2^{\beta_2}+\ldots+2^{\beta_{s-1}} \leqslant n\,.$$

D'après l'hypothèse de récurrence appliquée à $n+1-2^{\alpha_r} = n+1-2^{\beta_s}$, les deux décompositions de $n+1-2^{\alpha_r} = n+1-2^{\beta_s}$ données par $(\star\star)$ et $(\star\star\star)$ sont identiques, i.e. :

$$r-1 = s-1 \quad ; \quad \alpha_1 = \beta_1 \quad ; \quad \ldots \quad ; \quad \alpha_{r-1} = \beta_{s-1}\,.$$

Comme par ailleurs nous avons déjà établi $\alpha_r = \beta_s$, il vient :

$$r = s \quad ; \quad \alpha_1 = \beta_1 \quad ; \quad \ldots \quad ; \quad \alpha_{r-1} = \beta_{s-1} \quad ; \quad \alpha_r = \beta_s\,.$$

Les deux décompositions de $n+1$ données en $(\star)$ sont donc également identiques dans ce deuxième cas.

- *Conclusion* De l'initialisation au rang 1, de l'hérédité, et de l'axiome de récurrence, nous déduisons que $\boxed{\text{tout entier naturel non nul possède une unique décomposition en somme de puissances de 2}}$, comme exprimée en **Q4**.

Exercice 4 (D'autres valeurs remarquables de cosinus et sinus)

Q7 — Nous calculons tout d'abord :

$$\begin{array}{rcl}
\cos(5x) & = & \cos(2x+3x) \\
& = & \cos(2x)\cos(3x)-\sin(2x)\sin(3x) \\
& \underset{(\star)}{=} & \left(2\cos^2(x)-1\right)\cos(3x)-2\cos(x)\sin(x)\sin(3x)
\end{array}$$

puis :

$$\begin{array}{rcl}
\cos(3x) & = & \cos(x+2x) \\
& = & \cos(x)\cos(2x)-\sin(x)\sin(2x) \\
& = & \cos(x)\left(2\cos^2(x)-1\right)-2\cos(x)\sin^2(x) \\
& \underset{(\star\star)}{=} & \cos(x)\left(2\cos^2(x)-1\right)-2\cos(x)\left(1-\cos^2(x)\right)
\end{array}$$

et enfin :

$$\begin{array}{rcl} \sin(x)\sin(3x) & = & \sin(x)\sin(x+2x) \\ & = & \sin(x)\left(\sin(x)\cos(2x)+\cos(x)\sin(2x)\right) \\ & = & \sin^2(x)\left(2\cos^2(x)-1\right)+2\cos^2(x)\sin^2(x) \\ & \underset{(\star\star\star)}{=} & \left(1-\cos^2(x)\right)\left(2\cos^2(x)-1\right)+2\cos^2(x)\left(1-\cos^2(x)\right). \end{array}$$

En assemblant les résultats $(\star)$, $(\star\star)$, $(\star\star\star)$ et en posant $y := \cos(x)$, nous obtenons :

$$\cos(5x) = \left(2y^2-1\right)\left[y\left(2y^2-1\right)-2y\left(1-y^2\right)\right]-2y\left[\left(1-y^2\right)\left(2y^2-1\right)+2y^2\left(1-y^2\right)\right] = 16y^5-20y^3+5y.$$

Ainsi, $\boxed{\cos(5x) = 16\cos^5(x)-20\cos^3(x)+5\cos(x).}$

Q8 — Nous allons tout d'abord démontrer que $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ est racine d'un polynôme $P(X)$, puis déterminer les racines de $P(X)$ et enfin identifier $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ parmi les racines de $P(X)$ en procédant par élimination. Nous en déduirons $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$ grâce à la relation de Pythagore et des considérations de signe.

- En spécialisant **Q7** à $x \leftarrow \frac{\pi}{10}$, il vient :

$$16\cos^5\left(\frac{\pi}{10}\right)-20\cos^3\left(\frac{\pi}{10}\right)+5\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

donc $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ est racine du polynôme $P(X)$ défini par :

$$P(X) := 16X^5-20X^3+5X = X\left(16X^4-20X^2+5\right) = X\,Q\left(X^2\right)$$

où $Q(Y) := 16Y^2-20Y+5$.

- Les racines du polynôme du second degré $Q(Y)$ sont $\frac{5}{8}-\frac{\sqrt{5}}{8}$ et $\frac{5}{8}+\frac{\sqrt{5}}{8}$, d'où la factorisation :

$$Q(Y) = 16\left(Y-\left(\frac{5}{8}-\frac{\sqrt{5}}{8}\right)\right)\left(Y-\left(\frac{5}{8}+\frac{\sqrt{5}}{8}\right)\right).$$

Ainsi :

$$P(X) = 16X\left(X^2-\left(\frac{5}{8}-\frac{\sqrt{5}}{8}\right)\right)\left(X^2-\left(\frac{5}{8}+\frac{\sqrt{5}}{8}\right)\right).$$

Clairement, $\frac{5}{8}+\frac{\sqrt{5}}{8} \geqslant 0$. De $1 \leqslant 5$ et de la croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, nous déduisons $\sqrt{5} \geqslant 1$ puis $\frac{5}{8}-\frac{\sqrt{5}}{8} \geqslant 0$. Nous pouvons donc factoriser davantage le polynôme $P(X)$:

$$\begin{array}{rcl} P(X) & = & 16X\left(X^2-\sqrt{\frac{5}{8}-\frac{\sqrt{5}}{8}}^{\,2}\right)\left(X^2-\sqrt{\frac{5}{8}+\frac{\sqrt{5}}{8}}^{\,2}\right) \\ & = & 16X\left(X-\sqrt{\frac{5}{8}-\frac{\sqrt{5}}{8}}\right)\left(X+\sqrt{\frac{5}{8}-\frac{\sqrt{5}}{8}}\right)\left(X-\sqrt{\frac{5}{8}+\frac{\sqrt{5}}{8}}\right)\left(X+\sqrt{\frac{5}{8}+\frac{\sqrt{5}}{8}}\right). \end{array}$$

Les racines de $P(X)$ sont donc :

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = \sqrt{\frac{5}{8}-\frac{\sqrt{5}}{8}} \qquad x_3 = -\sqrt{\frac{5}{8}-\frac{\sqrt{5}}{8}} \qquad x_4 = \sqrt{\frac{5}{8}+\frac{\sqrt{5}}{8}} \qquad x_5 = -\sqrt{\frac{5}{8}+\frac{\sqrt{5}}{8}}.$$

D'après ce qui précède $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ égale l'une des cinq racines de $P(X)$ explicitées ci-dessus.

- De $0 \leqslant \frac{\pi}{10} \leqslant \frac{\pi}{6} \leqslant \pi$ et de décroissante de cosinus sur cos sur l'intervalle $[0,\pi]$, nous déduisons :

$$\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ainsi $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ ne peut égaler x_1, x_3, x_5. Deux posibilités demeurent : $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = x_2$ ou $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = x_4$.
De $-\sqrt{5} < 1$, nous déduisons :

$$\frac{5-\sqrt{5}}{8} < \frac{3}{4}$$

puis, grâce à la stricte croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$:

$$x_2 = \sqrt{\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}} < \frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant \cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$$

et donc $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \neq x_2$. Par élimination, nous obtenons : $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}}}$.

- D'après la relation de Pythagore, $\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{3}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}$. puis :

$$\left|\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)\right| = \sqrt{\frac{3}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}}.$$

Comme $0 \leqslant \frac{\pi}{10} \leqslant \pi$, $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) \geqslant 0$. Ainsi : $\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{3}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}}}$.

Q9 — Nous observons que $\frac{\pi}{5} = 2 \times \frac{\pi}{10}$. D'après les formules de duplication pour cosinus et sinus :

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) - 1 \qquad \text{et} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$$

d'où : $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}}$ et $\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}$ grâce à **Q8**.

Q10 — Nous observons que $\frac{2\pi}{15} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{5}$. D'après les formules d'addition pour cosinus et sinus, nous obtenons les deux résultats suivants.

$$\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{15}\right) = \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{1/2}\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}_{\text{cf. Q9}} + \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{\sqrt{3}/2}\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}_{\text{cf. Q9}} = \frac{1+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}{8}}$$

$$\boxed{\sin\left(\frac{2\pi}{15}\right) = \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{\sqrt{3}/2}\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}_{\text{cf. Q9}} - \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{1/2}\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}_{\text{cf. Q9}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}}$$