Un corrigé du Devoir Libre n°1

Exercice 1 (Logique)

Q1 — Nous calculons :

$$\begin{array}{rcll}(P \vee Q) \Longrightarrow R & \equiv & (\neg(P \vee Q)) \vee R & [\text{Expression de } \Longrightarrow \text{ avec } \neg \text{ et } \vee] \\ & \equiv & (\neg P \wedge \neg Q) \vee R & [\text{Loi de De Morgan}] \\ & \equiv & (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R) & [\text{Distributivité}] \\ & \equiv & (P \Longrightarrow R) \wedge (Q \Longrightarrow R) & [\text{Expression de } \Longrightarrow \text{ avec } \neg \text{ et } \vee]\end{array}$$

Ainsi, $\boxed{((P \Longrightarrow R) \wedge (Q \Longrightarrow R)) \equiv ((P \vee Q) \Longrightarrow R).}$

Q2 — Nous calculons :

$$\begin{array}{rcll}P \Longrightarrow (Q \wedge R) & \equiv & \neg P \vee (Q \wedge R) & [\text{Expression de } \Longrightarrow \text{ avec } \neg \text{ et } \vee] \\ & \equiv & (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) & [\text{Distributivité}] \\ & \equiv & (P \Longrightarrow Q) \wedge (P \Longrightarrow R) & [\text{Expression de } \Longrightarrow \text{ avec } \neg \text{ et } \vee]\end{array}$$

Ainsi, $\boxed{((P \Longrightarrow Q) \wedge (P \Longrightarrow R)) \equiv (P \Longrightarrow (Q \wedge R)).}$

Exercice 2 (Endomorphismes du groupe $(\mathbb{Q},+)$)

Q3 — D'après l'hypothèse sur f :

$$f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)\,.$$

Nous en déduisons $\boxed{f(0) = 0.}$

Q4 — Nous démontrons le résultat en raisonnant par récurrence simple.

- *Définition du prédicat* Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n) =$ « $f(n\,x) = n\,f(x)$ ».
- *Initialisation à $n = 0$* D'après Q3, $f(0 \times x) = f(0) = 0 = 0 \times x$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- *Hérédité* Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Nous calculons :

$$f((n+1)x) = f(nx + x) = f(nx) + f(x) \underset{\text{HR}}{=} n\,f(x) + f(x) = (n+1)\,f(x)\,.$$

  Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- *Conclusion* D'après l'initialisation à $n = 0$, l'hérédité et l'axiome de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ f(nx) = n\,f(x).}$

Q5 — Soit $n \in \mathbb{N}$. En spécialisant Q4 à $x \leftarrow 1$, nous obtenons $f(n) = n\,f(1)$. Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ f(n) = n\,f(1).}$

Q6 — Soit $n \in \mathbb{Z}$. Nous raisonnons par disjonction de cas, suivant le signe de n.

- *Cas où $n \geqslant 0$* Alors $n \in \mathbb{N}$ et, d'après Q5, $f(n) = n\,f(1)$.
- *Cas où $n < 0$* Alors $-n \in \mathbb{N}$ et, d'après Q5 :

$$(\star) \qquad f(-n) = (-n)\,f(1)\,.$$

  D'après Q1 :

$$0 = f(0) = f(n + (-n)) = f(n) + f(-n) \underset{(\star)}{=} f(n) - n\,f(1)\,.$$

  Nous en déduisons $f(n) = n\,f(1)$.
- *Conclusion* D'après les deux cas précédents, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{Z},\ f(n) = n\,f(1).}$

Q7 — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En spécialisant Q4 à $x \leftarrow \dfrac{1}{n}$, il vient :

$$f(1) = f\left(n \times \frac{1}{n}\right) = n\,f\left(\frac{1}{n}\right)\,.$$

D'où, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\,f(1).}$

Q8 — Soit $x \in \mathbb{Q}$. Alors il existe $n \in \mathbb{Z}$ et $d \in \mathbb{N}^*$ tels que $x = \dfrac{n}{d}$. Nous calculons :

$$n\,f(1) \underset{\text{Q6}}{=} f(n) = f\left(d \times \frac{n}{d}\right) = f(d\,x) \underset{\text{Q4}}{=} d\,f(x)\,.$$

Nous en déduisons :

$$f(x) = \frac{n\,f(1)}{d} = x\,f(1)\,.$$

Le résultat précédent ayant été établi pour un rationnel x quelconque, il vient, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{Q},\ f(x) = x\,f(1).}$

Exercice 3 (Résolutions d'équations)

Q9 — Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcll} \sqrt{4-x^2} \text{ est bien défini} & \iff & 4-x^2 = (2-x)(2+x) \geqslant 0 & \left[\text{la fonction } \sqrt{\cdot} \text{ est définie sur } \mathbb{R}_{\geqslant 0}\right] \\ & \iff & x \in [-2,2] & \left[\text{cours sur le signe d'un trinôme du second degré}\right] \end{array}$$

Nous avons établi $\boxed{\mathscr{D} = [-2,2].}$

Nous résolvons l'équation proposée en raisonnant par analyse-synthèse.

- *Analyse* Soit $x \in [-2,2]$ solution de (E_1), i.e. tel que :

$$\sqrt{4-x^2} = x+1\,.$$

En élevant chacun des membres au carré, il vient :

$$4-x^2 = (x+1)^2 = x^2+2x+1\,.$$

Nous en déduisons que x est racine du trinôme du second degré $2x^2+2x-3=0$, i.e. que :

$$x = \frac{-1-\sqrt{7}}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-1+\sqrt{7}}{2}\,.$$

- *Synthèse* Vérifions si chacun des deux candidats obtenus en fin d'analyse est solution de (E_1).

— *Cas de* $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{7}}{2}$ Comme $4 \leqslant 7 \leqslant 9$ et comme la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$:

$$(\star) \qquad 2 \leqslant \sqrt{7} \leqslant 3\,.$$

Nous en déduisons :

$$-2 \leqslant x_1 \leqslant -\frac{3}{2} \quad \text{et} \quad x_1 + 1 \leqslant -\frac{1}{2}\,.$$

Ainsi $x_1 \in [-2,2]$, mais comme :

$$\sqrt{4-x_1^2} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad x_1+1 < 0$$

x_1 n'est pas solution de (E_1).

— *Cas de* $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{7}}{2}$ De $(\star)$, nous déduisons :

$$\frac{1}{2} \leqslant x_2 \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \frac{3}{2} \leqslant x_2 + 1\,.$$

Ainsi $x_2 \in [-2,2]$. Nous calculons :

$$4-x_2^2 = 4-\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{2}\right)^2 = 4-\frac{8-2\sqrt{7}}{4} = \frac{8+2\sqrt{7}}{4} \quad \text{et} \quad (x_2+1)^2 = \left(\frac{-1+\sqrt{7}}{2}+1\right)^2 = \left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)^2 = \frac{8+2\sqrt{7}}{4}\,.$$

Comme $x_2+1 \geqslant 0$ et $(x_2+1)^2 = 4-x_2^2$, nous savons $x_2+1 = \sqrt{4-x_2^2}$. Donc x_2 est solution de (E_1).

- *Conclusion* L'ensemble solution de (E_1) est $\boxed{\left\{\dfrac{-1+\sqrt{7}}{2}\right\}.}$

Q10 — Reformulons tout d'abord l'équation (E_2) à résoudre. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y &\iff e^{2x} - 1 = 2ye^x \qquad [\text{on multiplie chaque membre par } 2e^x \neq 0] \\ &\iff (e^x)^2 - 2y\,e^x - 1 = 0\,. \end{aligned}$$

- Nous sommes conduit à étudier le trinôme du second degré $X^2 - 2y\,X - 1$, de discriminant $\Delta = 4y^2 + 4 > 0$. Ses racines sont :

$$X_1 = \frac{2y - \sqrt{4y^2+4}}{2} = y - \sqrt{y^2+1} \quad \text{et} \quad X_2 = y + \sqrt{y^2+1}\,.$$

- Du point précédent, nous déduisons :

$$(\star) \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \iff \left(e^x = y - \sqrt{y^2+1} \text{ ou } e^x = y + \sqrt{y^2+1}\right).$$

- Comme la racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$:

$$\sqrt{y^2+1} > \sqrt{y^2} = |y| = \max(-y, y) \geqslant \left\{ \begin{array}{c} y \\ -y \end{array} \right.$$

  et donc $y - \sqrt{y^2+1} < 0$ et $y + \sqrt{y^2+1} > 0$. Comme l'exponentielle est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, $(\star)$ livre, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y &\iff e^x = y + \sqrt{y^2+1} \\ &\iff x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) \qquad [\text{appliquer ln pour le sens direct et exp pour la réciproque}]\,. \end{aligned}$$

- *Conclusion* L'ensemble solution de (E_2) est $\boxed{\left\{\ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)\right\}}$.

Analyse de cette solution

Nous interpréterons plus tard cette résolution d'équation comme suit. La fonction sh (sinus hyperbolique) définie par :

$$\mathrm{sh} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array} \right.$$

est bijective et sa bijection réciproque, la fonction argsh (argument sinus hyperbolique) est donnée par :

$$\mathrm{argsh} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) \end{array} \right..$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{argsh}(\mathrm{sh}(x)) = x \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(\mathrm{argsh}(y)) = y\,.$$