Devoir Libre n°1

Pour le mercredi 7 septembre

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Les assertions seront toutes justifiées avec soin, les raisonnements structurés, les résultats encadrés.

Exercice 1 (Logique) Soient P, Q et R des propositions logiques.

Q1 — Démontrer :

$$((P \implies R) \wedge (Q \implies R)) \equiv ((P \vee Q) \implies R).$$

Q2 — Démontrer :

$$((P \implies Q) \wedge (P \implies R)) \equiv (P \implies (Q \wedge R)).$$

Exercice 2 (Endomorphismes du groupe $(\mathbb{Q},+)$) On rappelle que $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels, $\mathbb{Z}$ celui des nombres entiers relatifs et $\mathbb{Q}$ celui des nombres rationnels. Dans cet exercice, nous considérons une application $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ telle que :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{Q}, \quad \text{pour tout } y \in \mathbb{Q}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Une telle application est appelée *endomorphisme du groupe* $(\mathbb{Q},+)$.

Q3 — Quelle est la valeur de $f(0)$?

Q4 — Soit $x \in \mathbb{Q}$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n\,x) = n\,f(x)$.

Q5 — Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n\,f(1)$.

Q6 — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = n\,f(1)$.

Q7 — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} f(1)$.

Q8 — Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = x\,f(1)$.

Exercice 3 (Résolutions d'équations)

Q9 — Déterminer l'ensemble $\mathscr{D}$ des nombres réels x tels que $\sqrt{4-x^2}$ est bien défini puis résoudre l'équation :

$$(E_1) \qquad \sqrt{4-x^2} = x+1$$

d'inconnue $x \in \mathscr{D}$.

Q10 — Soit y un nombre réel fixé. Résoudre l'équation :

$$(E_2) \qquad \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.