Chapitre n°29
Arithmétique des polynômes
Fractions rationnelles

Notation C29.1 — Dans tout ce document, la lettre $\mathbf{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbf{C}$.

§ 1. Rappels sur $\mathbf{K}[X]$

C29.2 — Ensemble $\mathbf{K}[X]$ — L'ensemble des polynômes à une indéterminée X à coefficients dans $\mathbf{K}$ est noté $\mathbf{K}[X]$.

C29.3 — Écriture additive d'un polynôme et coefficients — Un élément A de $\mathbf{K}[X]$ s'écrit, par essence, d'une unique manière sous la forme

$$A = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot X^n$$

où $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{K}^{(\mathbf{N})}$ est une suite presque nulle d'éléments de $\mathbf{K}$ indexée par $\mathbf{N}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, le scalaire a_n est appelé coefficient de A de degré n et est noté $[A]_n$.

C29.4 — Polynôme nul — Le polynôme nul, noté $0_{\mathbf{K}[X]}$, est l'unique polynôme de $\mathbf{K}[X]$ dont tous les coefficients valent $0_{\mathbf{K}}$.

C29.5 — Coefficient dominant d'un polynôme non nul — Pour tout $A \in \mathbf{K}[X] \setminus \{0_{\mathbf{K}[X]}\}$ le coefficient dominant de A, noté $\mathrm{dom}(A)$, est défini par

$$\mathrm{dom}(A) := [A]_{\deg(A)}$$

C29.6 — Structure de $\mathbf{K}$-algèbre sur $\mathbf{K}[X]$ — L'ensemble $\mathbf{K}[X]$ est muni de trois opérations définies par, pour tout $(A, B, \lambda) \in \mathbf{K}[X] \times \mathbf{K}[X] \times \mathbf{K}$

$$A + B = \sum_{n=0}^{+\infty} ([A]_n + [B]_n) \cdot X^n \qquad \lambda \cdot A = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda [A]_n) \cdot X^n \qquad A \times B = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} [A]_k [B]_{n-k} \right) \cdot X^n$$

qui lui confère une structure de $\mathbf{K}$-algèbre commutative et intègre.

C29.7 — Relation de divisibilité sur $\mathbf{K}[X]$ — Soient A et B deux polynômes de $\mathbf{K}[X]$. On dit que B divise A (ou A est divisible par B ou A est un multiple de B) et on note $A \mid B$, si

$$\exists Q \in \mathbf{K}[X] \quad A = B \times Q$$

C29.8 — Degré d'un polynôme — Le degré d'un polynôme $A \in \mathbf{K}[X]$, noté $\deg(A)$, est défini par

$$\deg(A) := \begin{cases} \max\{n \in \mathbf{N} : [A]_n \neq 0_{\mathbf{K}}\} & \text{si } A \neq 0_{\mathbf{K}[X]} \\ -\infty & \text{si } A = 0_{\mathbf{K}[X]} \end{cases}$$

Le degré est compatible avec les opérations $+$ et $\times$ sur $\mathbf{K}[X]$ au sens suivant. Pour tout $(A, B) \in \mathbf{K}[X]^2$

$$\deg(A + B) \leqslant \max\{\deg(A), \deg(B)\} \quad \text{et} \quad \deg(A \times B) = \deg(A) + \deg(B)$$

C29.9 — Les sous-espace vectoriel $\mathbf{K}_n[X]$ de $\mathbf{K}[X]$ — Pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'ensemble $\mathbf{K}_n[X] := \{A \in \mathbf{K}[X] : \deg(A) \leqslant n\}$ est un sous-$\mathbf{K}$-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$ de dimension $n+1$, dont une base est $(1, X, \dots, X^n)$. De plus

$$\mathbf{K}[X] = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{K}_n[X] \qquad \text{[union croissante]}$$

C29.10 — Division euclidienne dans $\mathbf{K}[X]$ — Soient $A \in \mathbf{K}[X]$ et $B \in \mathbf{K}[X] \setminus \{0_{\mathbf{K}[X]}\}$

$$\exists!(Q,R) \in \mathbf{K}[X]^2 \quad A = B \times Q + R \quad \text{et} \quad \deg(R) < \deg(B)$$

Le polynôme Q (resp. R) est appelé quotient (resp. reste) de la division euclidienne de A par B.

C29.11 — Calcul d'une division euclidienne — L'algorithme de la « division posée » permet de calculer explicitement le quotient et le reste d'une division euclidienne dans $\mathbf{K}[X]$.

C29.12 — Dérivée d'un polynôme — On dispose d'une dérivation sur $\mathbf{K}[X]$

$$D \left| \begin{array}{ccc} (\mathbf{K}[X],+,\cdot) & \longrightarrow & (\mathbf{K}[X],+,\cdot) \\ A & \longmapsto & A' := \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot [A]_n \cdot X^{n-1} \end{array} \right.$$

qui est linéaire, surjective, de noyau $\mathbf{K}_0[X]$.

C29.13 — Dérivées itérées d'un polynôme — Pour tout $(n,A) \in \mathbf{N} \times \mathbf{K}[X]$, on note D^n l'itérée n-ième de l'opérateur de dérivation A et on pose

$$A^{(n)} := D^n(A)$$

On dipose d'une formule pour calculer la dérivée itérée d'un produit de deux polynôme. Pour tout $(A,B,n) \in \mathbf{K}[X] \times \mathbf{K}[X] \times \mathbf{K}$

$$(A \times B)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot A^{(k)} \times B^{(n-k)} \qquad \text{[formule de Leibniz]}$$

C29.14 — Evaluation d'un polynôme en un point — Pour tout $\alpha \in \mathbf{K}$, l'application

$$\mathrm{ev}_\alpha \left| \begin{array}{ccc} (\mathbf{K}[X],+,\cdot,\times) & \longrightarrow & (\mathbf{K}[X],+,\cdot,\times) \\ A & \longmapsto & A(\alpha) := \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} [A]_n \cdot \alpha^n \end{array} \right.$$

est un morphisme de $\mathbf{K}$-algèbres.

C29.15 — Formule de Taylor exacte dans $\mathbf{K}[X]$ — Soient $n \in \mathbf{N}$, $A \in \mathbf{K}_n[X]$ et $\alpha \in \mathbf{K}$. Alors

$$A(\alpha) := \sum_{k=0}^{n} \frac{A^{(k)}(\alpha)}{k!} \cdot (X-\alpha)^k \qquad \text{[formule de Taylor exacte]}$$

C29.16 — Racine d'un polynôme — Soit $(P,\alpha) \in \mathbf{K}[X] \times \mathbf{K}$. On dit que α est racine de P si $P(\alpha) = 0_{\mathbf{K}}$. On a la caractérisation suivante

$$\alpha \text{ est racine de } P \iff X - \alpha \text{ divise } P$$

Plus généralement, si $n \geqslant 2$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont des éléments distincts de $\mathbf{K}$, alors

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \text{ sont racines de } P \iff \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k) \text{ divise } P$$

C29.17 — Spectre d'un polynôme — Le spectre dans $\mathbf{K}$ d'un polynôme $P \in \mathbf{K}[X]$, noté $\mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(P)$, est défini par

$$\mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(P) = \{\alpha \in \mathbf{K} \,:\, P(\alpha) = 0_{\mathbf{K}}\}$$

Si $P \neq 0_{\mathbf{K}[X]}$ alors l'ensemble $\mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(P)$ est fini.

C29.18 — Multiplicité d'une racine de polynôme — Soient P un polynôme non nul de $\mathbf{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbf{K}$ une racine de P. La multiplicité de α est l'entier naturel $\mathrm{mult}(\alpha, P)$ défini par

$$\mathrm{mult}(\alpha,P) := \max\left\{k \in \mathbf{N}^* \,:\, (X-\alpha)^k \text{ divise } P\right\} \in [\![1, \deg(P)]\!]$$

La multiplicité de α est l'unique entier naturel m vérifiant

$$P^{(m-1)}(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(m)}(\alpha) \neq 0$$

C29.19 — Théorème de d'Alembert-Gauss — Tout polynôme de $\mathbf{C}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1 possède une racine dans $\mathbf{C}$. On en déduit que, pour tout polynôme $A \in \mathbf{C}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1, il existe un entier naturel non nul r, des complexes $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ et des entiers naturels non nuls $m_1, \ldots, m_r$ tels que

$$A = \mathrm{dom}(A) \cdot \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k}$$

D'après cette écriture multiplicative de A, $\mathrm{Spec}_{\mathbf{C}}(A) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ et, pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, $\mathrm{mult}(\alpha_k, A) = m_k$.

§ 2. PGCD DE DEUX POLYNÔMES NON TOUS LES DEUX NULS

DÉFINITION C29.20 (ENSEMBLE DES DIVISEURS D'UN POLYNÔME)
Pour tout $A \in \mathbf{K}[X]$, on pose
$$\mathrm{Div}(A) := \{D \in \mathbf{K}[X] \,:\, D \text{ divise } A\}$$

EXEMPLE C29.21 — $\mathrm{Div}\left(0_{\mathbf{K}[X]}\right) = \mathbf{K}[X]$ et $\mathrm{Div}(X) = \mathbf{K}^* \cup \left\{\lambda \cdot X \,:\, \lambda \in \mathbf{K}^*\right\}$

LEMME C29.22 (CLÉ POUR LA DÉFINITION D'UN PGCD)
Soit $(A,B) \in \mathbf{K}[X]^2$ tel que $(A,B) \neq \left(0_{\mathbf{K}[X]}, 0_{\mathbf{K}[X]}\right)$. L'ensemble
$$\left\{\deg(D) \,:\, D \in \mathrm{Div}(A) \cap \mathrm{Div}(B)\right\}$$
est une partie non vide et finie de $\mathbf{N}$.

Démonstration — Posons $\mathscr{E} := \left\{\deg(D) \,:\, D \in \mathrm{Div}(A) \cap \mathrm{Div}(B)\right\}$.
• Comme A et B ne sont pas tous les deux nuls, le polynôme $0_{\mathbf{K}[X]}$ ne divise pas A et B. Donc $\mathscr{E} \subset \mathbf{N}$.
• Le polynôme 1 divise tous les polynômes, en particulier A et B. Ainsi $0 = \deg(1) \in \mathscr{E}$ et donc $\mathscr{E} \neq \emptyset$.
• Quitte à échanger les rôles joués par A et B, nous pouvons supposer que A n'est pas le polynôme nul.
Soit $D \in \mathrm{Div}(A)$. Il existe $Q \in \mathbf{K}[X]$ tel que $A = QD$. Comme A est non nul, Q ne peut l'être. Ainsi
$$\deg(A) = \underbrace{\deg(Q)}_{\in \mathbf{N}} + \deg(D) \geqslant \deg(D)$$
Nous en déduisons que $\mathscr{E} \subset [\![0, \deg(A)]\!]$.

DÉFINITION C29.23 (UN PGCD)
Soit $(A,B) \in \mathbf{K}[X]^2$ tel que $(A,B) \neq \left(0_{\mathbf{K}[X]}, 0_{\mathbf{K}[X]}\right)$.
D'après C29.22 l'entier
$$M := \max\left\{\deg(D) \,:\, D \in \mathrm{Div}(A) \cap \mathrm{Div}(B)\right\}$$
est bien défini. Un PGCD de A et B est un polynôme $D \in \mathrm{Div}(A) \cap \mathrm{Div}(B)$ tel que $\deg(D) = M$, i.e. un polynôme de $\mathbf{K}[X]$ tel que

1. D divise A et B
2. pour tout $D_1 \in \mathrm{Div}(A) \cap \mathrm{Div}(B)$, $\deg(D_1) \leqslant \deg(D)$

EXEMPLE C29.24 — Si A est un polynôme non nul de $\mathbf{K}[X]$, alors A est un PGCD de A et $0_{\mathbf{K}[X]}$.

EXEMPLE C29.25 — Si B est un polynôme non nul de $\mathbf{K}[X]$ et A est un multiple de B, alors $\mathrm{Div}(A) \cap \mathrm{Div}(B) = \mathrm{Div}(B)$ et donc B est un PGCD de A et B.

LEMME C29.26 (CLÉ POUR L'ALGORITHME D'EUCLIDE)
Soit $(A,B) \in \mathbf{K}[X]^2$ tel que $B \neq 0_{\mathbf{K}[X]}$. On note Q (resp. R) le quotient (resp. reste) de la division euclidienne de A par B.

1. $\mathrm{Div}(A) \cap \mathrm{Div}(B) = \mathrm{Div}(B) \cap \mathrm{Div}(R)$
2. Un PGCD de B et R est un PGCD de A et B.

Démonstration — Les arguments de C12.29 s'appliquent *mutatis mutandis*.

ALGORITHME C29.27 (ALGORITHME D'EUCLIDE)
Soit $(A,B) \in \mathbf{K}[X]^2$ tel que $B \neq 0_{\mathbf{K}[X]}$. On définit des polyômes $A_0, A_1, \ldots$ et $B_0, B_1, \ldots$ comme suit.

- On pose $B_0 = A$ et $B_0 = B$.
- pour tout $k \in \mathbf{N}$, si $B_k = 0$ alors la construction s'arrête, sinon elle se poursuit et on pose

$$A_{k+1} = B_k \quad , \quad B_{k+1} = \text{reste de la division euclidienne de } A_k \text{ par } B_k \qquad \left[\text{donc } \deg(B_{k+1}) < \deg(B_k)\right]$$

Proposition C29.28 (analyse de l'algorithme d'Euclide)
On conserve les notations de C29.27.

1. La construction des polynômes $A_0, A_1, \ldots$ et $B_0, B_1, \ldots$ s'arrête au bout d'un nombre fini d'étapes.
2. Si n est le rang des derniers entiers A_k et B_k construits, alors $n \geqslant 1$ et
$$\deg(B) = \deg(B_0) > \deg(B_1) > \ldots > \deg(B_n) = -\infty$$
3. $\mathrm{Div}(A) \cap \mathrm{Div}(B) = \mathrm{Div}(B_{n-1})$ et B_{n-1} est un PGCD de A et B.

Démonstration — Les arguments de C12.30 s'appliquent *mutatis mutandis.*

Exemple C29.29 — Calculons un PGCD de $A := X^7 - X - 1$ et $B := X^5 - 1$, en mettant en œvre l'algorithme d'Euclide.
• Étape 0. On pose $A_0 := A = X^7 - X - 1$ et $B_0 := B = X^5 - 1$ et on effectue la division euclidienne de A_0 par B_0

$$\begin{array}{cccc|l}
X^7 & & -X & -1 & X^5 - 1 \\ \cline{5-5}
-X^7 & +X^2 & & & X^2 \\ \cline{1-4}
 & X^2 & -X & -1 &
\end{array}$$

pour obtenir $A_0 = B_0 \times Q_0 + R_0$, où $Q_0 := X^2$ et $R_0 := X^2 - X - 1$.
• Étape 1. On pose $A_1 := B_0 = X^5 - 1$ et $B_1 := R_0 = X^2 - X - 1$ et on effectue la division euclidienne de A_1 par B_1

$$\begin{array}{cccccc|l}
X^5 & & & & & -1 & X^2 - X - 1 \\ \cline{7-7}
-X^5 & +X^4 & +X^3 & & & & X^3 + X^2 + 2X + 3 \\ \cline{1-6}
 & X^4 & +X^3 & & & -1 & \\
 & -X^4 & +X^3 & +X^2 & & & \\ \cline{2-6}
 & & 2X^3 & +X^2 & & -1 & \\
 & & -2X^3 & +2X^2 & +2X & & \\ \cline{3-6}
 & & & 3X^2 & +2X & -1 & \\
 & & & -3X^2 & +3X & +3 & \\ \cline{4-6}
 & & & & 5X & +2 &
\end{array}$$

pour obtenir $A_1 = B_1 \times Q_1 + R_1$, où $Q_1 := X^3 + X^2 + 2X + 3$ et $R_1 := 5X + 2$.
• Étape 2. On pose $A_2 := B_1 = X^2 - X - 1$ et $B_2 := R_1 = 5X + 2$ et on effectue la division euclidienne de A_2 par B_2

$$\begin{array}{ccc|l}
X^2 & -X & -1 & 5X + 2 \\ \cline{4-4}
-X^2 & -\frac{2}{5}X & & \frac{1}{5}X - \frac{7}{25} \\ \cline{1-3}
 & -\frac{7}{5}X & -1 & \\
 & \frac{7}{5}X & +\frac{14}{25} & \\ \cline{2-3}
 & & -\frac{11}{25} &
\end{array}$$

pour obtenir $A_2 = B_2 \times Q_2 + R_2$, où $Q_2 := \dfrac{1}{5}X - \dfrac{7}{25}$ et $R_2 := -\dfrac{11}{25}$.
• Étape 3. On pose $A_3 := B_2 = 5X + 2$ et $B_3 := R_2 = -\dfrac{11}{25}$ et on observe que $A_3 = B_3 \times Q_3 + R_3$ avec $Q_3 := -\dfrac{125}{11}X - \dfrac{50}{11}$ et $R_3 = 0$.
• Étape 4. On pose $A_4 := B_3 = -\dfrac{11}{25}$ et $B_4 := R_3 = 0$. Le processus s'arrête.

D'après C29.28, $-\dfrac{11}{25}$ est un PGCD de $X^7 - X - 1$ et $B = X^5 - 1$. De plus
$$\mathrm{Div}\left(X^7 - X - 1\right) \cap \mathrm{Div}\left(X^5 - 1\right) = \mathrm{Div}\left(-\frac{11}{25}\right) = \mathbf{K}^*$$

LEMME C29.30 (COMPARAISON DE DEUX PGCD)
Soit $(A,B)\in\mathbf{K}[X]^2$ tel que $(A,B)\neq\left(0_{\mathbf{K}[X]},0_{\mathbf{K}[X]}\right)$. Soient D_1 et D_2 deux PGCD de A et B. Alors D_1 et D_2 sont associés, i.e.

$$\exists\,\lambda\in\mathbf{K}^*\quad D_1=\lambda\cdot D_2$$

Démonstration — • Le polynôme B_{n-1} désigne le dernier reste non nul dans l'algorithme d'Euclide C29.27. D'après C29.28, B_{n-1} est un PGCD de A et B et $\mathrm{Div}(A)\cap\mathrm{Div}(B)=\mathrm{Div}(B_{n-1})$.
• Comme la relation « être associés » est une relation d'équivalence sur $\mathbf{K}[X]$, il suffit de démontrer qu'un PGCD D de A et B est associé à B_{n-1} pour établir le résultat demandé.
• Soit D un PGCD de A et B. Comme $D\in\mathrm{Div}(A)\cap\mathrm{Div}(B)=\mathrm{Div}(B_{n-1})$, D divise B_{n-1}. Il existe donc $Q\in\mathbf{K}[X]$ tel que $B_{n-1}=QD$. Comme B_{n-1} et D sont non nuls et ont même degré, $\deg(Q)=0$, i.e. $Q\in\mathbf{K}^*$.

DÉFINITION C29.31 (LE PGCD)
Soit $(A,B)\in\mathbf{K}[X]^2$ tel que $(A,B)\neq\left(0_{\mathbf{K}[X]},0_{\mathbf{K}[X]}\right)$. D'après C29.30, il existe un unique PGCD unitaire de A et B. On l'appelle le PGCD de A et B et on le note $A\wedge B$.

PROPOSITION C29.32 (RELATION DE BÉZOUT)
Soit $(A,B)\in\mathbf{K}[X]^2$ tel que $(A,B)\neq\left(0_{\mathbf{K}[X]},0_{\mathbf{K}[X]}\right)$. Alors

$$\exists\,(U,V)\in\mathbf{K}[X]^2\quad A\times U+B\times V=A\wedge B\qquad\text{[relation de Bézout]}$$

Démonstration — Les arguments de C12.39 s'appliquent *mutatis mutandis*.

MÉTHODE C29.33 — Une relation de Bézout peut être obtenue en « remontant » l'algorihme d'Euclide.

EXEMPLE C29.34 — Considérons de nouveau les polynômes $A:=X^7-X-1$ et $B:=X^5-1$. D'après C29.29, $A\wedge B=1$. Nous allons déterminer deux polynômes U et V tels que $AU+BV=1$, en « remontant » l'algorihme d'Euclide.
• Nous considérons de nouveau les divisions euclidiennes que nous avons effectuées.

Étape	Division euclidienne
0	$A=Q_0B+R_0$ avec $Q_0=X^2$ et $R_0=X^2-X-1$
1	$A_1=Q_1B_1+R_1$ avec $A_1=B$, $B_1=R_0$, $Q_1=X^3+X^2+2X+3$ et $R_1=5X+2$
2	$A_2=Q_2B_2+R_2$ avec $A_2=B_1$, $B_2=R_1$, $Q_2=\frac{1}{5}X-\frac{7}{25}$ et $R_2=-\frac{11}{25}$

• D'après l'étape 2

$$(\star)\qquad -\frac{11}{25}=A_2-Q_2B_2$$

On a donc exprimé un PGCD de A et B comme une combinaison linéaire à coefficients polynomiaux de A_2 et B_2.

• D'après l'étape 1

$$B_2=R_1=A_1-Q_1B_1$$

Comme $A_2=B_1$, $(\star)$ livre

$$(\star\star)\qquad -\frac{11}{25}=B_1-Q_2\left(A_1-Q_1B_1\right)=-Q_2A_1+\left(1+Q_1Q_2\right)B_1$$

On a donc exprimé un PGCD de A et B comme une combinaison linéaire à coefficients polynomiaux de A_1 et B_1.

• D'après l'étape 0

$$B_1=R_0=A-Q_0B$$

Comme $A_1=B$, $(\star\star)$ livre

$$-\frac{11}{25}=-Q_2B+\left(1+Q_1Q_2\right)\left(A-Q_0B\right)=\left(1+Q_1Q_2\right)A+\left(-Q_2-Q_0-Q_0Q_1Q_2\right)B$$

Après calcul, on trouve

$$-\frac{11}{25}=\left(\frac{X^4}{5}-\frac{2X^3}{25}+\frac{3X^2}{25}+\frac{X}{25}+\frac{4}{25}\right)A+\left(-\frac{X^6}{5}+\frac{2X^5}{25}-\frac{3X^4}{25}-\frac{X^3}{25}-\frac{4X^2}{25}-\frac{X}{5}+\frac{7}{25}\right)B$$

puis

$$A\underbrace{\left(-\frac{5X^4}{11}+\frac{2X^3}{11}-\frac{3X^2}{11}-\frac{X}{11}-\frac{4}{11}\right)}_{=:U}+B\underbrace{\left(\frac{5X^6}{11}-\frac{2X^5}{11}+\frac{3X^4}{11}+\frac{X^3}{11}+\frac{4X^2}{11}+\frac{5X}{11}-\frac{7}{11}\right)}_{=:V}=1$$

DÉFINITION C29.35 (POLYNÔMES PREMIERS ENTRE EUX)
Soit $(A,B)\in\mathbf{K}[X]^2$ tel que $(A,B)\neq\left(0_{\mathbf{K}[X]},0_{\mathbf{K}[X]}\right)$. On dit que A et B sont premiers entre eux si $A\wedge B=1$.

PROPOSITION C29.36 (CRITÈRE DE PRIMALITÉ RELATIVE DANS $\mathbf{C}[X]$)
Soit $(A,B)\in\mathbf{C}[X]^2$ tel que $(A,B)\neq\left(0_{\mathbf{C}[X]},0_{\mathbf{C}[X]}\right)$. Alors

$$A\wedge B=1 \quad\Longleftrightarrow\quad \mathrm{Spec}_{\mathbf{C}}(A)\cap\mathrm{Spec}_{\mathbf{C}}(B)=\emptyset$$

Démonstration — Nous démontrons plutôt

$$A\wedge B\neq 1 \quad\Longleftrightarrow\quad \mathrm{Spec}_{\mathbf{C}}(A)\cap\mathrm{Spec}_{\mathbf{C}}(B)\neq\emptyset$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $A\wedge B\neq 1$. Alors $\deg(A\wedge B)\geqslant 1$ et, d'après le théorème de d'Alembert-Gauß, $A\wedge B$ possède une racine complexe α. Comme $A\wedge B$ divise A et B, α est également racine de A et B.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que A et B aient une racine complexe commune α. Alors $X-\alpha\in\mathrm{Div}(A)\cap\mathrm{Div}(B)$. Nous en déduisons que $\deg(A\wedge B)\geqslant 1$, puis $A\wedge B\neq 1$.

Les polynômes $A:=X^4+2X^2+1\in\mathbf{R}[X]$ et $B:=X^2+1\in\mathbf{R}[X]$ vérifient

$$\mathrm{Spec}_{\mathbf{R}}(A)\cap\mathrm{Spec}_{\mathbf{R}}(B)=\emptyset$$

mais ils ne sont pas premiers entre eux. En effet $A\wedge B=B^2\wedge B=B$.

THÉORÈME C29.37 (DE BÉZOUT)
Soit $(A,B)\in\mathbf{K}[X]^2$ tel que $(A,B)\neq\left(0_{\mathbf{K}[X]},0_{\mathbf{K}[X]}\right)$. Alors

$$A\wedge B=1 \quad\Longleftrightarrow\quad \exists\,(U,V)\in\mathbf{K}[X]^2\quad A\times U+B\times V=1$$

Démonstration — Les arguments de C12.48 s'appliquent *mutatis mutandis.*

LEMME C29.38 (DE GAUSS)
Soit $(A,B,D)\in\mathbf{K}(X)^2$ tel que $D\neq 0_{\mathbf{K}[X]}$. Alors

$$\left(\begin{array}{c} D \text{ divise } A\times B \\ D\wedge A=1\end{array}\right)\quad\Longrightarrow\quad D\text{ divise }B$$

Démonstration — Les arguments de C12.51 s'appliquent *mutatis mutandis.*

§ 3. Polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$ et de $\mathbf{C}[X]$

Définition C29.39 (polynôme irréductible sur K)
Soit $P \in \mathbf{K}[X]$. P est dit irréductible sur $\mathbf{K}$ si

$$\begin{cases} \deg(P) \geqslant 1 \\ \text{et} \\ \forall (P_1, P_2) \in \mathbf{K}[X]^2 \qquad P = P_1 \times P_2 \Longrightarrow (P_1 \in \mathbf{K}_0[X] \text{ ou } P_2 \in \mathbf{K}_0[X]) \end{cases}$$

Le polynôme P est dit réductible sur $\mathbf{K}$, s'il n'est pas irréductible sur $\mathbf{K}$.

Remarque C29.40 — On peut donc penser à un polynôme de $\mathbf{K}[X]$, irréductible sur $\mathbf{K}$, comme à un polynôme non constant, qui n'admet pas de factorisation non triviale dans $\mathbf{K}[X]$.

Remarque C29.41 — La notion de polynôme de $\mathbf{K}[X]$ irréductible sur $\mathbf{K}$ est l'analogue de celle de nombre premier dans $\mathbf{Z}$.

Remarque C29.42 — Le polynôme X^2+1 est irréductible sur $\mathbf{R}$ (sinon il posséderait une racine réelle) mais réductible sur $\mathbf{C}$ puisque $X^2+1 = (X-i)(X+i)$.

Proposition C29.43 (irréductibilité des polynômes de degré 1)
Tout polynôme de $\mathbf{K}[X]$ de degré 1 est irréductible sur $\mathbf{K}$.

Démonstration — Soit P un polynôme de $\mathbf{K}[X]$ de degré 1.
Soit $(P_1, P_2) \in \mathbf{K}[X]^2$ tel que $P = P_1 \times P_2$. Les polynômes P_1, P_2 sont non nuls et

$$1 = \deg(P) = \underbrace{\deg(P_1)}_{\in \mathbf{N}} + \underbrace{\deg(P_2)}_{\in \mathbf{N}}$$

Nous en déduisons que $\big(\deg(P_1), \deg(P_2)\big) \in \{(0,1),(1,0)\}$ et donc $P_1 \in \mathbf{K}_0[X]$ ou $P_2 \in \mathbf{K}_0[X]$.

Remarque C29.44 — Tout polynôme de $\mathbf{K}[X]$ de degré 1 possède une racine dans $\mathbf{K}$.
En effet, soit $P \in \mathbf{K}[X]$ de degré 1. Alors $P = [P]_1 X + [P]_0$ et $[P]_1 \in \mathbf{K}^*$. Le nombre $-\dfrac{[P]_0}{[P]_1}$ est une racine de P dans $\mathbf{K}$.

Proposition C29.45 (CNS d'irréductibilité pour un polynôme de degré 2)
Soit P un polynôme de $\mathbf{K}[X]$ de degré 2. Alors

$$P \text{ est irréductible sur } \mathbf{K} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(P) = \emptyset$$

Démonstration — Nous démontrons plutôt

$$P \text{ est réductible sur } \mathbf{K} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(P) \neq \emptyset$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons P réductible sur $\mathbf{K}$. Comme $\deg(P) = 2 \geqslant 1$, il existe $(P_1, P_2) \in \mathbf{K}[X]^2$ tel que $P = P_1 \times P_2$, $\deg(P_1) \geqslant 1$ et $\deg(P_2) \geqslant 1$. Comme

$$2 = \deg(P) = \underbrace{\deg(P_1)}_{\geqslant 1} + \underbrace{\deg(P_2)}_{\geqslant 1}$$

il vient $\deg(P_1) = \deg(P_2) = 1$. Le polynôme P_1 possède donc une racine dans $\mathbf{K}$, qui est également une racine de P, puisque P est multiple de P_1.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que P possède un racine α dans $\mathbf{K}$. Alors, il existe $Q \in \mathbf{K}[X]$ tel que $P = (X-\alpha)Q$. Puisque

$$2 = \deg(P) = \underbrace{\deg(X-\alpha)}_{=1} + \deg(Q)$$

$\deg(Q) = 1$. Comme $X - \alpha \notin \mathbf{K}_0[X]$ et $Q \notin \mathbf{K}_0[X]$, P est réductible sur $\mathbf{K}$.

Remarque C29.46 — En adaptant la démonstration donnée de C29.45, on établit que, si P est un polynôme de $\mathbf{K}[X]$ de degré 3, alors P est irréductible sur $\mathbf{K}$ si et seulement si il ne possède pas de racine dans $\mathbf{K}$.

Si $P \in \mathbf{K}[X]$ vérifie $\deg(P) \geqslant 4$, alors P peut ne posséder aucune racine dans $\mathbf{K}$ mais pour autant être réductible sur $\mathbf{K}[X]$. Il en est ainsi du polynôme

$$P := X^4 + 2X^2 + 1 = \left(X^2+1\right)^2$$

qui ne possède aucune racine réelle mais qui est réductible sur $\mathbf{R}$, puisque produit de deux polynômes de degré 2.

Exercice C29.47 — Démontrer qu'un polynôme de $\mathbf{R}[X]$, de degré impair supérieur ou égal à 3, est réductible sur $\mathbf{R}$.

Le caractère irréductible d'un polynôme dépendant du corps sur lequel on se place. On évitera donc de parler de polynôme irréductible sans préciser de corps, pour préférer l'expression : le polynôme est irréductible sur tel corps.

Lemme C29.48 (PGCD de deux polynômes irréductibles sur K, unitaires, distincts))
Soient A et B des polynômes irréductibles sur $\mathbf{K}$, unitaires, distincts. Alors $A \wedge B = 1$.

Démonstration — On raisonne par l'absurde. Supposons donc que $D := A \wedge B \neq 1$ de sorte que $\deg(D) \geqslant 1$.
• Comme D divise A, il existe $Q \in \mathbf{K}[X]$ tel que $A = D \times Q$. Le polynôme A étant irréductible sur $\mathbf{K}$, il vient $Q \in \mathbf{K}_0[X]$. Comme A et D sont unitaires, nous avons $Q = 1$, soit $D = A$.
• De même, nous établissons $D = B$.
Ainsi $A = B$, ce qui contredit une des hypothèses.

Théorème C29.49 (decomposition d'un polynôme en produit de polynômes irréductibles)
Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ tel que $\deg(P) \geqslant 1$.

1. Il existe $r \in \mathbf{N}^*$, des polynômes $P_1, \ldots, P_r \in \mathbf{K}(X)$ irréductibles sur $\mathbf{K}$, unitaires et deux-à-deux distincts, des entiers naturels non nuls $n_1, \ldots, n_r$ tels que :
$$P = \operatorname{dom}(P)\, P_1^{n_1} \ldots P_r^{n_r}.$$
2. Cette décomposition de P en produit de facteurs irréductibles est unique à l'ordre près, i.e. étant donnés $s \in \mathbf{N}^*$, des polynômes $Q_1, \ldots, Q_s \in \mathbf{K}[X]$ irréductibles sur $\mathbf{K}$, unitaires et deux-à-deux distincts, des entiers naturels non nuls $m_1, \ldots, m_s$ tels que :
$$P = \operatorname{dom}(P)\, Q_1^{m_1} \ldots Q_s^{m_s}$$
alors
   - $r = s$
   - il existe une bijection $\sigma : [\![1, r]\!] \xrightarrow{\sim} [\![1, r]\!]$ telle que
$$\forall i \in [\![1, r]\!] \qquad Q_i = P_{\sigma(i)} \quad \text{et} \quad m_i = n_{\sigma(i)}.$$

Démonstration — Quitte à remplacer P par son normalisé, on peut supposer que $\operatorname{dom}(P) = 1$.

Existence. On raisonne par récurrence forte sur le degré de P. Pour tout $d \in \mathbf{N}^*$, notons $\mathscr{P}(d)$ le prédicat en la variable d : tout polynôme unitaire de $\mathbf{K}[X]$ de degré d admet une décomposition en produit d'irréductibles, comme dans l'assertion 1 du théorème.

• *Initialisation à $d = 1$*
Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ un polynôme unitaire, tel que $\deg(P) = 1$. Alors P est irréductible sur $\mathbf{K}$. On peut donc l'écrire sous la forme introduite dans l'assertion 1 du théorème, en posant

$$r = 1 \quad , \quad P_1 = P \quad , \quad n_1 = 1.$$

• *Hérédité*
Soit $d \in \mathbf{N}^*$ fixé. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie pour tout $k \in [\![1, d]\!]$. Soit P un polynôme unitaire de degré $d+1$.
. Si P est irréductible sur $\mathbf{K}$, alors on peut l'écrire sous la forme introduite dans l'assertion 1 du théorème, en posant

$$r = 1 \quad , \quad P_1 = P \quad , \quad n_1 = 1.$$

. Si P n'est pas irréductible sur $\mathbf{K}$ alors il existe $A, B \in \mathbf{K}[X]$ des polynômes unitaires tels que $P = AB$, $\deg(A) \geqslant 1$ et $\deg(B) \geqslant 1$. Puisque

$$\deg(A) + \deg(B) = \deg(AB) = \deg(P) = d + 1$$

nous en déduisons $\deg(A) \in [\![1, d]\!]$ et $\deg(B) \in [\![1, d]\!]$. Nous appliquons l'hypothèse de récurrence à A et à B pour obtenir l'existence de $r, s \in \mathbf{N}^*$, de polynômes $A_1, \ldots, A_r$ irréductibles sur $\mathbf{K}$, unitaires et deux-à-deux distincts, de polynômes $B_1, \ldots, B_s$ irréductibles sur $\mathbf{K}$, unitaires et deux-à-deux distincts, d'entiers naturels non nuls $n_1, \ldots, n_r, m_1, \ldots, m_s$ tels que

$$A = A_1^{n_1} \ldots A_r^{n_r} \qquad \text{et} \qquad B = B_1^{m_1} \ldots B_s^{m_s}.$$

D'où

$$P = A_1^{n_1} \ldots A_r^{n_r} B_1^{m_1} \ldots B_s^{m_s}.$$

En regroupant éventuellement les polynômes A_i et B_j égaux ($i \in [\![1, r]\!]$, $j \in [\![1, s]\!]$), nous obtenons une écriture de P comme dans l'assertion 1 du théorème.

Unicité. On présente uniquement une esquisse de preuve, en étant moins formel que pour l'existence, en raisonnant par itérations successives. Soient deux décompositions en produits d'irréductibles de P, comme dans l'assertion 2 du théorème

$$P_1^{n_1} \ldots P_r^{n_r} = P = Q_1^{m_1} \ldots Q_s^{m_s}$$

• Le polynôme P_1 divise le polynôme P (car $n_1 \geqslant 1$), donc le polynôme $Q_1^{m_1} \ldots Q_s^{m_s}$. Le polynôme P_1 ne peut pas être premier avec tous les polynômes $Q_1, \ldots, Q_s$, sinon le lemme de Gauß serait mis en défaut. Par conséquent, quitte à réindexer les polynômes $Q_1, \ldots, Q_s$, on peut supposer $P_1 \wedge Q_1 \neq 1$. D'après C29.48, $P_1 = Q_1$.
• D'après C29.48, P_1 est premier avec chacun des polynômes $Q_2, \ldots, Q_s$. D'après le théorème de Bézout

$$\forall\, k \in [\![2, s]\!] \quad \exists\, (U_k, V_k) \in \mathbf{K}[X]^2 \quad P_1 U_k + Q_k V_k = 1$$

Ainsi

$$(P_1 U_2 + Q_2 V_2)^{n_1 + m_2} \times (P_1 U_3 + Q_3 V_3)^{n_1 + m_3} \times \ldots \times (P_1 U_s + Q_s V_s)^{n_1 + m_s} = 1$$

et en développant le terme de gauche, on obtient deux polynômes U et V de $\mathbf{K}[X]$ tels que

$$P_1^{n_1} U + Q_2^{m_2} Q_3^{m_3} \ldots Q_s^{m_s} V = 1$$

Le théorème de Bézout livre alors $P_1^{n_1} \wedge Q_2^{m_2} \ldots Q_s^{m_s} = 1$.

• D'après le lemme de Gauß, $P_1^{n_1}$ divise $Q_1^{m_1} = P_1^{m_1}$ et donc $n_1 \leqslant m_1$. Alors

$$P_2^{n_2} \ldots P_r^{n_r} = Q_1^{m_1 - n_1} \ldots Q_s^{m_s}.$$

Si $m_1 > n_1$, alors le polynôme $Q_1 = P_1$ divise le polynôme $P_2^{n_2} \ldots P_r^{n_r}$, ce qui n'est pas possible, puisque P_1 est premier avec les polynômes $P_2, \ldots, P_r$ (adapter le raisonnement précédent). Ainsi, $n_1 = m_1$ et

$$P_2^{n_2} \ldots P_r^{n_r} = Q_2^{m_2} \ldots Q_s^{m_s}.$$

• En itérant ce procédé, on démontre le résultat souhaité.

• La bijection σ qui figure dans l'assertion 2 du théorème est « cachée » dans les réindexations éventuelles des polynômes Q_j, $j \in [\![1, s]\!]$.

Exercice C29.50 — Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ un polynôme unitaire, de degré supérieur ou égal à 1. On considère la décomposition de P en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbf{K}$

$$P = P_1^{n_1} \ldots P_r^{n_r}$$

où $r \in \mathbf{N}^*$, $P_1, \ldots, P_r \in \mathbf{K}(X)$ sont des polynômes irréductibles sur $\mathbf{K}$, unitaires et deux-à-deux distincts, $n_1, \ldots, n_r$ sont des entiers naturels non nuls. Quels sont les diviseurs unitaires de P ?

Théorème C29.51 (Description des irréductibles de $\mathbf{C}[X]$)
Soit $P \in \mathbf{C}[X]$.

$$P \text{ est irréductible sur } \mathbf{C} \iff \deg(P) = 1.$$

Démonstration — $\boxed{\Longrightarrow}$ Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ irréductible sur $\mathbf{C}$.
Par définition, $\deg(P) \geqslant 1$ et donc P possède une racine complexe α (théorème de d'Alembert-Gauß). Donc il existe $Q \in \mathbf{C}[X]$ tel que

$$P = (X-\alpha)Q$$

Comme P est irréductible sur $\mathbf{C}$, $\deg(Q) = 0$ et donc $\deg(P) = 1$.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Cf. C29.43.

Lemme C29.52 (Polynôme à coefficients réels possédant une racine complexe non réelle)
Soient $P \in \mathbf{R}[X]$ un polynôme non nul et α une racine complexe de P.

1. Le nombre complexe $\overline{\alpha}$ est racine de P.
2. Supposons que $\alpha \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$, i.e. que $\alpha \neq \overline{\alpha}$. Alors il existe un polynôme $Q \in \mathbf{R}[X]$ tel que

$$P = \underbrace{\left(X^2 - 2\,\mathrm{Re}(\alpha)\,X + |\alpha|^2\right)}_{=(X-\alpha)(X-\overline{\alpha})} Q$$

Démonstration — Posons $n := \deg(P) \in \mathbf{N}$ et, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $a_k := [P]_k \in \mathbf{R}$, de sorte que $P = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot X^k$.

1. Nous calculons

$$\begin{aligned}
P(\overline{\alpha}) &= \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \overline{\alpha}^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} \cdot \overline{\alpha}^k && [a_0,\dots,a_n \text{ sont réels}] \\
&= \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \alpha^k} && [\text{la conjugaison est un automorphisme du corps } \mathbf{C}] \\
&= \overline{P(\alpha)}
\end{aligned}$$

Comme α est racine de P, nous en déduisons $P(\overline{\alpha}) = 0$.

2. • Comme $\alpha \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$, α et $\overline{\alpha}$ sont deux racines complexes distinctes de P. Ainsi il existe $Q \in \mathbf{C}[X]$ tel que

$$(\star) \qquad P = (X-\alpha)(X-\overline{\alpha})Q = \left(X^2 - 2\,\mathrm{Re}(\alpha)\,X + |\alpha|^2\right) Q$$

Il reste à démontrer que le polynôme Q est à coefficients réels.
• En effectuant la division euclidienne de $P \in \mathbf{R}[X]$ par $X^2 - 2\,\mathrm{Re}(\alpha)\,X + |\alpha|^2 \in \mathbf{R}[X]$ dans $\mathbf{R}[X]$, nous obtenons $(Q_1, R_1) \in \mathbf{R}[X]^2$ tel que

$$(\star\star) \qquad P = \left(X^2 - 2\,\mathrm{Re}(\alpha)\,X + |\alpha|^2\right) Q_1 + R_1 \quad \text{et} \quad \deg(R_1) < 2$$

• Nous disposons de deux divisions euclidiennes de P par $X^2 - 2\,\mathrm{Re}(\alpha)\,X + |\alpha|^2$ dans $\mathbf{C}[X]$ données par $(\star)$ et $(\star\star)$. Par unicité d'une telle, il vient $Q = Q_1 \in \mathbf{R}[X]$ (et $R_1 = 0$).

Théorème C29.53 (Description des irréductibles de $\mathbf{R}[X]$)
Soit $P \in \mathbf{R}[X]$.

$$P \text{ est irréductible sur } \mathbf{R} \iff \left|\begin{array}{l} \deg(P) = 1 \\ \text{ou} \\ P \text{ est de degré 2 et de discriminant strictement négatif.} \end{array}\right.$$

Démonstration — $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons P irréductible sur $\mathbf{R}$.
• Supposons $\deg(P) = 2$ et $\Delta(P) \geqslant 0$. Alors P possède une racine dans $\mathbf{R}$ et est donc réductible sur $\mathbf{R}$ (C29.45). Contradiction.
• Supposons $\deg(P) \geqslant 3$ et que P possède une racine réelle α. Alors il existe $Q \in \mathbf{R}[X]$ tel que $P = (X-\alpha)Q$. Comme $\deg(Q) \geqslant 2$, le polynôme P est réductible sur $\mathbf{R}$. Contradiction.

• Supposons $\deg(P) \geqslant 3$ et que P ne possède aucune racine réelle. D'après le théorème de d'Alembert-Gauß, il existe un nombre complexe α qui est racine de P. D'après notre hypothèse, $\alpha \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$. D'après C29.52, il existe $Q \in \mathbf{R}[X]$ tel que $P = \left(X^2 - 2\,\mathrm{Re}(\alpha)\, X + |\alpha|^2\right) Q$. Comme $\deg(Q) \geqslant 1$, le polynôme P est réductible sur $\mathbf{R}$. Contradiction.
• Les trois cas envisagés précédemment conduisant à une contradiction, nous en déduisons que $\deg(P) = 1$ ou ($\deg(P) = 2$ et $\Delta(P) < 0$).
$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $\deg(P) = 1$ ou ($\deg(P) = 2$ et $\Delta(P) < 0$).
• Si $\deg(P) = 1$ alors P est irréductible sur $\mathbf{R}$ (C29.43).
• Si $\deg(P) = 2$ et $\Delta(P) < 0$ alors P ne possède aucune racine réelle. Il est donc irréductible sur $\mathbf{R}$ (C29.45).

Corollaire C29.54 (décomposition en produit d'irréductibles dans $\mathbf{C}[X]$)
Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ tel que $\deg(P) \geqslant 1$. La décomposition de P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbf{C}[X]$ est « de la forme »

$$P = \mathrm{dom}(P) \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{n_k}$$

où
- r est un entier naturel non nul
- $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont des complexes deux-à-deux distincts
- $n_1, \dots, n_r$ sont des entiers naturels non nuls.

Démonstration — Il s'agit d'une conséquence de C29.49 et C29.51.

Remarque C29.55 — L'entier r est le nombre de racines complexes deux-à-deux distinctes de P, les complexes $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont les racines complexes deux-à-deux distinctes de P et pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, n_k est l'ordre de multiplicité de la racine α_k de P.

Corollaire C29.56 (décomposition en produit d'irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$)
Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que $\deg(P) \geqslant 1$. La décomposition de P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$ est « d'une des formes suivantes »

1. Cas où P n'a aucune racine dans $\mathbf{R}$
$$P = \mathrm{dom}(P) \prod_{\ell=1}^{s} (X^2 + a_\ell X + b_\ell)^{m_\ell}$$
2. Cas où P n'a aucune racine dans $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ (i.e. est scindé sur $\mathbf{R}$)
$$P = \mathrm{dom}(P) \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{n_k}$$
3. Cas où P a une racine dans $\mathbf{R}$ et une racine dans $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$
$$P = \mathrm{dom}(P) \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{n_k} \prod_{\ell=1}^{s} (X^2 + a_\ell X + b_\ell)^{m_\ell}$$

où
- r et s sont des entiers non nuls
- $n_1, \dots, n_r, m_1, \dots, m_r$ sont des entiers non nuls
- $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont des réels deux-à-deux distincts
- $(a_1, b_1), \dots, (a_s, b_s)$ sont des couples deux-à-deux distincts de réels tels que pour tout $k \in [\![1, s]\!]$, $a_k^2 < 4b_k$.

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence des Théorèmes C29.49 et C29.53. Q.E.D.

Proposition C29.57 (racines complexes conjuguées d'un polynôme de $\mathbf{R}[X]$)
Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ non nul et $\alpha \in \mathrm{Spec}_{\mathbf{C}}(P)$. Alors
1. $\overline{\alpha} \in \mathrm{Spec}_{\mathbf{C}}(P)$
2. $\mathrm{mult}(\alpha, P) = \mathrm{mult}\left(\overline{\alpha}, P\right)$

Démonstration —

1. Nous avons déjà établi cette propriété en C29.52.
2. • Soit $k \in \mathbf{N}$. Le polynôme $P^{(k)}$ est à coefficients réels. D'après 1

$$(\star) \quad P^{(k)}(\alpha) = 0 \implies P^{(k)}(\overline{\alpha}) = 0$$

• De $(\star)$, nous déduisons que

$$(\star\star) \quad \operatorname{mult}(\alpha, P) \leqslant \operatorname{mult}(\overline{\alpha}, P)$$

• En spécialisant $\alpha \leftarrow \overline{\alpha}$ racine de P, dans $(\star\star)$, il vient

$$\operatorname{mult}(\overline{\alpha}, P) \leqslant \operatorname{mult}\left(\overline{\overline{\alpha}}, P\right) = \operatorname{mult}(\alpha, P)$$

MÉTHODE C29.58 — Décomposer un polynôme de $\mathbf{C}[X]$ en produit d'irréductibles dans $\mathbf{C}[X]$ revient à identifier le coefficient dominant de P et à déterminer les racines de P ainsi que les multiplicités d'icelles.

MÉTHODE C29.59 — Pour décomposer un polynôme de $\mathbf{R}[X]$ en produit d'irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$, on peut commencer par le décomposer en produit d'irréductibles dans $\mathbf{C}[X]$, puis regrouper chacune des racines complexes non réelles de P avec son conjugué (C29.57 et C29.52).

EXEMPLE C29.60 — Nous décomposons le polynôme X^4+16 en produit d'irréductibles dans $\mathbf{C}[X]$, puis dans $\mathbf{R}[X]$.

1. Les racines quatrièmes de $-16 = 16 \cdot e^{i\pi}$ (forme trigonométrique) sont

$$2\cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \quad , \quad 2\cdot e^{i\frac{3\pi}{4}} \quad , \quad 2\cdot e^{i\frac{5\pi}{4}} \quad , \quad 2\cdot e^{i\frac{7\pi}{4}} \qquad \text{[C3.149]}$$

Comme elles sont deux-à-deux distinctes et que X^4+16 est unitaire, il vient

$$X^4+16 = \left(X-2\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X-2\cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)\left(X-2\cdot e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)\left(X-2\cdot e^{i\frac{7\pi}{4}}\right) \qquad [\text{décomposition dans } \mathbf{C}[X]]$$

2. Nous observons que $\overline{2\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}} = 2\cdot e^{i\frac{7\pi}{4}}$ et $\overline{2\cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}} = 2\cdot e^{i\frac{5\pi}{4}}$. Ainsi

$$\begin{aligned} X^4+16 &= \left(X^2 - 2\operatorname{Re}\left(2\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\cdot X + \left|2\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\right|^2\right)\left(X^2 - 2\operatorname{Re}\left(2\cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)\cdot X + \left|2\cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}\right|^2\right) \\ &= \left(X^2 - 2\sqrt{2}\cdot X + 4\right)\left(X^2 + 2\sqrt{2}\cdot X + 4\right) \qquad [\text{décomposition dans } \mathbf{R}[X]] \end{aligned}$$

EXEMPLE C29.61 — Soit un entier $n \geqslant 3$. Nous décomposons le polynôme $X^n - 1$ en produit d'irréductibles dans $\mathbf{C}[X]$, puis dans $\mathbf{R}[X]$.

1. D'après le cours (C3.140), les racines de X^n-1 sont

$$e^{i\frac{2k\pi}{n}} \quad \text{où } k \in [\![0, n-1]\!]$$

Comme elles sont deux-à-deux distinctes et que X^n-1 est unitaire, il vient

$$\boxed{X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) \qquad [\text{décomposition dans } \mathbf{C}[X]]}$$

2. Supposons que n est pair. Alors il existe un entier $p \geqslant 2$ tel que $n = 2p$.

$$X^{2p} - 1 = \prod_{k=0}^{2p-1}\left(X - e^{i\frac{k\pi}{p}}\right) = (X-1)\left(\prod_{k=1}^{p-1}\left(X - e^{i\frac{k\pi}{p}}\right)\right)(X+1)\left(\prod_{k=p+1}^{2p-1}\left(X - e^{i\frac{k\pi}{p}}\right)\right)$$

En effectuant le changement d'indice $\ell = 2p-k$ dans le dernier produit, il vient

$$X^{2p}-1 = (X-1)\left(\prod_{k=1}^{p-1}\left(X - e^{i\frac{k\pi}{p}}\right)\right)(X+1)\left(\prod_{\ell=1}^{p-1}\left(X - e^{i\frac{(2p-\ell)\pi}{p}}\right)\right) = (X-1)\left(\prod_{k=1}^{p-1}\left(X - e^{i\frac{k\pi}{p}}\right)\right)(X+1)\left(\prod_{\ell=1}^{p-1}\left(X - e^{-i\frac{\ell\pi}{p}}\right)\right)$$

Finalement, en regroupant, pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, $X - e^{i\frac{k\pi}{p}}$ et $X - e^{-i\frac{k\pi}{p}}$ nous obtenons

$$\boxed{X^{2p} - 1 = (X-1)\,(X+1)\,\prod_{k=1}^{p-1}\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{k\pi}{p}\right)\cdot X + 1\right) \qquad \left[\text{décomposition dans } \mathbf{R}[X]\right]}$$

3. Supposons que n est impair. Alors il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que $n = 2p+1$.

$$X^{2p+1} - 1 = \prod_{k=0}^{2p}\left(X - e^{i\frac{2k\pi}{2p+1}}\right) = (X-1)\,\left(\prod_{k=1}^{p}\left(X - e^{i\frac{2k\pi}{2p+1}}\right)\right)\left(\prod_{k=p+1}^{2p}\left(X - e^{i\frac{2k\pi}{2p+1}}\right)\right)$$

En effectuant le changement d'indice $\ell = 2p+1-k$ dans le dernier produit, il vient

$$X^{2p+1} - 1 = (X-1)\left(\prod_{k=1}^{p}\left(X - e^{i\frac{2k\pi}{2p+1}}\right)\right)\left(\prod_{\ell=1}^{p}\left(X - e^{i\frac{2(2p+1-\ell)\pi}{2p+1}}\right)\right) = (X-1)\left(\prod_{k=1}^{p}\left(X - e^{i\frac{2k\pi}{2p+1}}\right)\right)\left(\prod_{\ell=1}^{p}\left(X - e^{-i\frac{2\ell\pi}{2p+1}}\right)\right)$$

Finalement, en regroupant, pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, $X - e^{i\frac{2k\pi}{2p+1}}$ et $X - e^{-i\frac{2k\pi}{2p+1}}$ nous obtenons

$$\boxed{X^{2p} - 1 = (X-1)\,\prod_{k=1}^{p}\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{2p+1}\right)\cdot X + 1\right) \qquad \left[\text{décomposition dans } \mathbf{R}[X]\right]}$$

§ 4. Corps des fractions d'un anneau commutatif intègre (HP)

Notation C29.62 — Dans cette partie, $(A, +_A, \times_A)$ désigne un anneau commutatif et intègre, dans lequel $0_A \neq 1_A$.

Proposition-Définition C29.63 (ensemble des fractions de A)
On définit la relation $\sim$ sur $A \times (A \setminus \{0_A\})$ par

$$\forall\,(a_1, b_1) \in A \times (A \setminus \{0_A\}) \quad \forall\,(a_2, b_2) \in A \times (A \setminus \{0_A\}) \quad (a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) :\Longleftrightarrow a_1 \times_A b_2 = a_2 \times_A b_1$$

1. La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $A \times (A \setminus \{0_A\})$.
2. Pour tout $(a, b) \in A \times (A \setminus \{0_A\})$, la classe d'équivalence de (a, b) pour la relation $\sim$ est notée $\dfrac{a}{b}$, i.e.

$$\frac{a}{b} := \left\{(a', b') \in A \times (A \setminus \{0_A\}) \,:\, (a', b') \sim (a, b)\right\}$$

3. L'ensemble des fractions de A, noté $\mathrm{Frac}\,(A)$, est l'ensemble des classes d'équivalences de la relation $\sim$ sur $A \times (A \setminus \{0_A\})$, i.e.

$$\mathrm{Frac}\,(A) := \left\{\frac{a}{b} \,:\, (a, b) \in A \times (A \setminus \{0_A\})\right\}$$

Démonstration — • Soit $(a, b) \in A \times (A \setminus \{0_A\})$. Comme $a \times_A b = a \times_A b$, $(a, b) \sim (a, b)$. La relation $\sim$ est donc réflexive.
• Soient $(a_1, b_1) \in A \times (A \setminus \{0_A\})$ et $(a_2, b_2) \in A \times (A \setminus \{0_A\})$ tels que $(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2)$. Comme $a_1 \times_A b_2 = a_2 \times_A b_1$

$$a_2 \times_A b_1 = a_1 \times_A b_2$$

et donc $(a_2, b_2) \sim (a_1, b_1)$. La relation $\sim$ est donc symétrique.
• Soient $(a_1, b_1) \in A \times (A \setminus \{0_A\})$, $(a_2, b_2) \in A \times (A \setminus \{0_A\})$ et $(a_3, b_3) \in A \times (A \setminus \{0_A\})$ tels que $(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2)$ et $(a_2, b_2) \sim (a_3, b_3)$. Alors

$$a_1 \times_A b_2 = a_2 \times_A b_1 \quad \text{et} \quad a_2 \times_A b_3 = a_3 \times_A b_2$$

Nous en déduisons

$$a_1 \times_A b_2 \times_A b_3 = b_1 \times_A a_2 \times_A b_3 \quad \text{et} \quad b_1 \times_A a_2 \times_A b_3 = b_2 \times_A b_1 \times_A a_3$$

Ainsi

$$(\star) \quad a_1 \times_A b_2 \times_A b_3 = b_2 \times_A b_1 \times_A a_3$$

Comme A est intègre, il est régulier. L'identité $(\star)$ et $b_2 \neq 0_A$ livrent $a_1 \times_A b_3 = a_3 \times_A b_1$ et donc $(a_1, b_1) \sim (a_3, b_3)$. La relation $\sim$ est donc transitive.

Exemple C29.64 — Par définition, $\mathbf{Q} := \mathrm{Frac}(\mathbf{Z})$.

Il faut être soigneux lorsque l'on définit une application dont la source est un ensemble de fractions. Ainsi

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathbf{Q} & \longrightarrow & \mathbf{Z} \\ \dfrac{p}{q} & \longmapsto & p \end{array}\right.$$

n'est pas une application bien définie. En effet $\dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{4}$ possède deux images : 1 et 2.

Proposition-Définition C29.65 (corps des fractions de A)
Soient

$$+ \left|\begin{array}{ccc} \mathrm{Frac}(A)^2 & \longrightarrow & \mathrm{Frac}(A) \\ \left(\dfrac{a_1}{b_1}, \dfrac{a_2}{b_2}\right) & \longmapsto & \dfrac{a_1}{b_1} + \dfrac{a_2}{b_2} := \dfrac{a_1 \times_A b_2 +_A a_2 \times_A b_1}{b_1 \times_A b_2} \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \times \left|\begin{array}{ccc} \mathrm{Frac}(A)^2 & \longrightarrow & \mathrm{Frac}(A) \\ \left(\dfrac{a_1}{b_1}, \dfrac{a_2}{b_2}\right) & \longmapsto & \dfrac{a_1}{b_1} \times \dfrac{a_2}{b_2} := \dfrac{a_1 \times_A a_2}{b_1 \times_A b_2} \end{array}\right.$$

1. Les opérations $+$ et $\times$ sur $\mathrm{Frac}(A)$ sont bien définies.
2. L'ensemble $\mathrm{Frac}(A)$ muni des opérations $+$ et $\times$ est un corps commutatif dont le neutre pour l'addition est $\dfrac{0_A}{1_A}$ et le neutre pour la multiplication est $\dfrac{1_A}{1_A}$.
3. Si $\dfrac{a}{b} \in \mathrm{Frac}(A)$ est non nul, où $(a, b) \in A \times (A \setminus \{0_A\})$, alors $a \neq 0_A$ et
$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$
4. L'application
$$i \left|\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathrm{Frac}(A) \\ a & \longmapsto & \dfrac{a}{1_A} \end{array}\right.$$
est un morphisme d'anneaux injectif.
5. Pour tout $a \in A$, on identifie a et $i(a) := \dfrac{a}{1_A}$, ce qui permet de considérer A comme un sous-anneau de $\mathrm{Frac}(A)$.

Démonstration — Nous ne démontrons que l'assertion 1, laissant le soin au lecteur de vérifier 2,3 et 4, qui ne présentent pas de difficultés.
Soient $(a_1, b_1) \in A \times (A \setminus \{0_A\})$, $(a_2, b_2) \in A \times (A \setminus \{0_A\})$, $(a_3, b_3) \in A \times (A \setminus \{0_A\})$ et $(a_4, b_4) \in A \times (A \setminus \{0_A\})$ tels que $(a_1, b_1) \sim (a_3, b_3)$ et $(a_2, b_2) \sim (a_4, b_4)$. Alors

$$a_1 \times_A b_3 \underset{(1)}{=} a_3 \times_A b_1 \quad \text{et} \quad a_2 \times_A b_4 \underset{(2)}{=} a_4 \times_A b_2$$

• Tout d'abord, nous démontrons

$$\frac{a_1 \times_A b_2 +_A a_2 \times_A b_1}{b_1 \times_A b_2} = \frac{a_3 \times_A b_4 +_A a_4 \times_A b_3}{b_3 \times_A b_4}$$

i.e.

$$(a_1 \times_A b_2 +_A a_2 \times_A b_1) \times_A b_3 \times_A b_4 = (a_3 \times_A b_4 +_A a_4 \times_A b_3) \times_A b_1 \times_A b_2$$

ce qui s'écrit encore

$$(\star) \quad a_1 \times_A b_2 \times_A b_3 \times_A b_4 +_A b_1 \times_A a_2 \times_A b_3 \times_A b_4 = b_1 \times_A b_2 \times_A a_3 \times_A b_4 +_A b_1 \times_A b_2 \times_A b_3 \times_A a_4$$

De (1), nous déduisons

$$(\star\star) \quad a_1 \times_A b_2 \times_A b_3 \times_A b_4 = b_1 \times_A b_2 \times_A a_3 \times_A b_4$$

et de (2), nous déduisons

$$(\star\star\star) \quad b_1 \times_A a_2 \times_A b_3 \times_A b_4 = b_1 \times_A b_2 \times_A b_3 \times_A a_4$$

En additionnant $(\star\star)$ et $(\star\star\star)$ membre-à-membre, nous obtenons $(\star)$.
• Ensuite, nous démontrons
$$\frac{a_1 \times_A a_2}{b_1 \times_A b_2} = \frac{a_3 \times_A a_3}{b_3 \times_A b_4}$$
i.e.
$$(\star) \quad a_1 \times_A a_2 \times_A b_3 \times_A b_4 = b_1 \times_A b_2 \times_A a_3 \times_A a_4$$
De (1), nous déduisons
$$(\star\star) \quad a_1 \times_A a_2 \times_A b_3 \times_A b_4 = b_1 \times_A a_2 \times_A a_3 \times_A b_4$$
et de (2), nous déduisons
$$(\star\star\star) \quad b_1 \times_A a_2 \times_A a_3 \times_A b_4 = b_1 \times_A b_2 \times_A a_3 \times_A a_4$$
Les identités $(\star\star)$ et $(\star\star\star)$ livrent $(\star)$.
• D'après les deux points précédents, les opérations $+$ et $\times$ sur $\mathrm{Frac}\,(A)$ sont bien définies.

Exercice C29.66 — On suppose que A est un corps. Démontrer que $i \colon A \longrightarrow \mathrm{Frac}\,(A)$ est un isomorphisme d'anneaux.

Exercice C29.67 — On met en exergue une propriété universelle qui caractérise le corps des fractions de A.

1. Soit L un corps et $f \colon A \longrightarrow L$ un morphisme d'anneaux. Démontrer qu'il existe un unique morphisme d'anneaux $g \colon \mathrm{Frac}\,(A) \longrightarrow L$ tel que $g \circ i = f$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & L \\ \mathrm{Frac}\,(A) \arrow[ur, dashed, "\exists!\, g"'] & \end{tikzcd}$$

[propriété universelle du corps des fractions de A]

2. Soit K un corps muni d'un morphisme d'anneaux $j \colon A \longrightarrow K$. On suppose que, pour tout corps L et tout morphisme d'anneaux $f \colon A \longrightarrow L$, il existe un unique morphisme d'anneaux $g \colon K \longrightarrow L$ tel que $g \circ j = f$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j"'] & L \\ K \arrow[ur, dashed, "\exists!\, g"'] & \end{tikzcd}$$

Démontrer qu'il existe un unique isomorphisme d'anneaux $\varphi \colon \mathrm{Frac}\,(A) \longrightarrow K$ tel que $\varphi \circ i = j$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"'] & K \\ \mathrm{Frac}\,(A) \arrow[ur, dashed, "\exists!\, \varphi \text{ isomorphisme}"'] & \end{tikzcd}$$

§ 5. Fractions rationnelles en l'indéterminée X à coefficients dans $\mathbf{K}$

Définition C29.68 (corps des fractions rationnelles)
Le corps des fractions de $\mathbf{K}[X]$, noté $\mathbf{K}(X)$, est appelé corps des fractions rationnelles en l'indéterminée X à coefficients dans $\mathbf{K}$. Ainsi $\mathbf{K}(X) := \mathrm{Frac}\,(\mathbf{K}[X])$.

C29.69 — Une fraction rationnelle est un quotient de deux polynômes — Un élément F de $\mathbf{K}(X)$ s'écrit

$$F = \frac{A}{B} \quad \text{où } (A, B) \in \mathbf{K}[X] \times (\mathbf{K}[X] \setminus \{0\})$$

C29.70 — CNS d'égalité de deux quotients de polynômes — Soient $(A_1, B_1) \in \mathbf{K}[X] \times (\mathbf{K}[X] \setminus \{0\})$ et $(A_2, B_2) \in \mathbf{K}[X] \times (\mathbf{K}[X] \setminus \{0\})$. Les fractions rationnelles $\frac{A_1}{B_1}$ et $\frac{A_2}{B_2}$ sont égales dans $\mathbf{K}(X)$ si et seulement si

$$A_1 \times B_2 = A_2 \times B_1$$

C29.71 — Opérations sur les fractions rationnelles — Soient $F_1 = \frac{A_1}{B_1}$ et $F_2 = \frac{A_2}{B_2}$ deux fractions rationnelles, où $(A_1, B_1) \in \mathbf{K}[X] \times (\mathbf{K}[X] \setminus \{0\})$ et $(A_2, B_2) \in \mathbf{K}[X] \times (\mathbf{K}[X] \setminus \{0\})$. Alors

$$F_1 + F_2 := \frac{A_1 \times B_2 + A_2 \times B_1}{B_1 \times B_2} \qquad \text{et} \qquad F_1 \times F_2 := \frac{A_1 \times A_2}{B_1 \times B_2}$$

L'ensemble $\mathbf{K}(X)$ muni des opérations (bien définies) $+$ et $\times$ est un corps.

C29.72 — Inversibilité et inverse dans $\mathbf{K}[X]$ — Soient $F = \frac{A}{B}$ une fraction rationnelle où $(A, B) \in \mathbf{K}[X] \times (\mathbf{K}[X] \setminus \{0\})$. Alors

$$F = 0 \iff A = 0 \qquad [B \neq 0 \text{ et } \mathbf{K}[X] \text{ est intègre}]$$

et, si $F \neq 0$ alors

$$F^{-1} = \frac{B}{A}$$

Exemple C29.73 — Soit les fractions rationnelles $F_1 := \frac{X+1}{X^2+1}$ et $F_2 := \frac{X-1}{X^3+1}$. Alors

$$F_1 + F_2 = \frac{(X+1)(X^3+1) + (X-1)(X^2+1)}{(X^2+1)(X^3+1)} = \frac{X^4 + 2X^3 - X^2 + 2X}{(X^2+1)(X^3+1)} \qquad \text{et} \qquad F_1 \times F_2 = \frac{(X+1)(X-1)}{(X^2+1)(X^3+1)} = \frac{X^2 - 1}{(X^2+1)(X^3+1)}$$

Définition C29.74 (forme irréductible d'une fraction rationnelle)
Soit $(A, B) \in \mathbf{K}[X] \times (\mathbf{K}[X] \setminus \{0_{\mathbf{K}}[X]\})$.
Si $A \wedge B = 1$, alors on dit que la fraction rationnelle $\frac{A}{B}$ est irréductible.

Proposition C29.75 (construction d'une forme irréductible d'une fraction rationnelle)
Soient $F \in \mathbf{K}(X)$ et $(A, B) \in \mathbf{K}[X] \times (\mathbf{K}[X] \setminus \{0\})$ tel que $F = \frac{A}{B}$.
Soit $(A_1, B_1) \in \mathbf{K}[X]^2$ tel que $A = A_1 \times A \wedge B$ et $A = B_1 \times A \wedge B$. Alors

$$A_1 \wedge B_1 = 1 \quad \text{et} \quad F = \frac{A_1}{B_1} \qquad [\text{une forme irréductible de } F]$$

Démonstration — Considérons une relation de Bézout pour A et B

$$A \times U + B \times V = A \wedge B \quad \text{où } (U, V) \in \mathbf{K}[X]^2$$

Il vient

$$A_1 \times (A \wedge B) \times U + B_1 \times (A \wedge B) \times V = A \wedge B$$

Comme $\mathbf{K}[X]$ est régulier (puisque intègre) et $A \wedge B \neq 0$, nous en déduisons

$$A_1 \times U + B_1 \times V = 1$$

D'après le théorème de Bézout, $A_1 \wedge B_1 = 1$.

EXEMPLE C29.76 — Considérons la fraction rationnelle $F := \dfrac{X^3+X^2+X}{X^4+X^3-X-1}$. Comme

$$X^3+X^2+X = X\,(X^2+X+1) \quad \text{et} \quad X^4+X^3-X-1 = (X+1)\,(X-1)\,(X^2+X+1)$$

il vient

$$F = \frac{X}{(X-1)(X+1)} \qquad \text{[une forme irréductible]}$$

LEMME C29.77 (CLÉ POUR LA DÉFINITION DU DEGRÉ D'UNE FRACTION RATIONNELLE)
Soient $(A_1,B_1) \in \mathbf{K}[X] \times (\mathbf{K}[X] \setminus \{0_{\mathbf{K}}[X]\})$ et $(A_2,B_2) \in \mathbf{K}[X] \times (\mathbf{K}[X] \setminus \{0_{\mathbf{K}}[X]\})$ tels que $\dfrac{A_1}{B_1} = \dfrac{A_2}{B_2}$. Alors

$$\deg(A_1) - \deg(B_1) = \deg(A_2) - \deg(B_2) \qquad \text{[identité dans } \mathbf{Z} \cup \{-\infty\}\text{]}$$

Démonstration — • Supposons $A_1 = 0$. Alors $A_2 = 0$ et

$$\deg(A_1) - \deg(B_1) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \deg(A_2) - \deg(B_2) = -\infty$$

• Supposons $A_1 \neq 0$. Alors $A_2 \neq 0$ et, de $A_1 \times B_2 = A_2 \times B_1$, nous déduisons

$$\deg(A_1) + \deg(B_2) = \deg(A_2) + \deg(B_1) \qquad \text{[identité dans } \mathbf{Z}\text{]}$$

Nous en déduisons $\deg(A_1) - \deg(B_1) = \deg(A_2) - \deg(B_2)$.

DÉFINITION C29.78 (DEGRÉ)
Soient $F \in \mathbf{K}[X]$ et $(A,B) \in \mathbf{K}[X] \times (\mathbf{K}[X] \setminus \{0_{\mathbf{K}}[X]\})$ tel que $F = \dfrac{A}{B}$. On appelle degré de F, et on note $\deg(F)$, l'élément de $\mathbf{Z} \cup \{-\infty\}$ défini par

$$\deg(F) := \deg(A) - \deg(B)$$

Il est indépendant du choix de A et B d'après C29.77.

EXEMPLE C29.79 — Le degré de la fraction rationnelle $F := \dfrac{X^5+X-3}{X^2+2}$ est

$$\deg(F) = \deg\left(X^5+X-3\right) - \deg\left(X^2+2\right) = 3$$

PROPOSITION C29.80 (PROPRIÉTÉS DU DEGRÉ D'UNE FRACTION RATIONNELLE)
Soit F_1 et F_2 deux fractions rationnelles de $\mathbf{K}(X)$.

1. $\deg(F_1+F_2) \leqslant \max\left\{\deg(F_1)\,,\,\deg(F_2)\right\}$
2. $\deg(F_1 \times F_2) = \deg(F_1) + \deg(F_2)$

Démonstration — Soient $(A_1,B_1) \in \mathbf{K}[X] \times (\mathbf{K}[X] \setminus \{0_{\mathbf{K}}[X]\})$ et $(A_2,B_2) \in \mathbf{K}[X] \times (\mathbf{K}[X] \setminus \{0_{\mathbf{K}}[X]\})$ tels que $F_1 = \dfrac{A_1}{B_1}$ et $F_2 = \dfrac{A_2}{B_2}$.

• Alors $F_1+F_2 = \dfrac{A_1 \times B_2 + A_2 \times B_1}{B_1 \times B_2}$ et, d'après les propriétés du degré d'un polynôme

$$\begin{array}{rcl}
\deg(F_1+F_2) & = & \deg(A_1 \times B_2 + A_2 \times B_1) - \deg(B_1 \times B_2) \\
& \leqslant & \max\left\{\deg(A_1)+\deg(B_2)\,,\,\deg(A_2)+\deg(B_1)\right\} - (\deg(B_1)+\deg(B_2)) \\
& = & \max\left\{\deg(A_1)+\deg(B_2)-(\deg(B_1)+\deg(B_2))\,,\,\deg(A_2)+\deg(B_1)-(\deg(B_1)+\deg(B_2))\right\} \\
& = & \max\left\{\deg(A_1)-\deg(B_1)\,,\,\deg(A_2)-\deg(B_2)\right\} \\
& = & \max\left\{\deg(F_1)\,,\,\deg(F_2)\right\}
\end{array}$$

• Comme $F_1 \times F_2 = \dfrac{A_1 \times A_2}{B_1 \times B_2}$, il vient

$$\deg(F_1 \times F_2) = \deg(A_1 \times A_2) - \deg(B_1 \times B_2) = \deg(A_1) + \deg(A_2) - (\deg(B_1) + \deg(B_2)) = \underbrace{\deg(A_1) - \deg(B_1)}_{=\deg(F_1)} + \underbrace{\deg(A_2) - \deg(B_2)}_{=\deg(F_2)}$$

LEMME C29.81 (CLÉ POUR LA DÉFINITION DE LA PARTIE ENTIÈRE D'UNE FRACTION RATIONNELLE)
Soit $F \in \mathbf{K}(X)$. Alors

$$\exists! (P, G) \in \mathbf{K}[X] \times \mathbf{K}(X) \quad F = P + G \text{ et } \deg(G) < 0$$

Démonstration — • Démontrons l'existence, de manière constructive. Soit $(A, B) \in \mathbf{K}[X] \times (\mathbf{K}[X] \setminus \{0_{\mathbf{K}}[X]\})$ tel que $F = \dfrac{A}{B}$. Considérons la division euclidienne de A par B :

$$A = QB + R \text{ où } (Q, R) \in \mathbf{K}[X]^2 \text{ et } \deg(R) < \deg(B)$$

Alors

$$F = Q + \frac{R}{B}$$

est une décomposition de F vérifiant $Q \in \mathbf{K}[X]$ et

$$\deg\left(\frac{R}{B}\right) = \deg(R) - \deg(B) < 0$$

• Passons à la preuve de l'unicité. Soient $(P_1, G_1) \in \mathbf{K}[X] \times \mathbf{K}(X)$ et $(P_2, G_2) \in \mathbf{K}[X] \times \mathbf{K}(X)$ tel que

$$F = P_1 + G_1 \quad , \quad \deg(G_1) < 0 \quad , \quad F = P_2 + G_2 \quad , \quad \deg(G_2) < 0$$

Nous en déduisons

$$(\star) \qquad P_1 - P_2 = G_2 - G_1$$

puis

$$\deg(P_1 - P_2) = \deg(G_2 - G_1) \leqslant \max\{\deg(G_2) , \deg(G_1)\} < 0$$

Le polynôme $P_1 - P_2$ est un polynôme de degré strictement négatif. Il s'agit donc du polynôme nul. Nous en déduisons $P_1 = P_2$, puis $G_1 = G_2$ d'après $(\star)$.

DÉFINITION C29.82 (PARTIE ENTIÈRE)
Soient $F \in \mathbf{K}(X)$.

1. La partie entière, notée $E(F)$, est l'unique polynôme de $\mathbf{K}[X]$ tel que

$$\deg(F - E(F)) < 0 \qquad [\text{bien défini d'après C29.81}]$$

2. Si $F = \dfrac{A}{B}$, où $(A, B) \in \mathbf{K}[X] \times (\mathbf{K}[X] \setminus \{0_{\mathbf{K}}[X]\})$ alors

$$E(F) = \text{ quotient de la division euclidienne de } A \text{ par } B \qquad [\text{cf. C29.81}]$$

EXEMPLE C29.83 — Déterminons la partie entière de $F := \dfrac{X^5 + X - 3}{X^2 + 2}$, en calculant

$$\begin{array}{cccc|c}
X^5 & & +X & -3 & X^2+2 \\
-X^5 & -2X^3 & & & \hline X^3 - 2X \\ \hline
 & -2X^3 & +X & -3 & \\
 & 2X^3 & +4X & & \\ \cline{2-4}
 & & 5X & -3 &
\end{array}$$

La partie entière de F est donc $X^3 - 2X$ et

$$F = X^3 - 2X + \frac{5X - 3}{X^2 + 2}$$

REMARQUE C29.84 — Nous conservons les notations de l'exemple précédent. De la dernière décomposition de F obtenue, grâce au calcul de sa partie entière, nous déduisons

$$F = X^3 - 2X + \frac{5}{2} \cdot \frac{2X}{X^2+2} - 3 \cdot \frac{1}{X^2+2}$$

Cette dernière expression nous permet d'établir que la fonction

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \frac{1}{4}\left(t^4 - 4t^2 + 10 \cdot \ln\left(t^2+2\right) - 6\sqrt(2) \cdot \mathrm{Arctan}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right) \end{array}\right.$$

est une primitive de la fonction rationnelle

$$\widetilde{F} \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{t^5+t-3}{t^2+2} \end{array}\right.$$

LEMME C29.85 (CLÉ POUR LA DÉFINITION DE FONCTION RATIONNELLE, ZÉROS, PÔLES, MULTIPLICITÉS)
Soient $(A_1, B_1) \in \mathbf{K}[X] \times (\mathbf{K}[X] \setminus \{0_{\mathbf{K}}[X]\})$ et $(A_2, B_2) \in \mathbf{K}[X] \times (\mathbf{K}[X] \setminus \{0_{\mathbf{K}}[X]\})$ tels que

$$A_1 \wedge B_1 = 1 \quad ; \quad A_2 \wedge B_2 = 1 \quad ; \quad \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}$$

1. $\mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(A_1) = \mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(A_2)$ et, pour tout $\alpha \in \mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(A_1)$, $\mathrm{mult}(\alpha, A_1) = \mathrm{mult}(\alpha, A_2)$
2. $\mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(B_1) = \mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(B_2)$ et, pour tout $\alpha \in \mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(B_1)$, $\mathrm{mult}(\alpha, B_1) = \mathrm{mult}(\alpha, B_2)$
3. Pour tout $\alpha \in \mathbf{K} \setminus \mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(B_1)$, $\dfrac{A_1(\alpha)}{B_1(\alpha)} = \dfrac{A_2(\alpha)}{B_2(\alpha)}$.

Démonstration —

1. Nous savons que $A_1 \times B_2 = A_2 \times B_1$ et qu'il existe $(U_1, V_1) \in \mathbf{K}[X]^2$ tel que

$$A_1 \times U_1 + B_1 \times V_1 = 1$$

   • Soit α une racine de A_1 dans $\mathbf{K}$ de multiplicité $m \geqslant 1$. Il existe donc $Q_1 \in \mathbf{K}[X]$ tel que $A_1 = (X-\alpha)^m \times Q_1$. Ainsi

$$(X-\alpha)^m \times Q_1 \times U_1 + B_1 \times V_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad (X-\alpha)^m \times Q_1 \times B_2 = A_2 \times B_1$$

   D'après le théorème de Bézout, $(X-\alpha)^m \wedge B_1 = 1$. Comme $(X-\alpha)^m$ divise $A_2 \times B_1$, le lemme de Gauß livre $(X-\alpha)^m$ divise A_2. Nous en déduisons que

$$(\star) \qquad \mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(A_1) \subset \mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(A_2) \qquad \text{et} \qquad \left(\forall\, \alpha \in \mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(A_1) \quad \mathrm{mult}(\alpha, A_1) \leqslant \mathrm{mult}(\alpha, A_2)\right)$$

   Par symétrique des rôles de (A_1, B_1) et (A_2, B_2), nous avons également

$$(\star\star) \qquad \mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(A_2) \subset \mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(A_1) \qquad \text{et} \qquad \left(\forall\, \alpha \in \mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(A_2) \quad \mathrm{mult}(\alpha, A_2) \leqslant \mathrm{mult}(\alpha, A_1)\right)$$

   L'assertion 1 découle de $(\star)$ et $(\star\star)$.
2. Analogue à 1.
3. Soit $\alpha \in \mathbf{K} \setminus \mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(B_1) = \mathbf{K} \setminus \mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(B_2)$. De $A_1 \times B_2 = A_2 \times B_1$, nous déduisons que

$$A_1(\alpha) \times B_2(\alpha) = A_2(\alpha) \times B_1(\alpha) \qquad \left[\mathrm{ev}_\alpha \text{ est un morphisme de } \mathbf{K}\text{-algèbres}\right]$$

   puis, comme $B_1(\alpha) \neq 0$ et $B_2(\alpha) \neq 0$, $\dfrac{A_1(\alpha)}{B_1(\alpha)} = \dfrac{A_2(\alpha)}{B_2(\alpha)}$.

DÉFINITION C29.86 (FONCTION RATIONNELLE, ZÉROS, PÔLES, MULTIPLICITÉS)
Soit $F \in \mathbf{K}(X)$ d'écriture irréductible

$$F = \frac{A}{B} \text{ où } (A,B) \in \mathbf{K}[X] \times (\mathbf{K}[X] \setminus \{0_{\mathbf{K}}[X]\}) \text{ et } A \wedge B = 1$$

1. La fonction rationnelle associée à F est

$$\widetilde{F} \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K} \setminus \mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(B) & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ \alpha & \longmapsto & \dfrac{A(\alpha)}{B(\alpha)} \end{array} \right. \qquad \left[\text{indépendant du choix de } (A,B) \text{ d'après C29.85}\right]$$

2. Un élément $\alpha \in \mathbf{K}$ est appelé zéro de F $\widetilde{F}(\alpha) = 0$, i.e. si α appartient à

$$\mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(A) \qquad \left[\text{indépendant du choix de } (A,B) \text{ d'après C29.85}\right]$$

3. La multiplicité d'un zéro α de F est

$$\mathrm{mult}\,(\alpha, A) \qquad \left[\text{indépendant du choix de } (A,B) \text{ d'après C29.85}\right]$$

4. Un pôle est un élément de $\mathbf{K}$ est un élément de

$$\mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(B) \qquad \left[\text{indépendant du choix de } (A,B) \text{ d'après C29.85}\right]$$

5. La multiplicité d'un pôle β de F est

$$\mathrm{mult}\left(\beta, B\right) \qquad \left[\text{indépendant du choix de } (A,B) \text{ d'après C29.85}\right]$$

EXEMPLE C29.87 — Soit $F := \dfrac{X^4 - 1}{X^2 + 3X - 4} \in \mathbf{C}(X)$. Comme

$$X^4 - 1 = (X-1)(X-i)(X+1)(X+i) \qquad \text{et} \qquad X^2 + 3X - 4 = (X-1)(X+4)$$

on a

$$F(X) = \frac{(X-i)(X+1)(X+i)}{X+4} \text{ où } ((X-i)(X+1)(X+i)) \wedge (X+4) = 1 \qquad [\text{une forme irréductible}]$$

• La fonction rationnelle associée à F est

$$\widetilde{F} \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C} \setminus \{-4\} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{(z-i)(z+1)(z+i)}{z+4} = \dfrac{z^3 + z^2 + z + 1}{z+4} \end{array} \right.$$

et **non pas** la fonction

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C} \setminus \{-4, 1\} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{z^4 - 1}{z^2 + 3z - 4} \end{array} \right.$$

• Les zéros de F sont $i, -1, -i$. La multiplicité de chacun des zéros de F est 1.
• L'unique pôle de F est -4. Il a multiplicité 1.

§ 6. DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES D'UNE FRACTION RATIONNELLE

THÉORÈME C29.88 (DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES DANS $\mathbf{K}(X)$)
Soit $F \in \mathbf{K}(X) \setminus \left\{0_{\mathbf{K}[X]}\right\}$, d'écriture irréductible

$$F = \frac{A}{B} \text{ où } (A, B) \in \mathbf{K}[X] \times (\mathbf{K}[X] \setminus \{0_{\mathbf{K}}[X]\}) \text{ et } A \wedge B = 1$$

Soient $r \in \mathbf{N}^*$, $P_1, \ldots, P_r$ des polynômes de $\mathbf{K}[X]$ unitaires et irréductibles sur $\mathbf{K}$, $m_1, \ldots, m_r$ des entiers naturels non nuls tels que

$$B := \operatorname{dom}(B) \cdot \prod_{k=1}^{r} P_k^{m_k} \qquad \left[\text{décomposition en produit irréductibles de } B\right]$$

Alors il existe des $m_1 + \ldots + m_r$ polynômes

$$A_{1,1}, \ldots, A_{1,m_1}, \ldots, A_{r,1}, \ldots, A_{r,m_r}$$

de $\mathbf{K}[X]$ tels que

$$\left|\begin{array}{l} F = \underbrace{E(F)}_{\text{partie entière}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{r} \sum_{\ell=1}^{m_k} \frac{A_{k,\ell}}{P_k^{\ell}}}_{\text{partie fractionnaire}} \\ \text{et} \\ \forall k \in [\![1, r]\!] \quad \forall \ell \in [\![1, m_k]\!] \quad \deg\left(A_{k,\ell}\right) < \deg(P_k) \end{array}\right. \qquad \left[\text{décomposition en éléments simples de } F\right]$$

et une telle décomposition est unique.

Démonstration — Posons

$$d_1 := \deg(P_1) \geqslant 1 \quad , \quad \ldots \quad , \quad d_r := \deg(P_r) \geqslant 1 \quad , \quad d := d_1 m_1 + \ldots + d_r m_r$$

• Commençons par réduire l'énoncé au cas où $\deg(F) < 0$, en le reformulant.
Quitte à remplacer F par $F - E(F)$, il suffit de démontrer que, pour tout $P \in \mathbf{K}_{d-1}[X]$, il existe $m_1 + \ldots + m_r$ polynômes

$$A_{1,1} \in \mathbf{K}_{d_1-1}[X], A_{1,2} \in \mathbf{K}_{d_1-1}[X], \ldots, A_{1,m_1} \in \mathbf{K}_{d_1-1}[X], \ldots, A_{r,1} \in \mathbf{K}_{d_r-1}[X], A_{r,2} \in \mathbf{K}_{d_r-1}[X], \ldots, A_{r,m_r} \in \mathbf{K}_{d_r-1}[X]$$

tels que

$$(\star) \qquad \frac{P}{P_1^{m_1} \times \ldots \times P_r^{m_r}} = \frac{A_{1,1}}{P_1} + \frac{A_{1,2}}{P_1^2} + \ldots + \frac{A_{1,m_1}}{P_1^{m_1}} + \ldots + \frac{A_{r,1}}{P_r} + \frac{A_{r,2}}{P_r^2} + \ldots + \frac{A_{r,m_r}}{P_r^{m_r}}$$

et que ces $m_1 + \ldots + m_r$ polynômes vérifiant $(\star)$ sont uniques.
• Nous introduisons l'ensemble

$$\mathscr{E} := \left\{ \frac{P}{P_1^{m_1} \times \ldots \times P_r^{m_r}} \ : \ P \in \mathbf{K}_{d-1}[X] \right\} = \operatorname{Vect}\left(\frac{1}{P_1^{m_1} \times \ldots \times P_r^{m_r}}, \frac{X}{P_1^{m_1} \times \ldots \times P_r^{m_r}}, \frac{X^2}{P_1^{m_1} \times \ldots \times P_r^{m_r}}, \ldots, \frac{X^{d-1}}{P_1^{m_1} \times \ldots \times P_r^{m_r}} \right)$$

Clairement $\mathscr{E}$ est un sous-$\mathbf{K}$-espace vectoriel de $\mathbf{K}(X)$ et on vérifie sans peine que

$$\mathscr{B} := \left(\frac{1}{P_1^{m_1} \times \ldots \times P_r^{m_r}}, \frac{X}{P_1^{m_1} \times \ldots \times P_r^{m_r}}, \frac{X^2}{P_1^{m_1} \times \ldots \times P_r^{m_r}}, \ldots, \frac{X^{d-1}}{P_1^{m_1} \times \ldots \times P_r^{m_r}} \right)$$

est une base de $\mathscr{E}$. Ainsi $\dim(\mathscr{E}) = d$.
• Considérons

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}_{d_1-1}[X]^{m_1} \times \ldots \times \mathbf{K}_{d_r-1}[X]^{m_r} & \longrightarrow & \mathscr{E} \\ (A_{1,1}, A_{1,2}, \ldots, A_{1,m_1}, \ldots, A_{r,1}, A_{r,2}, \ldots, A_{r,m_r}) & \longmapsto & \dfrac{A_{1,1}}{P_1} + \dfrac{A_{1,2}}{P_1^2} + \ldots + \dfrac{A_{1,m_1}}{P_1^{m_1}} + \ldots + \dfrac{A_{r,1}}{P_r} + \dfrac{A_{r,2}}{P_r^2} + \ldots + \dfrac{A_{r,m_r}}{P_r^{m_r}} \end{array} \right.$$

L'application f est bien définie, i.e., pour tout $\left(A_{1,1}, A_{1,2}, \ldots, A_{1,m_1}, \ldots, A_{r,1}, A_{r,2}, \ldots, A_{r,m_r}\right) \in \mathbf{K}_{d_1-1}[X]^{m_1} \times \ldots \times \mathbf{K}_{d_r-1}[X]^{m_r}$

$$\frac{A_{1,1}}{P_1} + \frac{A_{1,2}}{P_1^2} + \ldots + \frac{A_{1,m_1}}{P_1^{m_1}} + \ldots + \frac{A_{r,1}}{P_r} + \frac{A_{r,2}}{P_r^2} + \ldots + \frac{A_{r,m_r}}{P_r^{m_r}} \in \mathscr{E}$$

L'assertion à démontrer équivaut à la bijectivité de f.
• Comme l'application f est linéaire et comme

$$\dim\left(\mathbf{K}_{d_1-1}[X]^{m_1}\times\ldots\times\mathbf{K}_{d_r-1}[X]^{m_r}\right)=d_1\,m_1+\ldots+d_r\,m_r=d=\dim(\mathscr{E})<\infty$$

la bijectivité de f sera conséquence de son injectivité.
• Soient $\left(A_{1,1},A_{1,2},\ldots,A_{1,m_1},\ldots,A_{r,1},A_{r,2},\ldots,A_{r,m_r}\right)\in\mathbf{K}_{d_1-1}[X]^{m_1}\times\ldots\times\mathbf{K}_{d_r-1}[X]^{m_r}$ tel que

$$(\star\star)\qquad f\left(A_{1,1},A_{1,2},\ldots,A_{1,m_1},\ldots,A_{r,1},A_{r,2},\ldots,A_{r,m_r}\right)=\frac{A_{1,1}}{P_1}+\frac{A_{1,2}}{P_1^2}+\ldots+\frac{A_{1,m_1}}{P_1^{m_1}}+\ldots+\frac{A_{r,1}}{P_r}+\frac{A_{r,2}}{P_r^2}+\ldots+\frac{A_{r,m_r}}{P_r^{m_r}}=0$$

De $(\star\star)$, nous déduisons

$$\frac{A_{1,m_1}}{P_1^{m_1}}=-\frac{A_{1,1}}{P_1}-\frac{A_{1,2}}{P_1^2}-\ldots-\frac{A_{1,m_1-1}}{P_1^{m_1-1}}-\frac{A_{2,1}}{P_2}-\frac{A_{2,2}}{P_2^2}-\ldots-\frac{A_{2,m_2}}{P_2^{m_2}}-\ldots-\frac{A_{r,1}}{P_r}-\frac{A_{r,2}}{P_r^2}-\ldots-\frac{A_{r,m_r}}{P_r^{m_r}}$$

En multipliant membre-à-membre cette identité par $P_1^{m_1}P_2^{m_2}\ldots P_r^{m_r}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}A_{1,m_1}P_2^{m_2}\ldots P_r^{m_r} \quad = \quad & -A_{1,1}P_1^{m_1-1}P_2^{m_2}\ldots P_r^{m_r}-A_{1,2}P_1^{m_1-2}P_2^{m_2}\ldots P_r^{m_r}-\ldots-A_{1,m_1-1}P_1P_2^{m_2}\ldots P_r^{m_r}\\ & -A_{2,1}P_1^{m_1}P_2^{m_2-1}\ldots P_r^{m_r}-A_{2,2}P_1^{m_1}P_2^{m_2-2}\ldots P_r^{m_r}-\ldots-A_{2,m_2}P_1^{m_1}P_3^{m_3}\ldots P_r^{m_r}\\ & - \qquad\qquad \ldots\\ & -A_{r,1}P_1^{m_1}P_2^{m_2}\ldots P_r^{m_r-1}-A_{r,2}P_1^{m_1}P_2^{m_2}\ldots P_r^{m_r-2}-\ldots-A_{r,m_r}P_1^{m_1}P_2^{m_2}\ldots P_{r-1}^{m_r-1}\end{aligned}$$

Dans cette dernière identité entre polynômes, P_1 divise le membre de droite, donc le membre de gauche. Comme P_1 et $P_2^{m_2}\ldots P_r^{m_r}$ sont premiers entre eux, le lemme de Gauß livre

$$P_1 \text{ divise } A_{1,m_1}$$

Comme $\deg\left(A_{1,m_1}\right)<\deg(P_1)$, nous en déduisons $A_{1,m_1}=0$.
L'identité $(\star\star)$ livre alors

$$\frac{A_{1,m_1-1}}{P_1^{m_1-1}}=-\frac{A_{1,1}}{P_1}-\frac{A_{1,2}}{P_1^2}-\ldots-\frac{A_{1,m_1-2}}{P_1^{m_1-2}}-\frac{A_{2,1}}{P_2}-\frac{A_{2,2}}{P_2^2}-\ldots-\frac{A_{2,m_2}}{P_2^{m_2}}-\ldots-\frac{A_{r,1}}{P_r}-\frac{A_{r,2}}{P_r^2}-\ldots-\frac{A_{r,m_r}}{P_r^{m_r}}$$

En multipliant membre-à-membre cette identité par $P_1^{m_1-1}P_2^{m_2}\ldots P_r^{m_r}$ et en raisonnant comme précédemment, on obtient $A_{1,m_1-1}=0$.
De proche en proche, on démontre de même que

$$A_{1,m_1-2}=\ldots=A_{1,2}=A_{1,1}=0$$

De manière analogue, on établit que, pour tout $k\in[\![2,r]\!]$

$$A_{k,m_k}=A_{k,m_k-1}=\ldots=A_{k,2}=A_{k,1}=0$$

Ainsi

$$\left(A_{1,1},A_{1,2},\ldots,A_{1,m_1},\ldots,A_{r,1},A_{r,2},\ldots,A_{r,m_r}\right)=(0,0,\ldots,0,\ldots,0,0,\ldots,0)$$

L'application f est donc injective.

EXEMPLE C29.89 — Soit

$$F=\frac{X^2+X+1}{X(X+1)^2(X+i)^3}\in\mathbf{C}(X)$$

D'après C29.88, il existe un unique $(a_1,b_1,b_2,c_1,c_2,c_3)\in\mathbf{C}^6$ tel que

$$F=\frac{a_1}{X}+\frac{b_1}{X+1}+\frac{b_2}{(X+1)^2}+\frac{c_1}{X+i}+\frac{c_2}{(X+i)^2}+\frac{c_3}{(X+i)^3}\qquad\left[\text{décomposition en éléments simples dans }\mathbf{C}(X)\right]$$

EXEMPLE C29.90 — Soit

$$F = \frac{X^3}{(X+1)(X+7)(X^2+1)(X^2+X+1)^2} \in \mathbf{R}(X)$$

D'après C29.88, il existe un unique $(a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1, e_2, f_2) \in \mathbf{R}^8$ tel que

$$F = \frac{a_1}{X+1} + \frac{b_1}{X+7} + \frac{c_1 X + d_1}{X^2+1} + \frac{e_1 X + f_1}{X^2+X+1} + \frac{e_2 X + f_2}{(X^2+X+1)^2} \qquad \left[\text{décomposition en éléments simples dans } \mathbf{R}(X)\right]$$

MÉTHODE C29.91 — Soit $F \in \mathbf{K}(X)$ et $\alpha \in \mathbf{K}$ un pôle simple (i.e. de multiplicité 1) de F. Le coefficient du terme $\dfrac{1}{X-\alpha}$ dans la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbf{K}(X)$ est donné par

$$\boxed{\text{la valeur de la fraction rationnelle } (X-\alpha) \times F \text{ en } \alpha}$$

EXEMPLE C29.92 — Soit

$$F := \frac{X^2}{(X-1)(X-2)(X-3)} \in \mathbf{R}(X)$$

D'après C29.88, il existe un unique $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ tel que

$$(\star) \qquad F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2} + \frac{c}{X-3} \qquad \left[\text{décomposition en éléments simples dans } \mathbf{R}(X)\right]$$

• De $(\star)$, nous déduisons

$$\frac{X^2}{(X-2)(X-3)} = (X-1) \times F = a + \frac{b(X-1)}{X-2} + \frac{c(X-1)}{X-3}$$

En évaluant les termes extrêmes en 1, il vient $a = \dfrac{1}{2}$.

• De $(\star)$, nous déduisons

$$\frac{X^2}{(X-1)(X-3)} = (X-2) \times F = \frac{a(X-2))}{X-1} + b + \frac{c(X-2)}{X-3}$$

En évaluant les termes extrêmes en 2, il vient $b = -4$.

• De $(\star)$, nous déduisons

$$\frac{X^2}{(X-1)(X-2)} = (X-3) \times F = \frac{a(X-3)}{X-1} + \frac{b(X-3)}{X-2} + c$$

En évaluant les termes extrêmes en 3, il vient $c = \dfrac{9}{2}$.

• Ainsi

$$F := \frac{X^2}{(X-1)(X-2)(X-3)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{X-1} - 4 \cdot \frac{1}{X-2} + \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{X-3} \qquad \left[\text{décomposition en éléments simples dans } \mathbf{R}(X)\right]$$

• De cette décompostion de F, nous déduisons que

$$\left| \begin{array}{ccc}]2,3[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \frac{1}{2} \cdot \ln(t-1) - 4 \cdot \ln(t-2) + \frac{9}{2} \cdot \ln(3-t) \end{array} \right. \text{ est une primitive de } \left| \begin{array}{ccc}]2,3[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{t^2}{(t-1)(t-2)(t-3)} \end{array} \right.$$

EXEMPLE C29.93 — Soit

$$F := \frac{2X^2+1}{(X+1)^2(X^2+X+1)} \in \mathbf{R}(X)$$

D'après C29.88, il existe un unique $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$ tel que

$$(\star) \qquad F = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{(X+1)^2} + \frac{cX+d}{X^2+X+1} \qquad \left[\text{décomposition en éléments simples dans } \mathbf{R}(X)\right]$$

• De $(\star)$, nous déduisons

$$\frac{2X^2+1}{X^2+X+1} = (X+1)^2 \times F = a \cdot (X+1) + b + \frac{(X+1)^2(cX+d)}{X^2+X+1}$$

En évaluant les termes extrêmes en -1, il vient $b = 3$.

• Alors $(\star)$ livre

$$F-\frac{3}{(X+1)^2}=\frac{a}{X+1}+\frac{cX+d}{X^2+X+1}$$

Comme

$$F-\frac{3}{(X+1)^2}=\frac{-X^2-3X-2}{(X+1)^2(X^2+X+1)}=-\frac{(X+1)(X+2)}{(X+1)^2(X^2+X+1)}=-\frac{X+2}{(X+1)(X^2+X+1)}$$

nous obtenons

$$(\star\star)\qquad G:=-\frac{X+2}{(X+1)(X^2+X+1)}=\frac{a}{X+1}+\frac{cX+d}{X^2+X+1}$$

De $(\star\star)$, nous déduisons

$$-\frac{X+2}{X^2+X+1}=(X+1)\times G=a+\frac{(X+1)(cX+d)}{X^2+X+1}$$

En évaluant les termes extrêmes en -1, il vient $a=-1$.
• Alors $(\star\star)$ livre

$$G+\frac{1}{X+1}=\frac{cX+d}{X^2+X+1}$$

Comme

$$G+\frac{1}{X+1}=\frac{(X+1)(X-1)}{(X+1)(X^2+X+1)}=\frac{X-1}{X^2+X+1}$$

nous obtenons

$$\frac{X-1}{X^2+X+1}=\frac{cX+d}{X^2+X+1}$$

Ainsi $c=1$ et $d=-1$.
• D'après nos différents calculs

$$F=-\frac{1}{X+1}+\frac{3}{(X+1)^2}+\frac{X-1}{X^2+X+1}\qquad\left[\text{décomposition en éléments simples dans } \mathbf{R}(X)\right]$$

• De cette décompostion de F, nous déduisons que

$$F=-\frac{1}{X+1}+\frac{3}{(X+1)^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2X+1}{X^2+X+1}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{X^2+X+1}$$

puis que la fonction

$$\left|\begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & -\ln(t+1)-\dfrac{3}{t+1}+\dfrac{1}{2}\cdot\ln(t^2+t+1)-\sqrt{3}\cdot\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)\end{array}\right.$$

est une primitive de la fonction

$$\left|\begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{2t^2+1}{(t+1)^2(t^2+t+1)}\end{array}\right.$$

Exemple C29.94 — Soit $P\in\mathbf{C}[X]$ tel que $\deg(P)\geqslant 1$. On se propose de calculer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$ dans $\mathbf{C}(X)$.
Nous savons qu'il existe $r\in\mathbf{N}^*$, des complexes deux-à-deux distincts $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ et des entiers naturels non nuls $m_1,\dots,m_r$ tels que

$$P=\mathrm{dom}(P)\cdot\prod_{k=1}^{r}(X-\alpha_k)^{m_k}$$

Alors

$$P'=\mathrm{dom}(P)\cdot\sum_{k=1}^{r}m_k\cdot(X-\alpha_k)^{m_k-1}\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq k}}^{r}(X-\alpha_\ell)^{m_\ell}\qquad[\text{cf. C16.99}]$$

Nous en déduisons que

$$\boxed{\frac{P'}{P}=\sum_{k=1}^{r}\frac{m_k}{X-\alpha_k}\qquad\left[\text{décomposition en éléments simples dans } \mathbf{C}(X)\right]}$$