

# CHAPITRE N°28

## ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS

### § 1. PRODUIT SCALAIRE

**DÉFINITION C28.1 (PRODUIT SCALAIRE)**

Soit  $E$  un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel. Une application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \left| \begin{array}{l} E \times E \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) \longmapsto \langle x, y \rangle \end{array} \right.$$

est un produit scalaire sur  $E$  si elle est linéaire à gauche (LG), linéaire à droite (LD), symétrique (Sym), positive (Pos) et définie (Déf), i.e. si les propriétés suivantes sont vérifiées.

- (LG)**  $\forall (x_1, x_2, y) \in E^3 \quad \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{R}^2 \quad \langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y \rangle = \lambda_1 \langle x_1, y \rangle + \lambda_2 \langle x_2, y \rangle$
- (LD)**  $\forall (x, y_1, y_2) \in E^3 \quad \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{R}^2 \quad \langle x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \rangle = \lambda_1 \langle x, y_1 \rangle + \lambda_2 \langle x, y_2 \rangle$
- (Sym)**  $\forall (x, y) \in E^2 \quad \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- (Pos)**  $\forall x \in E \quad \langle x, x \rangle \geq 0$
- (Déf)**  $\forall x \in E \quad \langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0_E.$

**REMARQUE C28.2** — Les propriétés (LG) et (Sym) impliquent la propriété (LD) dans la définition C28.1. Ainsi, pour vérifier qu'une application  $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbf{R}$  est un produit scalaire sur  $E$ , il suffit de vérifier les propriétés (LG), (Sym), (Pos) et (Déf).

**DÉFINITION C28.3 (ESPACE PRÉHILBERTIEN)**

Un espace préhilbertien est un couple  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  où  $E$  est un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $E$ .

**EXERCICE C28.4** — Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien.

- Soit  $(x, y) \in E^2$ . Démontrer

$$\langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2 \langle x, y \rangle$$

en justifiant chaque étape du calcul à l'aide d'une propriété du produit scalaire.

- Soient  $p \in \mathbf{N}_{\geq 2}$  et  $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ . Démontrer

$$\left\langle \sum_{i=1}^p x_i, \sum_{i=1}^p x_i \right\rangle = \sum_{i=1}^p \langle x_i, x_i \rangle + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq p} \langle x_i, x_j \rangle$$

en justifiant chaque étape du calcul à l'aide d'une propriété du produit scalaire.

**EXERCICE C28.5** — Soient  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien et  $x \in E$ . Démontrer que  $\langle x, 0_E \rangle = 0$  et  $\langle 0_E, x \rangle = 0$ .

### § 2. EXEMPLES FONDAMENTAUX DE PRODUITS SCALAIRES

**PROPOSITION C28.6 (PRODUIT SCALAIRE CANONIQUE SUR  $\mathbf{R}^n$ )**

Soit  $n \in \mathbf{N}_{\geq 2}$ . L'application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)) \longmapsto \langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \end{array} \right.$$

définit un produit scalaire sur  $\mathbf{R}^n$ .

**PROPOSITION C28.7 (PRODUIT SCALAIRE CANONIQUE SUR  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ )**

Soit  $n \in \mathbf{N}_{\geq 2}$ . L'application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R} \\ \left( X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) \longmapsto \langle X, Y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \end{array} \right.$$

définit un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ .

**PROPOSITION C28.8 (PRODUIT SCALAIRE CANONIQUE SUR  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ )**

Soient  $(n, p) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$ . L'application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R} \\ (A, B) \longmapsto \langle A, B \rangle := \text{Tr}(A^T \times B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p [A]_{i,j} \cdot [B]_{i,j} \end{array} \right.$$

définit un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{R})$ .

**PROPOSITION C28.9 (PRODUIT SCALAIRE CANONIQUE SUR  $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$ )**

Soient  $a < b$  des nombres réels. L'application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \left| \begin{array}{l} \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R}) \times \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R} \\ (f, g) \longmapsto \langle f, g \rangle := \int_a^b f(t)g(t) dt \end{array} \right.$$

définit un produit scalaire sur  $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$ .

**EXERCICE C28.10** — Démontrer que l'application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}[X] \times \mathbf{R}[X] \longrightarrow \mathbf{R} \\ P \longmapsto \langle P, Q \rangle := \int_0^1 \tilde{P}(t) \cdot \tilde{Q}(t) dt \end{array} \right.$$

définit un produit scalaire sur  $\mathbf{R}[X]$ .

### § 3. NORME ASSOCIÉE À UN PRODUIT SCALAIRE

**DÉFINITION C28.11 (NORME D'UN VECTEUR ET DISTANCE ENTRE DEUX VECTEURS)**

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien.

1. La norme d'un vecteur  $x \in E$  est définie par

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

2. La distance entre deux vecteurs  $x$  et  $y$  de  $E$  est définie par

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

**LEMME C28.12 (CARRÉ DE LA NORME D'UNE SOMME)**

Soient  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien et  $(x, y) \in E^2$ .

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle$$

**LEMME C28.13 (HOMOGENÉITÉ DE LA NORME)**

Soient  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien,  $x \in E$  et  $\lambda \in \mathbf{R}$ .

$$\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$$

**THÉORÈME C28.14 (INÉGALITÉ DE CAUCHY-SCHWARZ ET CAS D'ÉGALITÉ)**

Soient  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien et  $(x, y) \in E^2$ .

1. **Inégalité de Cauchy-Schwarz**

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

2. **Cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz**

$$|\langle x, y \rangle| = \|x\| \cdot \|y\| \text{ si et seulement si la famille } (x, y) \text{ est liée.}$$

Démonstration — Si les vecteurs  $x$  et  $y$  sont tous les deux nuls, alors les assertions (1) et (2) sont claires. Supposons désormais qu'au moins un des vecteurs  $x$  et  $y$  est non nul. D'après (Sym), les vecteurs  $x$  et  $y$  ont des rôles symétriques dans les assertions (1) et (2). Nous pouvons donc supposer que  $y \neq 0_E$ .

(1) On introduit l'application

$$f \begin{cases} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \|x + t \cdot y\|^2 \end{cases}$$

- Soit  $t \in \mathbf{R}$ . En développant le carré scalaire de la somme  $x + t \cdot y$  (cf. C28.4), il vient

$$f(t) = \|x + t \cdot y\|^2 = \langle x, x \rangle + 2 \cdot \langle x, t \cdot y \rangle + \langle t \cdot y, t \cdot y \rangle$$

puis, en utilisant (LG) et (LD)

$$f(t) = \|x\|^2 + 2 \cdot \langle x, y \rangle \cdot t + \|y\|^2 \cdot t^2$$

L'application  $f$  est donc polynomiale en sa variable  $t$ .

- Comme  $y \neq 0_E$ , (Pos) et (Déf) impliquent  $\|y\| > 0$ . L'application  $f$  est donc polynomiale de degré 2, avec un coefficient dominant positif.
- D'après (Pos),  $f \geq 0$  et donc le discriminant  $\Delta(f)$  de  $f$  vérifie  $\Delta(f) \leq 0$ . En effet, si  $\Delta(f) > 0$  alors  $f$  admet deux racines réelles distinctes  $t_1 < t_2$  et est strictement négative sur  $]t_1, t_2[$ , ce qui n'est pas.

Comme

$$\Delta(f) = 4 \cdot \langle x, y \rangle^2 - 4 \cdot \|x\| \cdot \|y\|$$

$\Delta(f) \leq 0$  livre  $\langle x, y \rangle^2 \leq \|x\| \cdot \|y\|$  puis l'inégalité de Cauchy-Schwarz par croissance de la fonction racine carrée sur  $\mathbf{R}_{\geq 0}$ .

(2)  $\Rightarrow$  Supposons  $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \cdot \|y\|$ . Alors  $\Delta(f) = 0$ , où  $f$  est l'application polynomiale de degré 2 introduite en (1). Cette dernière possède donc une unique racine réelle  $t_0$ . Comme

$$0 = f(t_0) = \langle x + t_0 \cdot y, x + t_0 \cdot y \rangle$$

(Déf) livre  $1 \cdot x + t_0 \cdot y = 0_E$ , d'où le caractère lié de la famille  $(x, y)$ .

(2)  $\Leftarrow$  Supposons la famille  $(x, y)$  liée. Alors il existe  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$  dans  $\mathbf{R}^2$  tel que

$$(i) \quad \alpha \cdot x + \beta \cdot y = 0_E.$$

Le nombre  $\alpha$  n'est pas nul (si  $\alpha = 0$  alors  $\beta \neq 0$  et (i) livre  $y = 0_E$ , ce qui n'est pas). De (i) nous déduisons que  $x = \lambda \cdot y$ , où  $\lambda := -\beta/\alpha$ .

D'après (LG) et la multiplicativité de la valeur absolue

$$(ii) \quad |\langle x, y \rangle| = |\langle \lambda \cdot y, y \rangle| = |\lambda \cdot \langle y, y \rangle| = |\lambda| \cdot |\langle y, y \rangle| = |\lambda| \cdot \|y\|^2$$

Par homogénéité de la norme (C28.13)

$$(iii) \quad \|x\| \cdot \|y\| = \|\lambda \cdot y\| \cdot \|y\| = |\lambda| \cdot \|y\|^2$$

De (ii) et (iii) on déduit  $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \cdot \|y\|$ .

**EXEMPLE C28.15** — Soit un entier  $n \geq 2$ . L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique sur  $\mathbf{R}^n$  (cf. C28.6) livre, pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$  et  $(y_1, \dots, y_n)$  dans  $\mathbf{R}^n$

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

**EXEMPLE C28.16** — Soit un entier  $n \geq 2$ . L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique sur  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  (cf. C28.8) livre, pour toutes matrices  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$

$$|\mathrm{Tr}(A^\top B)| \leq \sqrt{\mathrm{Tr}(A^\top A)} \cdot \sqrt{\mathrm{Tr}(B^\top B)}$$

qui, lorsque  $A$  et  $B$  sont de plus symétriques s'écrit encore

$$|\mathrm{Tr}(AB)| \leq \sqrt{\mathrm{Tr}(A^2)} \cdot \sqrt{\mathrm{Tr}(B^2)}$$

**EXEMPLE C28.17** — Soient  $a < b$  deux nombres réels. L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique sur  $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$  (cf. C28.9) livre, pour tout  $(f, g) \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$

$$\left| \int_a^b f(t)g(t) \, dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2 \, dt} \cdot \sqrt{\int_a^b g(t)^2 \, dt}.$$

**EXERCICE C28.18** — Soient  $n$  réels strictement positifs  $x_1, \dots, x_n$  tels que  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ . Démontrer que

$$n^2 \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}$$

**EXERCICE C28.19** — Soit  $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$  une fonction telle que  $f > 0$  sur  $[0, 1]$  et  $\int_0^1 f(t) \, dt = 1$ . Démontrer que  $\int_0^1 \frac{1}{f(t)} \, dt \geq 1$ .

**EXERCICE C28.20** — Soient  $a < b$  deux nombres réels et  $E := \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$ . Soit  $C := \{f \in E : \forall x \in [a, b] f(x) > 0\}$  et

$$\varphi \left\{ \begin{array}{l} C \longrightarrow \mathbf{R} \\ f \longmapsto \left( \int_a^b f(t) \, dt \right) \left( \int_a^b \frac{1}{f(t)} \, dt \right) \end{array} \right.$$

1. Démontrer que  $\varphi(C)$  est minorée.
2. Déterminer la borne inférieure  $m := \inf_{f \in C} \varphi(f)$  et démontrer qu'elle est atteinte.
3. Déterminer toutes les fonctions  $f \in C$  telles que  $\varphi(f) = m$ .

**COROLLAIRE C28.21 (INÉGALITÉ TRIANGULAIRE)**

Soient  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien et  $(x, y) \in E^2$ .

(a) **Inégalité triangulaire**

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

(b) **Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire**

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \iff \left\{ \begin{array}{l} \exists \lambda \in \mathbf{R}_{\geq 0}, \quad x = \lambda \cdot y \\ \text{ou} \\ \exists \lambda \in \mathbf{R}_{\geq 0}, \quad y = \lambda \cdot x \end{array} \right.$$

**EXERCICE C28.22** — Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien. Démontrer :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x + y\|$$

**PROPOSITION C28.23 (IDENTITÉ DE POLARISATION)**

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien et  $\|\cdot\|$  la norme sur  $E$  associée. Soit  $(x, y) \in E^2$ .

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \cdot \left( \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 \right)$$

**REMARQUE C28.24** — On conserve les notations de C28.23. D’après l’identité de polarisation, la seule connaissance de la norme  $\|\cdot\|$  permet de retrouver le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**PROPOSITION C28.25 (IDENTITÉ DU PARALLÉLOGRAMME)**

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien et  $\|\cdot\|$  la norme sur  $E$  associée. Soit  $(x, y) \in E^2$ .

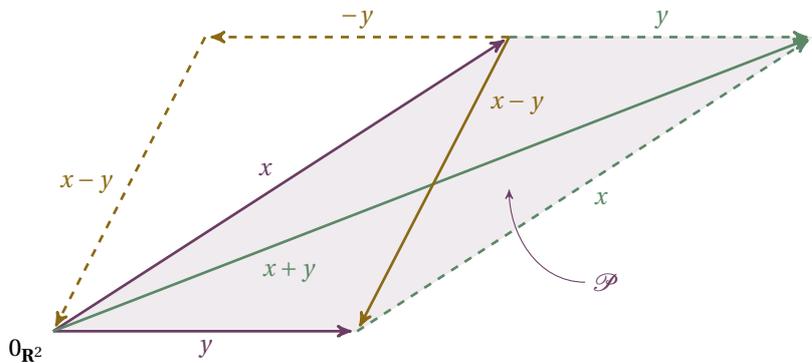
$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 \left( \|x\|^2 + \|y\|^2 \right)$$

**REMARQUE C28.26** —

Soient deux vecteurs  $x$  et  $y$  de  $\mathbf{R}^2$ , muni de son produit scalaire usuel, que nous représentons en l’origine  $0_{\mathbf{R}^2}$ . Formons le parallélogramme  $\mathcal{P}$  supporté par ces deux vecteurs.

Le nombre  $2 \left( \|x\|^2 + \|y\|^2 \right)$  égale la somme des carrés des longueurs de tous les côtés du parallélogramme  $\mathcal{P}$ .

Le nombre  $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2$  est la somme des carrés des longueurs des deux diagonales de  $\mathcal{P}$ .



D’après C28.25, dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs de tous les côtés égale la somme des carrés des longueurs des deux diagonales.

## § 4. ORTHOGONALITÉ

**NOTATION C28.27** — Dans cette partie,  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  désigne un espace préhilbertien et  $\|\cdot\|$  la norme associée au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**DÉFINITION C28.28 (VECTEURS ORTHOGONAUX)**

Soit  $(x, y) \in E^2$ . On dit que  $x$  et  $y$  sont orthogonaux, et on note  $x \perp y$ , si  $\langle x, y \rangle = 0$ .

**DÉFINITION C28.29 (FAMILLES ORTHOGONALES, FAMILLES ORTHONORMALES)**

Soit  $I$  un ensemble non vide, soit  $(x_i)_{i \in I} \in E^I$  une famille de vecteurs de  $E$ .

1. La famille  $(x_i)_{i \in I}$  est orthogonale si

$$\forall (i, j) \in I^2 \quad i \neq j \implies \langle x_i, x_j \rangle = 0$$

2. La famille  $(x_i)_{i \in I}$  est orthonormale si elle est orthogonale et si de plus pour tout  $i \in I$ ,  $\|x_i\| = 1$ , i.e. si

$$\forall (i, j) \in I^2 \quad \langle x_i, x_j \rangle = \delta_{i, j}$$

**EXEMPLE C28.30** — Soit  $n \in \mathbf{N}_{\geq 2}$ . Considérons le produit scalaire canonique sur  $\mathbf{R}^n$  (cf. C28.6). La base canonique  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $\mathbf{R}^n$  est une famille orthonormale.

**EXEMPLE C28.31** — Soient deux entiers  $p \geq 2$  et  $n \geq 2$ . Considérons le produit scalaire canonique sur  $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{R})$  (cf. C28.8). La base canonique  $(E_{i,j})_{(i,j) \in [1,p] \times [1,n]}$  de  $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{R})$  est une famille orthonormale.

**EXERCICE C28.32** — Considérons le  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel  $E = \mathcal{C}^0([0, 2\pi], \mathbf{R})$  muni de l'application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \left| \begin{array}{l} E \times E \longrightarrow \mathbf{R} \\ (f, g) \longrightarrow \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt \end{array} \right.$$

Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , nous définissons l'application  $c_n$  par

$$c_n \left| \begin{array}{l} [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longrightarrow \cos(nx) \end{array} \right.$$

1. Démontrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  définit un produit scalaire sur  $E$ .
2. Démontrer que la famille  $(c_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est orthogonale.

**PROPOSITION C28.33 (UNE FAMILLE ORTHOGONALE DE VECTEURS NON NULS EST LIBRE)**

Soient  $I$  un ensemble non vide et  $(x_i)_{i \in I} \in E^I$  une famille orthogonale telle que, pour tout  $i \in I$ ,  $x_i \neq 0_E$ . Alors, la famille  $(x_i)_{i \in I}$  est libre.

**THÉORÈME C28.34 (DE PYTHAGORE)**

Soient  $n \in \mathbf{N}_{\geq 2}$  et  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$  une famille orthogonale.

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2.$$

**REMARQUE C28.35** —

Soient deux vecteurs  $x$  et  $y$  de  $\mathbf{R}^2$ , muni de son produit scalaire usuel, que nous représentons en l'origine  $0_{\mathbf{R}^2}$ . Nous supposons  $x$  et  $y$  orthogonaux et nous formons le triangle rectangle  $\mathcal{T}$  supporté par ces deux vecteurs.

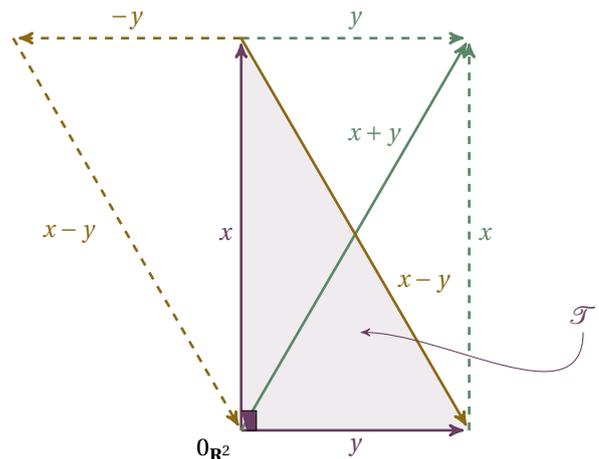
Le théorème de Pythagore C28.34 livre

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

D'après l'identité de polarisation C28.23 et l'orthogonalité de  $x$  et  $y$ ,  $\|x + y\|^2 = \|x - y\|^2$ . Des deux dernières identités, nous déduisons

$$(\star) \quad \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Le nombre  $\|x - y\|^2$  égale le carré de la longueur de l'hypoténuse de  $\mathcal{T}$ . L'identité  $(\star)$  est donc le théorème de Pythagore rencontré dans les petites classes.



**EXERCICE C28.36** — Soient  $E$  un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension 3,  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  une base de  $E$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  un produit scalaire sur  $E$ . Construire une base orthonormale  $\mathcal{C}$  de  $E$ .

**DÉFINITION C28.37 (VECTEUR NORMALISÉ D'UN VECTEUR NON NUL)**

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien de dimension  $n \geq 1$  et  $\|\cdot\|$  la norme associée au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Le vecteur normalisé d'un vecteur  $x$  non nul de  $E$  est  $\frac{1}{\|x\|} \cdot x$ . Il est colinéaire à  $x$ , de même sens et de norme 1.

**PROPOSITION C28.38 (ALGORITHME D'ORTHONORMALISATION DE GRAM-SCHMIDT)**

Soient  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$  de  $E$  et  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $F$ . On construit une famille  $(\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n)$  de vecteurs de  $F$  de proche en proche comme suit.

- (i)  $\varepsilon'_1$  est le vecteur normalisé de  $\varepsilon_1 := e_1$ .
- (ii) Pour tout  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$

$$\varepsilon'_{i+1} \text{ est le vecteur normalisé de } \varepsilon_{i+1} := e_{i+1} - \sum_{k=1}^i \langle e_{i+1}, \varepsilon'_k \rangle \cdot \varepsilon'_k.$$

Alors :

- 1. la famille  $(\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n)$  est bien définie et forme une base orthonormale de  $F$ ;
- 2. pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\varepsilon'_i \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_i)$ ;
- 3. pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  la  $i$ -ième coordonnée de  $\varepsilon'_i$  dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$  est un nombre réel strictement positif.

Démonstration — **Pierre angulaire.** Commençons par démontrer que, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\mathcal{P}(i) \left\{ \begin{array}{l} (\alpha_i) \quad \forall j \in \llbracket 1, i \rrbracket, \varepsilon'_j \text{ existe} \\ (\beta_i) \quad \forall j \in \llbracket 1, i \rrbracket, \varepsilon'_j \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_j) \\ (\gamma_i) \quad (\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_i) \text{ est une famille orthonormée.} \end{array} \right.$$

en raisonnant par récurrence finie.

— *Initialisation* à  $i = 1$ .

$(\alpha_1)$  Comme  $(e_1, \dots, e_n)$  est libre, le vecteur  $e_1$  est non nul donc  $\varepsilon'_1 := \frac{1}{\|e_1\|} \cdot e_1$  est bien défini.

$(\beta_1, \gamma_1)$  Il est clair que  $\varepsilon'_1 \in \text{Vect}(e_1)$  et que  $\|\varepsilon'_1\| = 1$

— *Hérédité.* Soit  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  tel que  $\mathcal{P}(i)$  est vraie, i.e. tel que  $(\alpha_i)$ ,  $(\beta_i)$  et  $(\gamma_i)$  sont vraies.

$(\alpha_{i+1})$  D'après  $(\alpha_i)$ , les vecteurs  $\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_i$  et donc le vecteur  $\varepsilon_{i+1} := e_{i+1} - \sum_{k=1}^i \langle e_{i+1}, \varepsilon'_k \rangle \cdot \varepsilon'_k$  est bien défini. Si  $\varepsilon_{i+1}$  était nul,  $(\beta_i)$  impliquerait

$$\varepsilon_{i+1} = \sum_{k=1}^i \underbrace{\langle e_{i+1}, \varepsilon'_k \rangle \cdot \varepsilon'_k}_{\in \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) \subset \text{Vect}(e_1, \dots, e_i)} \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_i)$$

et la famille  $(e_1, \dots, e_n)$  serait liée, ce qui n'est pas. Comme  $\varepsilon_{i+1} \neq 0_E$ , le vecteur  $\varepsilon'_{i+1} := \frac{1}{\|\varepsilon_{i+1}\|} \cdot \varepsilon_{i+1}$  est bien défini.

$(\beta_{i+1})$  Toujours d'après  $(\beta_i)$

$$\varepsilon_{i+1} := \underbrace{e_{i+1}}_{\in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{i+1})} - \sum_{k=1}^i \underbrace{\langle e_{i+1}, \varepsilon'_k \rangle \cdot \varepsilon'_k}_{\in \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) \subset \text{Vect}(e_1, \dots, e_{i+1})} \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{i+1}).$$

Le vecteur  $\varepsilon'_{i+1} := \frac{1}{\|\varepsilon_{i+1}\|} \cdot \varepsilon_{i+1}$  appartient donc également à  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{i+1})$ .

$(\gamma_{i+1})$  Soit  $j \in \llbracket 1, i \rrbracket$ . Démontrons que  $\langle \varepsilon'_{i+1}, \varepsilon'_j \rangle = 0$  ou, de manière équivalente,  $\langle \varepsilon_{i+1}, \varepsilon'_j \rangle = 0$ . D'après  $(\gamma_i)$

$$\langle \varepsilon_{i+1}, \varepsilon'_j \rangle = \left\langle e_{i+1} - \sum_{k=1}^i \langle e_{i+1}, \varepsilon'_k \rangle \cdot \varepsilon'_k, \varepsilon'_j \right\rangle \stackrel{(LG)}{=} \langle e_{i+1}, \varepsilon'_j \rangle - \sum_{k=1}^i \langle e_{i+1}, \varepsilon'_k \rangle \cdot \underbrace{\langle \varepsilon'_k, \varepsilon'_j \rangle}_{=\delta_{k,j}} = 0.$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=\langle e_{i+1}, \varepsilon'_j \rangle}$

Enfin, le vecteur  $\varepsilon'_{i+1} := \frac{1}{\|\varepsilon_{i+1}\|} \cdot \varepsilon_{i+1}$  est de norme 1.

- (1) D'après ce qui précède, la famille  $(\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n)$  est bien définie et forme une famille orthonormale de  $F$ . Comme elle est libre (orthogonale et formée de vecteurs non nuls) et comme elle contient  $n = \dim(F) < \infty$  vecteurs,  $(\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n)$  est une base orthonormale de  $F$ .
- (2) Cette assertion correspond à  $(\beta_n)$  qui est déjà établie.

(3) Comme  $\varepsilon'_1 := \frac{1}{\|e_1\|} \cdot e_1$ , la première coordonnée de  $\varepsilon'_1$  dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$  est  $\frac{1}{\|e_1\|} > 0$ .  
 Soit  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ . D'après (2),

$$\varepsilon_{i+1} := e_{i+1} - \underbrace{\sum_{k=1}^i \underbrace{\langle e_{i+1}, \varepsilon'_k \rangle \cdot \varepsilon'_k}_{\in \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) \subset \text{Vect}(e_1, \dots, e_i)}}_{\in \text{Vect}(e_1, \dots, e_i)}.$$

La  $(i+1)$ -ième composante de  $\varepsilon_{i+1}$  dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$  est donc 1. Par suite, la  $(i+1)$ -ième composante de  $\varepsilon'_{i+1} := \frac{1}{\|\varepsilon_i\|} \cdot \varepsilon_i$  dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$  est  $\frac{1}{\|\varepsilon_i\|} > 0$ .

**MÉTHODE C28.39** — Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien, muni d'une base  $(e_1, \dots, e_n)$ .  
 Le calcul de la base orthonormée  $(\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n)$  de  $E$  donnée par l'algorithme de Gram-Schmidt C28.38 nécessite de normer les vecteurs  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  à chaque étape, d'où de multiples extractions de racines carrées qui peuvent alourdir les calculs. Il est souvent préférable de d'abord calculer tous les vecteurs  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ , sans les normer à chaque étape, afin d'obtenir la base orthogonale  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  de  $E$ . En normant chacun des vecteurs  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  en toute fin de calcul, on obtiendra la base orthonormée  $(\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n)$  de  $E$  désirée.  
 En analysant l'algorithme de Schmidt C28.38, il vient

$$\varepsilon_1 = e_1$$

et pour tout  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$

$$\varepsilon_{i+1} := e_{i+1} - \sum_{k=1}^i \langle e_{i+1}, \varepsilon'_k \rangle \cdot \varepsilon'_k = e_{i+1} - \sum_{k=1}^i \left\langle e_{i+1}, \frac{1}{\|\varepsilon_k\|} \cdot \varepsilon_k \right\rangle \cdot \frac{1}{\|\varepsilon_k\|} \cdot \varepsilon_k \stackrel{(LD)}{=} e_{i+1} - \sum_{k=1}^i \langle e_{i+1}, \varepsilon_k \rangle \cdot \frac{1}{\|\varepsilon_k\|^2} \cdot \varepsilon_k$$

d'où

$$\varepsilon_{i+1} = e_{i+1} - \sum_{k=1}^i \frac{\langle e_{i+1}, \varepsilon_k \rangle}{\langle \varepsilon_k, \varepsilon_k \rangle} \cdot \varepsilon_k$$

ce qui permet un calcul des vecteurs  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  de proche en proche, sans extraction de racine carrée.

**EXERCICE C28.40** — On munit  $\mathbf{R}^4$  de son produit scalaire usuel (cf. C28.6). On pose

$$H := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

1. Déterminer une base  $\mathcal{B}$  de  $H$ .
- (b) Appliquer l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base  $\mathcal{B}$  de  $H$  déterminer en 1 pour obtenir une base orthonormée de  $H$ .

**EXERCICE C28.41** — Soit  $E$  un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$ ,  $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un produit scalaire sur  $E$ . Soit  $\mathcal{B} := (\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n)$  la base orthonormale de  $E$  obtenue en lui appliquant l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Que dire de la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}_0$  à la base  $\mathcal{B}$ ?

**EXERCICE C28.42** — Soit  $n \in \mathbf{N}$ . On définit l'application  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  par

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}_n[X] \times \mathbf{R}_n[X] \longrightarrow \\ (P, Q) \longrightarrow \langle P, Q \rangle := \sum_{k=0}^n \tilde{P}(k) \cdot \tilde{Q}(k). \end{array} \right.$$

- 1 Vérifier que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $\mathbf{R}_n[X]$ .
- 2 Déterminer une base orthonormée de  $\mathbf{R}_2[X]$ , pour le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  introduit en début d'énoncé (en spécialisant  $n$  à 2).

**EXERCICE C28.43** — On définit l'application  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  par

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \left| \begin{array}{l} \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R}) \times \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R} \\ (f, g) \longrightarrow \langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t) \cdot g(t) \cdot e^{-t} dt \end{array} \right.$$

1. Vérifier que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $\mathbf{R}_n[X]$ .
2. Soient les applications  $f_0, f_1, f_2$  définie par

$$f_0 \left| \begin{array}{l} [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto 1 \end{array} \right. \quad f_1 \left| \begin{array}{l} [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \cos(x) \end{array} \right. \quad f_2 \left| \begin{array}{l} [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \sin(x) \end{array} \right.$$

Déterminer une base orthonormale de  $F := \text{Vect}(f_0, f_1, f_2)$ .

## § 5. ORTHOGONAL D'UNE PARTIE

**NOTATION C28.44** — Dans cette partie,  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  désigne un espace préhilbertien et  $\|\cdot\|$  la norme associée au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**DÉFINITION C28.45 (ORTHOGONAL D'UNE PARTIE)**

Soit  $A$  une partie de  $E$ . L'orthogonal de  $A$  est la partie de  $E$ , notée  $A^\perp$ , définie par

$$A^\perp := \{x \in E : \forall a \in A \quad \langle x, a \rangle = 0\}$$

**EXEMPLE C28.46** —  $\{0_E\}^\perp = E$  et  $E^\perp = \{0_E\}$ .

**EXERCICE C28.47** — Soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$  tels que  $A \subset B$ . Démontrer que  $B^\perp \subset A^\perp$ .

**EXERCICE C28.48** — Soient un entier  $n \geq 2$  et  $x_1, x_2, \dots, x_n, x$  des vecteurs de  $E$ . Démontrer

$$x \in \text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)^\perp \iff \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad x \perp x_k$$

**EXERCICE C28.49** — On munit  $\mathbf{R}^4$  de son produit scalaire canonique (cf. C28.6). On pose

$$F := \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases} \right\}.$$

1. Démontrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^4$  et en donner une base.
2. Déterminer l'orthogonal  $F^\perp$  de  $F$ .

**PROPOSITION C28.50 (STRUCTURE DE L'ORTHOGONAL D'UNE PARTIE)**

Si  $A$  est une partie  $E$  alors  $A^\perp$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**EXERCICE C28.51** — On munit  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  de son produit scalaire canonique (cf. C28.8). On note  $F$  l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  dont tous les coefficients diagonaux sont nuls

$$F := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) : \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, [A]_{i,i} = 0\}.$$

1. Démontrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  et en donner une base.
2. Déterminer une base de  $F^\perp$ .

**PROPOSITION C28.52 (ORTHOGONAL DE L'ORTHOGONAL)**

Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  alors  $F \subset (F^\perp)^\perp$ .

 L'inclusion réciproque dans C28.?? n'est pas nécessairement vraie, d'après les deux exercices ci-dessous. Cependant, lorsque  $F$  est **de dimension finie**  $F \subset (F^\perp)^\perp$ . Nous le démontrerons plus tard (cf. C28.69).

**EXERCICE C28.53** — Soient  $a < b$  deux nombres réels. On munit  $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$  de son produit scalaire canonique (cf. C28.9). Soit  $F$  l'ensemble des fonctions polynomiales sur  $[0, 1]$ , i.e.

$$F := \text{Vect} \left( \left( \begin{array}{c|c} f_n & [a, b] \\ \hline x & \end{array} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{R} \\ x^n \end{array} \right)_{n \in \mathbf{N}} \right).$$

Déterminer  $F^\perp$  puis comparer  $F = (F^\perp)^\perp$ .

**EXERCICE C28.54** — On munit  $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$  de son produit scalaire canonique (cf. C28.9).

- Démontrer que  $F = \{f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R}) : f(0) = 0\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$ .
- Déterminer  $F^\perp$  puis comparer  $F = (F^\perp)^\perp$ .

**EXERCICE C28.55** — Soient  $F_1, F_2$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ .

- Démontrer que  $F_1^\perp \cap F_2^\perp = (F_1 + F_2)^\perp$ .
- Démontrer que  $F_1^\perp + F_2^\perp \subset (F_1 \cap F_2)^\perp$ .

**EXERCICE C28.56** — On munit  $E := \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbf{R})$ , muni de son produit scalaire canonique (cf. C28.9). On pose

$$F_1 = \{f \in E : \forall x \in [-1, 0], f(x) = 0\} \quad \text{et} \quad F_2 = \{f \in E : \forall x \in [0, 1], f(x) = 0\}.$$

- Démontrer :  $F_1^\perp = F_2$ .
- Démontrer :  $F_2^\perp = F_1$ .
- Justifier :  $F_1^\perp + F_2^\perp \neq (F_1 \cap F_2)^\perp$ .

## § 6. ESPACES EUCLIDIENS ET BASE ORTHONORMÉES

### DÉFINITION C28.57 (ESPACE EUCLIDIEN)

Un espace euclidien est un espace préhilbertien  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , où  $E$  est un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension finie.

### THÉORÈME C28.58 (D'EXISTENCE D'UNE BASE ORTHONORMÉE DANS UN ESPACE EUCLIDIEN)

Tout un espace euclidien possède une base orthonormée.

### PROPOSITION C28.59 (EXPRESSION DES COORDONNÉES D'UN VECTEURS DANS UNE BASE ORTHONORMÉE)

Soient  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien,  $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$  et  $x \in E$ . Alors

$$x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle \cdot e_i$$

### PROPOSITION C28.60 (EXPRESSION DU PRODUIT SCALAIRE DANS UNE BASE ORTHONORMÉE)

Soient  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien,  $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$  et  $(x, y) \in E^2$ . On pose

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = (x_1, \dots, x_n)^\top \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(y) = (y_1, \dots, y_n)^\top$$

Alors

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$$

**PROPOSITION C28.61 (EXPRESSION DE LA NORME DANS UNE BASE ORTHONORMÉE)**

Soient  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$  et  $x \in E$ . On pose

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = (x_1, \dots, x_n)^T$$

Alors

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

**THÉORÈME C28.62 (DE LA BASE ORTHONORMÉE INCOMPLÈTE)**

Soient  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien de dimension  $n \geq 2$ ,  $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  et  $(f_1, \dots, f_p) \in E^p$  une famille orthonormée. Il existe  $(f_{p+1}, \dots, f_n) \in E^{n-p}$  tel que  $(f_1, \dots, f_p, f_{p+1}, \dots, f_n)$  est une base orthonormée de  $E$ .

**EXERCICE C28.63** — Soient  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $\varphi \in E^* := \mathcal{L}(E, \mathbf{R})$ . Alors

$$\exists ! a \in E \quad \forall x \in E \quad \varphi(x) = \langle a, x \rangle \quad [\text{théorème de représentabilité de Riesz}]$$

## § 7. PROJECTION SUR UN SOUS-ESPACE VECTORIEL DE DIMENSION FINIE

**NOTATION C28.64** — Dans toute cette partie,  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  désigne un espace préhilbertien et on note  $\|\cdot\|$  la norme associée au produit scalaire. On ne suppose plus  $E$  de dimension finie (i.e.  $E$  n'est pas nécessairement euclidien). En revanche on imposera parfois une hypothèse de finitude sur la dimension de sous-espaces vectoriels considérés.

**PROPOSITION-DÉFINITION C28.65 (PROJETÉ ORTHOGONAL D'UN VECTEUR SUR UN SOUS-ESPACE DE DIMENSION FINIE)**

Soient  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $E$  et  $x \in E$ .

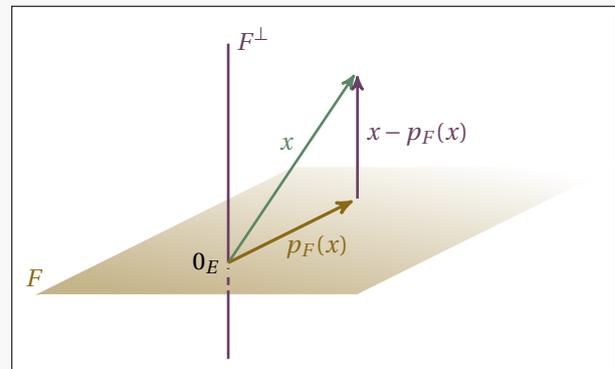
1. Il existe un unique vecteur  $y$  de  $E$  tel que

$$y \in F \quad \text{et} \quad x - y \in F^\perp$$

Ce vecteur  $y$  est noté  $p_F(x)$  et est appelé projeté orthogonal de  $x$  sur  $F$ .

2. Si  $(e_1, \dots, e_p)$  est une base orthonormale de  $F$

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle x, e_i \rangle \cdot e_i$$

**THÉORÈME C28.66 (PROJECTION ORTHOGONALE SUR UN SOUS-ESPACE DE DIMENSION FINIE)**

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $E$ .

1. L'application :

$$p_F \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto p_F(x) \end{array} \right. \text{ qui est l'unique vecteur } y \in F \text{ tel que } x - y \in F^\perp$$

est un projecteur orthogonal, appelé projection orthogonale de  $E$  sur  $F$ .

2.  $\text{Ker}(p_F) = F^\perp$  et  $\text{Im}(p_F) = \text{Ker}(p_F - \text{id}_E) = F$ .
3. Si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base orthonormale de  $F$ , alors

$$p_F \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i \end{array} \right.$$

**PROPOSITION C28.67 (SOMME DIRECTE D'UN SOUS-ESPACE DE DIMENSION FINIE ET DE SON ORTHOGONAL)**

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $E$ .  
Alors  $E = F \oplus F^\perp$ .

Si  $F$  n'est pas de dimension finie,  $F^\perp$  n'est pas nécessairement un supplémentaire de  $F$  dans  $E$ .

Dans l'exercice C28.53, nous avons considéré  $a < b$  deux nombres réels,  $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$  muni de son produit scalaire canonique (cf. C28.9) et  $F$  l'ensemble des fonctions polynomiales sur  $[0, 1]$ , i.e.



$$F := \text{Vect} \left( \left( \begin{array}{c|c} f_n & [a, b] \\ \hline x & \end{array} \right) \begin{array}{l} \longrightarrow \mathbf{R} \\ \longmapsto x^n \end{array} \right)_{n \in \mathbf{N}}$$

Nous démontrerons, l'année prochaine que  $F^\perp = \{0_E\}$ , grâce au théorème d'approximation de Weierstraß. L'identité  $E = F \oplus F^\perp$  livrerait donc  $E = F$ , i.e. que toute fonction continue sur  $[-1, 1]$  est polynomiale, ce qui n'est pas.

**EXERCICE C28.68** — On munit  $\mathbf{R}^3$  de son produit scalaire usuel (C28.6). On pose  $F := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x - 2y + 3z = 0\}$  et  $p_F$  la projection orthogonale de  $\mathbf{R}^3$  sur  $F$ .

1. Démontrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^3$ , en donner une base et préciser sa dimension.
2. Soit  $u = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ . Calculer  $p_F(u)$  en fonction de  $x, y$  et  $z$ .
3. Donner la matrice de  $p_F$  dans la base canonique  $\mathcal{B}_0 = (e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1))$  de  $\mathbf{R}^3$ .

**COROLLAIRE C28.69 (ORTHOGONAL DE L'ORTHOGONAL POUR UN SOUS-ESPACE DE DIMENSION FINIE)**

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $E$ .  
Alors  $(F^\perp)^\perp = F$ .



Si  $F$  n'est pas de dimension finie,  $F$  peut être strictement inclus dans  $(F^\perp)^\perp$ . Cf. C28.5, C28.53 et C28.54.

## § 8. DISTANCE D'UN VECTEUR À UN SOUS-ESPACE VECTORIEL

**NOTATION C28.70** — Dans la suite de cette partie,  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  désigne à présent un espace préhilbertien et on note  $\|\cdot\|$  la norme associée au produit scalaire.

**DÉFINITION C28.71 (DISTANCE D'UN VECTEUR À UNE PARTIE NON VIDE D'UN ESPACE VECTORIEL NORMÉ)**

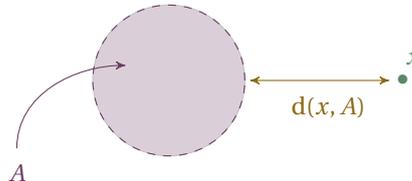
Soient  $A$  une partie non vide de  $E$  et  $x \in E$ . On définit la distance de  $x$  à  $A$  par

$$d(x, A) := \inf_{a \in A} \|x - a\|.$$

**EXEMPLE C28.72** —

Si  $A$  est une partie non vide de  $E$  et  $x \in E$ , alors la distance de  $x$  à  $A$  n'est pas nécessairement atteinte, i.e. il peut n'exister aucun  $a_0 \in A$  tel que

$$\|x - a_0\| = d(x, A).$$



**EXERCICE C28.73** — Si  $A$  est une partie non vide de  $E$  l'application

$$d(\cdot, A) \left| \begin{array}{c|c} (E, \|\cdot\|) & \longrightarrow \mathbf{R}, |\cdot| \\ \hline x & \longmapsto d(x, A) := \inf_{a \in A} \|x - a\| \end{array} \right.$$

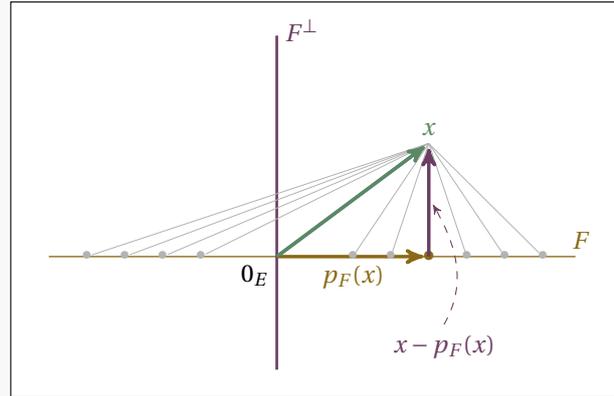
est 1-lipschitzienne, i.e. pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,  $|d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\|$ .

**PROPOSITION C28.74 (DISTANCE D'UN VECTEUR À UN SOUS-ESPACE VECTORIEL DE DIMENSION FINIE)**

Soient  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $E$  et  $x \in E$ .

On note  $p_F: E \longrightarrow E$  la projection orthogonale de  $E$  sur  $F$ .

1.  $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$
2.  $\forall y \in F \quad y \neq p_F(x) \implies \|x - y\| > d(x, F)$
3.  $\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + d(x, F)^2$



**EXERCICE C28.75** — On définit l'application

$$\varphi \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R} \\ (A, B) \longmapsto \text{Tr}(A^\top B) \end{array} \right.$$

qui est un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$  (C28.8). On note :

$$F := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : (a, b) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

1. Démontrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ .
2. Déterminer une base de  $F^\perp$ .
3. Déterminer la projection orthogonale de  $J := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  sur  $F^\perp$ .
4. Quelle est la distance de  $J$  à  $F$ ?