Chapitre n°27
Séries numériques

Notation C27.1 — Dans tout ce chapitre
- $\mathbf{K}$ désigne le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$
- n_0 est un entier naturel.

§ 1. Convergence et divergence d'une série

Définition C27.2 (sommes partielles et série convergente/divergente)
Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite d'éléments de $\mathbf{K}$.

1. La série $\sum u_n$ est dite convergente (resp. divergente) si la suite $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ de terme général
$$S_n := \sum_{k=n_0}^{n} u_k \qquad [n\text{-ième somme partielle}]$$
est convergente (resp. divergente).
2. Si la série $\sum u_n$ est convergente, alors la limite de la suite $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ est appelée somme de la série et est notée $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$, i.e.
$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n := \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n_0}^{n} u_k$$

Remarque C27.3 — Si $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite d'éléments de $\mathbf{K}$, alors
$$\text{la série } \sum u_n \text{ converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{la suite de ses sommes partielles converge}$$

On veillera à ne pas confondre les trois notations suivantes, qui désignent des objets, certes liés, mais différents.

$\sum u_n$	désigne la série de terme général u_n, où $n\geqslant n_0$.
$\sum_{k=n_0}^{n} u_k$	n-ième somme partielle d'indice n de la série $\sum u_n$, où $n\geqslant n_0$.
$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$	désigne la somme de la série $\sum u_n$, uniquement si la série converge.

Exercice C27.4 — Démontrer que la série $\sum \frac{1}{2^n}$ converge et calculer sa somme.

Exercice C27.5 — Démontrer que la série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ converge et calculer sa somme.

Exercice C27.6 — Démontrer que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge et calculer sa somme.

Proposition C27.7 (condition nécessaire, non suffisante, pour qu'une série converge)
Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite d'éléments de $\mathbf{K}$.

$$\sum u_n \text{ converge} \quad \Longrightarrow \quad u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

La réciproque de l'implication de C27.7 est fausse. La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge, bien que $\frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Cf. exercice C27.8.

Exercice C27.8 — Démontrer que

$$\forall\, n \in \mathbf{N}^* \quad \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2}$$

et en déduire que la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Définition C27.9 (série grossièrement divergente)
Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite d'éléments de $\mathbf{K}$.
Si la suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ ne converge pas vers 0 alors la série $\sum u_n$ est dite grossièrement divergente.

Exercice C27.10 — Quelles sont les natures des deux séries suivantes ?

$$\sum \frac{3n+1}{2n+5} \quad \text{et} \quad \sum n \cdot \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$$

Proposition C27.11 (opérations sur les séries convergentes)
Soient $(u_n)_{n \geqslant n_0}$, $(v_n)_{n \geqslant n_0}$ deux suites d'éléments de $\mathbf{K}$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$.

1. $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent $\quad \Longrightarrow \quad \sum \lambda \cdot u_n + \mu \cdot v_n$ converge
2. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda \cdot u_n + \mu \cdot v_n = \lambda \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Exercice C27.12 — On observe que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Pourquoi l'identité suivante n'a-t-elle pas de sens ?

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$$

Exercice C27.13 — Soient $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n \geqslant n_0}$ deux suites d'éléments de $\mathbf{K}$. On suppose que la série $\sum u_n$ converge et que la série $\sum v_n$ diverge. Que dire de la nature de la série $\sum u_n + v_n$?

Théorème C27.14 (série géométrique)
Soit $q \in \mathbf{K}$.

1. $\sum q^n$ converge $\quad \Longleftrightarrow \quad |q| < 1$
2. Si $|q| < 1$, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Exercice C27.15 — Justifier que la série de terme général $\sum \frac{2}{3^n} - \frac{3}{2^n}$ converge et calculer sa somme.

DÉFINITION C27.16 (RESTE D'UNE SÉRIE CONVERGENTE)
Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite d'éléments de $\mathbf{K}$ telle que la série u_n converge.
Pour tout $n \geqslant n_0$, le reste d'ordre n de la série $\sum u_n$ est défini par

$$R_n := \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{N} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k\,.$$

EXERCICE C27.17 — Soit q un nombre complexe tel que $|q|<1$. Calculer, pour tout $n\in\mathbf{N}$, le reste d'ordre n de la série géométrique $\sum q^n$.

PROPOSITION C27.18 (LA SUITE DES RESTES D'UNE SÉRIE CONVERGENTE CONVERGE VERS 0)
Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite d'éléments de $\mathbf{K}$ telle que la série $\sum u_n$ converge. Alors

$$R_n := \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

PROPOSITION C27.19 (D'UNE SUITE À UNE SÉRIE)
Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite d'éléments de $\mathbf{K}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ la suite de terme général $v_n = u_{n+1}-u_n$.

1. $\sum v_n$ converge $\iff$ $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ converge
2. Dans le cas où il y a convergence

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} u_n - u_{n_0}$$

REMARQUE C27.20 — D'après C27.19, l'étude de la convergence d'une suite peut se ramener à l'étude de la convergence d'une série.

THÉORÈME C27.21 (DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE DE L'EXPONENTIELLE D'UN NOMBRE COMPLEXE)
Soit $z\in\mathbf{C}$. La série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z)$$

§ 2. SÉRIES À TERMES RÉELS POSITIFS

THÉORÈME C27.22 (CNS DE CONVERGENCE POUR LES SÉRIES À TERMES RÉELS POSITIFS)
Soient $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de réels positifs et $\left(S_n := \sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\geqslant n_0}$ la suite des sommes partielles.

1. $\sum u_n$ converge $\iff$ $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est majorée
2. Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup_{n\in\mathbf{N}} S_n$.
3. Si $\sum u_n$ diverge, alors $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

EXEMPLE C27.23 — Démontrer que

$$\forall\, n\geqslant 2 \quad \frac{1}{n^2} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

et en déduire la nature de la série $\sum \frac{1}{n^2}$.

Corollaire C27.24 (Théorème de domination pour les séries à termes réels positifs)
Soient $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n \geqslant n_0}$ deux suites de réels positifs telles que

$$\forall\, n \geqslant n_0 \qquad u_n \leqslant v_n \qquad [\text{hypothèse de domination}]$$

1. $\sum v_n$ converge $\quad \Longrightarrow \quad \sum u_n$ converge
2. $\sum u_n$ diverge $\quad \Longrightarrow \quad \sum v_n$ diverge

Remarque C27.25 — Le théorème de domination C27.24 reste vrai si l'hypothèse de domination n'est satisfaite qu'à partir d'un certain rang.

L'hypothèse sur les signes dans C27.24 est essentielle. En effet

$$\forall\, n \in \mathbf{N}^* \qquad -\frac{n}{n+1} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, mais la série $\sum -\frac{n}{n+1}$ diverge (grossièrement).

Exercice C27.26 — On se place dans le contexte du théorème de domination C27.24 et on suppose que la série $\sum v_n$ converge. Alors $\sum u_n$ converge également. Que dire des sommes $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$?

Exercice C27.27 — Déterminer la nature des séries suivantes.

$$\sum \frac{1}{n^2+n+1} \qquad \sum \frac{1-\sin(n)}{2^n} \qquad \sum \frac{1}{n^2 \ln(n)} \qquad \sum \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \sum \frac{n}{3^n} \qquad \sum \frac{1}{n \cdot \cos^2(n)}$$

Exercice C27.28 — Soit $x \in [0,1[$. On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$

$$a_n(x) := \lfloor 10^n \cdot x \rfloor - 10 \cdot \lfloor 10^{n-1} \cdot x \rfloor$$

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $a_n(x) \in [\![0,9]\!]$.
2. Justifier que la série $\sum \frac{a_n(x)}{10^n}$ converge et que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n(x)}{10^n} = x$$
3. Que dire de x si la suite $(a_n(x))_{n \in \mathbf{N}^*}$ est périodique ?
4. Justifier que l'application
$$f \left| \begin{array}{ccc} [\![0,9]\!]^{\mathbf{N}^*} & \longrightarrow & [0,1] \\ (a_n)_{n \in \mathbf{N}^*} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} \end{array} \right.$$
est bien définie et surjective. Est-elle injective ?
5. Généraliser ces résultats établis pour la base 10, à une base b quelconque où $b \geqslant 2$.

Théorème C27.29 (Séries à termes réels positifs dont les termes généraux sont équivalents)
Soient $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n \geqslant n_0}$ deux suites de nombres réels. On suppose que
(H1) $v_n \geqslant 0$ à partir d'un certain rang
(H2) $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$
Alors
(C1) $u_n > 0$ à partir d'un certain rang
(C2) les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

L'hypothèse sur les signes dans C27.29 est essentielle. Par exemple, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, posons

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

La série $\sum v_n$ converge (cf. critère des séries alternées), la série $\sum u_n$ diverge, mais pourtant $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

EXERCICE C27.30 — Déterminer la nature des séries

$$\sum \frac{n+2^n}{\sqrt{n}+3^n} \qquad \sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) \qquad \sum \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

EXERCICE C27.31 — On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$

$$u_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge. La série $\sum u_n$ converge-t-elle ?
2. On pose $\ell := \lim u_n$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$
$$v_n := u_n - \ell$$
Étudier la nature de la série de terme général $\sum v_n$.

§ 3. COMPARAISON SÉRIE-INTÉGRALE

LEMME C27.32 (CLÉ POUR LA COMPARAISON SÉRIE-INTÉGRALE)
Soit $f\colon [n_0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue par morceaux.

1. Si f est croissante sur $[n_0, +\infty[$ alors
   (a) $\forall\, k \geqslant n_0+1 \quad \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k) \leqslant \int_{k}^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t$
   (b) $\forall\, n \geqslant n_0 \quad f(n_0) + \displaystyle\int_{n_0}^{n-1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \leqslant \int_{n_0}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$
2. Si f est décroissante sur $[n_0, +\infty[$ alors
   (a) $\forall\, k \geqslant n_0+1 \quad \displaystyle\int_{k}^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$
   (b) $\forall\, n \geqslant n_0 \quad \displaystyle\int_{n_0}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \leqslant f(n_0) + \int_{n_0}^{n-1} f(t)\,\mathrm{d}t$

THÉORÈME C27.33 (SÉRIE DE RIEMANN)
Soit $\alpha \in \mathbf{R}$.

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1$$

EXERCICE C27.34 — Déterminer la nature des séries suivantes.

$$\sum \frac{3n^2+5n}{8n^3+4} \qquad \sum \frac{n+\cos(n)}{n^3+1} \qquad \sum \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$$

EXERCICE C27.35 — Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice C27.36 — Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice C27.37 — Donner un équivalent de $\ln(n!)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

§ 4. Convergence absolue

Définition C27.38 (Série absolument convergente)
Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite d'éléments de $\mathbf{K}$. La série $\sum u_n$ est dite absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Théorème C27.39 (Une série absolument convergente est convergente)
Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite d'éléments de $\mathbf{K}$.

$$\sum u_n \text{ converge absolument} \quad \Longrightarrow \quad \sum u_n \text{ converge.}$$

La réciproque de l'implication de C27.39 est fausse. En effet, la série harmonique alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, mais non absolument convergente (une telle série est dite semi-convergente).

Exercice C27.40 — Déterminer la nature des séries suivantes.

$$\sum \frac{(-1)^n}{2^n + \sqrt{n}} \qquad \sum \frac{e^{in\theta}}{n^2} \ [\theta \in \mathbf{R}] \qquad \sum \frac{\cos(n)}{n \cdot \ln^2(n)}$$

Exercice C27.41 — Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. Démontrer que la série de terme général

$$u_n := \frac{1}{n} \cdot \int_0^1 t^n \cdot f(t)\, \mathrm{d}t$$

est convergente.

Exercice C27.42 — Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\sum \frac{x^n}{n} \qquad \sum \frac{x^n}{n^2} \qquad \sum \frac{n^2}{n!} \cdot x^n$$

Théorème C27.43 (Critère de convergence absolue avec un O)
Soient $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite d'éléments de $\mathbf{K}$ et $(v_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite de nombres réels positifs. On suppose que
(H1) $u_n \underset{n \to +\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$
(H2) la série $\sum v_n$ converge.
Alors la série $\sum u_n$ converge.

Remarque C27.44 — Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite d'éléments de $\mathbf{K}$. On suppose qu'il existe $\alpha > 1$ tel que

$$n^\alpha \cdot u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Démontrer que la série $\sum u_n$ converge. Il s'agit de « la règle n^α ».

Exercice C27.45 — Étudier la nature des séries

$$\sum \frac{\cos(n^2\pi)}{n^2 \cdot \ln(n)} \qquad \sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \qquad \sum \frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}$$

§ 5. Séries alternées

Théorème C27.46 (critère des séries alternées)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels telle que

(H1) $\forall n \in \mathbf{N} \quad u_n \cdot u_{n+1} \leqslant 0$

(H2) la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante

(H3) $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Alors

(C1) la série $\sum u_n$ converge

(C2) si $u_{n+1} < 0$ alors

$$S_{n+1} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leqslant S_n \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} \leqslant R_n \leqslant 0$$

(C3) si $u_{n+1} > 0$ alors

$$S_n \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leqslant S_{n+1} \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant R_n \leqslant u_{n+1}$$

où $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Remarque C27.47 — Nous pouvons reformuler le théorème C27.46 comme suit. Si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels vérifiant les hypothèses (H1), (H2), (H3) alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$

1. $R_n := \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ a le signe de u_{n+1}
2. $|R_n| := \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \right| \leqslant |u_{n+1}|$

On dit parfois que le reste d'ordre n (R_n), a le signe de son premier terme (u_{n+1}) et que sa valeur absolue est majorée par la valeur absolue de son premier terme.

L'hypothèse (H2) dans C27.46 est essentielle. En effet, la série de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$$

vérifie (H1) et (H3), mais pas (H2) et la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice C27.48 — Déterminer la nature des séries

$$\sum \frac{(-1)^n}{n+1} \qquad u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \qquad u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)$$