Chapitre n°26
Groupe symétrique et déterminant

Notation C26.1 — Dans tout ce chapitre, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathbf{K}$ est un sous-corps de $\mathbf{C}$.

§ 1. Généralités sur le groupe symétrique

Définition C26.2 (Groupe des permutations de $[\![1,n]\!]$)
Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

1. Une permutation de l'ensemble $[\![1,n]\!]$ est une bijection de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.
2. L'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$ est noté S_n, i.e.
$$S_n := \left\{\sigma \in [\![1,n]\!]^{[\![1,n]\!]} \ : \ \sigma \text{ est bijective}\right\}$$
3. L'ensemble S_n est fini de cardinal $n!$.
4. La composition $\circ$ d'applications induit une loi de composition interne sur S_n, i.e. pour tout $(\sigma_1, \sigma_2) \in S_n^2$, $\sigma_1 \circ \sigma_2$ est une application de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$, qui est bijective.
5. L'ensemble S_n muni de la loi de composition interne $\circ$ est un groupe, dont le neutre est
$$\mathrm{id}_{[\![1,n]\!]} \left| \begin{array}{ccc} [\![1,n]\!] & \longrightarrow & [\![1,n]\!] \\ k & \longmapsto & k \end{array} \right.$$

Exercice C26.3 — L'objectif de cet exercice est de démontrer que tout groupe fini de cardinal n est isomorphe à un sous-groupe de $(S_n, \circ)$.

1. Soient $(H,*)$ un groupe fini dont le cardinal est noté n et $f : [\![1,n]\!] \xrightarrow{\sim} H$ une bijection. Démontrer que l'application
$$\tau \left| \begin{array}{ccc} (H,*) & \longrightarrow & (S_n,\circ) \\ h & \longmapsto & \tau(h) \left| \begin{array}{ccc} [\![1,n]\!] & \longrightarrow & [\![1,n]\!] \\ k & \longmapsto & f^{-1}\left(h * f(k)\right) \end{array} \right. \end{array} \right.$$
est un morphisme de groupes.
2. Démontrer que τ est injective et conclure.

Notation C26.4 — Une permutation σ de $[\![1,n]\!]$ sera parfois notée
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) & \dots & \sigma(n-1) & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Exemple C26.5 — Les $6 = 3!$ éléments de S_3 sont les permutations listées ci-dessous.
$$\mathrm{id}_{[\![1,3]\!]} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad (1\ 2) := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad (1\ 3) := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$(2\ 3) := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad (1\ 2\ 3) := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1\ 3\ 2) := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice C26.6 — Dans S_3, calculer $(1\ 2) \circ (2\ 3)$ et $(1\ 2\ 3)^3$.

Exercice C26.7 — Donner les $24 = 4!$ éléments de S_4.

DÉFINITION C26.8 (SUPPORT D'UNE PERMUTATION)
Soit $\sigma \in S_n$. Le support de σ, noté $\mathrm{supp}(\sigma)$, est l'ensemble des points de $[\![1,n]\!]$ qui ne sont pas fixés par σ, i.e.

$$\mathrm{supp}(\sigma) := \{k \in [\![1,n]\!] \ : \ \sigma(k) \neq k\}$$

EXEMPLE C26.9 — Dans S_8, l'élément

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 7 & 6 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

a pour support $\mathrm{supp}(\sigma) = \{1,3,4,5,7,8\}$.

EXERCICE C26.10 — Soit σ une permutation de $[\![1,n]\!]$. Démontrer que

$$\mathrm{Card}\left(\mathrm{supp}(\sigma)\right) \neq 1$$

LEMME C26.11 (DEUX PERMUTATIONS À SUPPORTS DISJOINTS COMMUTENT)
Soient σ_1 et σ_2 deux permutations de $[\![1,n]\!]$ telles que $\mathrm{supp}(\sigma_1) \cap \mathrm{supp}(\sigma_2) = \emptyset$.

1. Les permutations σ_1 et σ_2 commutent dans $(S_n, \circ)$.
2. Le support de la permutation $\sigma_1 \circ \sigma_2$ est donné par

$$\mathrm{supp}(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \mathrm{supp}(\sigma_1) \sqcup \mathrm{supp}(\sigma_2)$$

PROPOSITION-DÉFINITION C26.12 (ORDRE D'UN ÉLÉMENT DU GROUPE $(S_n, \circ)$)
Soit $\sigma \in S_n$. Alors

$$\exists\, k \in [\![1,n!]\!] \quad \sigma^k = \mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}$$

L'ordre de σ, noté $\mathrm{ord}(\sigma)$, est le plus petit entier naturel non nul k tel que $\sigma^k = \mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}$, i.e.

$$\mathrm{ord}(\sigma) := \min\left\{k \in \mathbf{N}^* \ : \ \sigma^k = \mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}\right\}$$

EXERCICE C26.13 — Calculer l'ordre dans $(S_5, \circ)$ de

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

EXERCICE C26.14 — Soit $\sigma \in S_n$. Justifier que $\mathrm{ord}(\sigma) \leqslant n!$ et démontrer que

$$\forall\, k \in \mathbf{N}^* \quad \sigma^k = \mathrm{id}_{[\![1,n]\!]} \implies \mathrm{ord}(\sigma) \text{ divise } k$$

RAPPEL C26.15 — Si a et b sont des entiers naturels non nuls, $a \wedge b$ le plus grand commun diviseur de a et b et $a \vee b$ le plus petit commun multiple de a et b

LEMME C26.16 (ORDRE D'UN PRODUIT DE PERMUTATIONS À SUPPORTS DISJOINTS)
Soient σ_1 et σ_2 deux permutations de $[\![1,n]\!]$ à supports disjoints. Alors

$$\mathrm{ord}(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \mathrm{ord}(\sigma_1) \vee \mathrm{ord}(\sigma_2)$$

Démonstration — Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Nous observons

(a) $\mathrm{supp}\left(\sigma_1^k\right) \subset \mathrm{supp}(\sigma_1)$
(b) $\mathrm{supp}\left(\sigma_2^k\right) \subset \mathrm{supp}(\sigma_2)$
(c) $\mathrm{supp}\left(\sigma_1^k\right) \cap \mathrm{supp}\left(\sigma_2^k\right) = \emptyset$ (conséquence de (a) et (b))
(d) $(\sigma_1 \circ \sigma_2)^k = \sigma_1^k \circ \sigma_2^k$ (conséquence de $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_1$, cf. C26.11).

Ainsi

$$\begin{aligned}
(\sigma_1 \circ \sigma_2)^k = \mathrm{id}_{[\![1,n]\!]} & \iff \sigma_1^k \circ \sigma_2^k = \mathrm{id}_{[\![1,n]\!]} \qquad [(\mathrm{d})] \\
& \iff \sigma_1^k = \mathrm{id}_{[\![1,n]\!]} \text{ et } \sigma_2^k = \mathrm{id}_{[\![1,n]\!]} \qquad [(\mathrm{c})] \\
& \iff k \text{ est un multiple de } \mathrm{ord}(\sigma_1) \text{ et } k \text{ est un multiple de } \mathrm{ord}(\sigma_2) \\
& \iff k \text{ est un multiple commun de } \mathrm{ord}(\sigma_1) \text{ et } \mathrm{ord}(\sigma_2)
\end{aligned}$$

donc, par définition même de l'ordre d'une permutation de $(S_n, \circ)$, $\mathrm{ord}(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \mathrm{ord}(\sigma_1) \vee \mathrm{ord}(\sigma_2)$.

Remarque C26.17 — Soit σ_1 et σ_2 deux permutations de $[\![1,n]\!]$ qui commutent (condition plus faible que de demander aux supports d'être disjoints).

1. Si $\mathrm{ord}(\sigma_1) \wedge \mathrm{ord}(\sigma_2) = 1$, alors on peut démontrer que $\mathrm{ord}(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \mathrm{ord}(\sigma_1) \vee \mathrm{ord}(\sigma_2)$.
2. En revanche, si les ordres de σ_1 et σ_2 ne sont pas premiers entre eux, alors il n'est pas nécessairement vrai que $\mathrm{ord}(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \mathrm{ord}(\sigma_1) \vee \mathrm{ord}(\sigma_2)$. En effet

$$1 = \mathrm{ord}\left(\mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}\right) = \mathrm{ord}((1\ 2) \circ (1\ 2)) \neq \mathrm{ord}((1\ 2)) \vee \mathrm{ord}((1\ 2)) = 2$$

Exercice C26.18 — Dans S_7, on considère les deux éléments

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Calculer $\mathrm{ord}(\sigma_1 \circ \sigma_2)$.

Définition C26.19 (cycle)
Soient
- $p \in [\![2,n]\!]$
- $a_1, a_2, \dots, a_p$ des éléments deux-à-deux distincts de $[\![1,n]\!]$.

Le cycle $(a_1\ a_2\ \dots\ a_p)$ est la permutation de $[\![1,n]\!]$ qui
- permute circulairement les éléments $a_1, a_2, \dots, a_p$ de gauche à droite
- laisse éléments de $[\![1,n]\!] \setminus \{a_1, \dots, a_p\}$ invariants

i.e.

$$(a_1\ a_2\ \dots\ a_p) \left| \begin{array}{ccc} [\![1,n]\!] & \longrightarrow & [\![1,n]\!] \\ k & \longmapsto & \begin{cases} a_{i+1} & \text{s'il existe } i \in [\![1,p-1]\!] \text{ tel que } k = a_i \\ a_1 & \text{si } k = a_p \\ k & \text{si } k \notin \{a_1, \dots, a_p\} \end{cases} \end{array} \right.$$

Le support du cycle $(a_1\ a_2\ \dots\ a_p)$ est donc $\mathrm{supp}\left((a_1\ a_2\ \dots\ a_p)\right) = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$.

Exercice C26.20 — Soit $p \in [\![2,n]\!]$. Dénombrer les cycles de longueur p de S_n.

Proposition C26.21 (inverse, puissances et ordre d'un cycle)
Soient
- $p \in [\![2,n]\!]$
- $a_1, a_2, \dots, a_p$ des éléments deux-à-deux distincts de $[\![1,n]\!]$.

On définit l'application r_p par

$$r_p \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & [\![0,p-1]\!] \\ k & \longmapsto & \text{reste de la division euclidienne de } k \text{ par } p \end{array} \right.$$

1. L'inverse $(a_1\ a_2\ \dots\ a_p)$ est $(a_1\ a_2\ \dots\ a_p)^{-1} = (a_p\ a_{p-1}\ a_{p-2}\ \dots\ a_3\ a_2\ a_1)$.
2. Les puissances du cycle $(a_1\ a_2\ \dots\ a_p)$ sont données par

$$\forall\, i \in [\![1,p]\!] \quad \forall\, k \in \mathbf{N} \quad \sigma^k(a_i) = a_{1+r_p(k+i-1)}$$

3. L'ordre du cycle $(a_1\ a_2\ \dots\ a_p)$ est p, i.e. $\mathrm{ord}\left((a_1\ a_2\ \dots\ a_p)\right) = p$.

Exercice C26.22 — Dans $(S_9, \circ)$, on considère

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 5 & 4 & 1 & 8 & 7 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Justifier que $\mathrm{Card}\left(\mathrm{supp}(\sigma)\right) = 7$.
2. Calculer les images itérées de 1 par σ et en déduire un cycle c_1 tel que $\mathrm{Card}\left(\mathrm{supp}(c_1 \circ \sigma)\right) = 4$.
3. Calculer les images itérées de 2 par σ et en déduire un cycle c_2 tel que $\mathrm{Card}\left(\mathrm{supp}(c_2 \circ c_1 \circ \sigma)\right) = 0$.
4. En déduire une décomposition de σ comme produit de cycles à supports disjoints.

Théorème C26.23 (Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints)
Soit $\sigma \in S_n \setminus \{\mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}\}$.

1. Il existe $r \in \mathbf{N}^*$ et des cycles $c_1, \ldots, c_r$ à supports deux-à-deux disjoints de S_n tels que

$$\sigma = c_1 \circ c_2 \circ \ldots \circ c_r$$

2. La décomposition donnée en 1 est unique à l'ordre près, i.e. si $(r,s) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$, $c_1, \ldots, c_r$ sont des cycles à supports deux-à-deux disjoints de S_n, et $d_1, \ldots, d_s$ sont des cycles à supports deux-à-deux disjoints de S_n tels que

$$c_1 \circ c_2 \circ \ldots \circ c_r = d_1 \circ d_2 \circ \ldots \circ d_s$$

alors $r = s$ et il existe une bijection $f : [\![1,r]\!] \xrightarrow{\sim} [\![1,s]\!]$ telle que, pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, $d_i = c_{f(i)}$.

Démonstration — • Existence On raisonne par récurrence forte sur le cardinal du support de σ.

— Initialisation. Soit $\sigma \in S_n$ tel que $\mathrm{Card}\left(\mathrm{supp}(\sigma)\right) = 2$. Si nous notons i et j les deux éléments distincts de $\mathrm{supp}(\sigma)$, alors $\sigma = (i\ j)$ et l'assertion est démontrer.

— Hérédité. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$ tel que, pour tout $\tau \in S_n$ vérifiant $\mathrm{Card}\left(\mathrm{supp}(\tau)\right) \in [\![2,k]\!]$, il existe $r \in \mathbf{N}^*$ et des cycles $c_1, \ldots, c_r$ à supports deux-à-deux disjoints de S_n tels que

$$\tau = c_1 \circ c_2 \circ \ldots \circ c_r$$

Considérons une permutation $\sigma \in S_n$ tel que $\mathrm{Card}\left(\mathrm{supp}(\sigma)\right) = k+1$. Fixons un élément i et $\mathrm{supp}(\sigma)$ et notons m le plus petit entier naturel non nul tel que

$$\sigma^m(i) = i$$

Comme $\sigma(i) \neq i$, $m \geqslant 2$ et aucun des éléments

$$i \quad , \quad \sigma(i) \quad , \quad \ldots \quad , \quad \sigma^{m-1}(i)$$

n'appartient au support de σ. De plus, le caractère minimal de m entraîne que les éléments

$$i \quad , \quad \sigma(i) \quad , \quad \ldots \quad , \quad \sigma^{m-1}(i)$$

sont deux-à-deux distincts. Si nous posons

$$c = \left(i\ \sigma(i)\ \ldots\ \sigma^{m-1}(i)\right) \qquad [\text{cycle de longueur } m]$$

Alors

$$\tau := c^{-1} \circ \sigma$$

est une permutation de S_n dont le support vérifie

$$\mathrm{supp}(\tau) = \mathrm{supp}(\sigma) \setminus \left\{i, \sigma(i), \ldots, \sigma^{m-1}(i)\right\}$$

Nous en déduisons que

$$\mathrm{Card}\left(\mathrm{supp}(\tau)\right) = k+1-m \leqslant k-1$$

Si $\mathrm{Card}\left(\mathrm{supp}(\tau)\right) = 0$, alors $\tau = \mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}$ et donc $\sigma = c$. Sinon, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe $r \in \mathbf{N}^*$ et des cycles $c_1, \ldots, c_r$ à supports deux-à-deux disjoints de S_n tels que

$$c^{-1} \circ \sigma =: \tau = c_1 \circ c_2 \circ \ldots \circ c_r$$

Ainsi

$$\sigma = c \circ c_1 \circ c_2 \circ \ldots \circ c_r$$

Comme

$$\emptyset = \operatorname{supp}(c) \cap \operatorname{supp}(\tau) = \operatorname{supp}(c) \cap \left(\bigsqcup_{i=1}^{r} \operatorname{supp}(c_i) \right) = \bigsqcup_{i=1}^{r} \left(\operatorname{supp}(c) \cap \operatorname{supp}(c_i) \right)$$

les supports de $c, c_1, \ldots, c_r$ sont deux-à-deux disjoints.

Exercice C26.24 — Dans $(S_7, \circ)$, on considère

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints, puis calculer $\operatorname{ord}(\sigma)$ et σ^{2023}.

Exercice C26.25 — Dans $(S_9, \circ)$, on considère

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 9 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints, puis calculer $\operatorname{ord}(\sigma)$ et σ^{100}.

§ 2. Signature d'une permutation

Définition C26.26 (transposition)
Soient i et j deux éléments distincts de $[\![1,n]\!]$. La transposition de i et j est le cycle $(i\ j)$ de longueur 2, i.e.

$$(i\ j) \left| \begin{array}{ccc} [\![1,n]\!] & \longrightarrow & [\![1,n]\!] \\ k & \longmapsto & \begin{cases} j & \text{si } k = i \\ i & \text{si } k = j \\ k & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

La transposition $(i\ j)$ est une involution : $(i\ j)^{-1} = (i\ j)$.

Exercice C26.27 — Soient i_1, j_1 deux éléments distincts de $[\![1,n]\!]$ et i_2, j_2 deux éléments distincts de $[\![1,n]\!]$. Déterminer une CNS pour que les transpositions σ_1 et σ_2 commutent.

Exercice C26.28 — Justifier que $(S_2, \circ)$ est un groupe abélien puis que, pour tout $n \geqslant 3$, le groupe $(S_n, \circ)$ est un groupe anabélien.

Proposition C26.29 (décomposition d'un cycle en produit de transpositions)
Soient
- $p \in [\![2,n]\!]$
- $a_1, a_2, \ldots, a_p$ des éléments deux-à-deux distincts de $[\![1,n]\!]$.

Alors

$$(a_1\ a_2\ \ldots\ a_p) = (a_1\ a_2) \circ (a_2\ a_3) \circ (a_3\ a_4) \circ \ldots (a_{p-2}\ a_{p-1}) \circ (a_{p-1}\ a_p) \qquad [\text{produit de } p-1 \text{ transpositions}]$$

Exercice C26.30 — Dans S_6, décomposer le cycle

$$c = (3\,6\,1\,5)$$

en produit de transpositions.

Proposition C26.31 (les transpositions engendrent le groupe $(S_n, \circ)$)
Pour tout $\sigma \in S_n$, il existe $r \in \mathbf{N}^*$ et des transpositions $\tau_1, \dots, \tau_r$ de $[\![1, n]\!]$ tels que

$$\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \tau_r \qquad [\text{décomposition non unique}]$$

Définition C26.32 (inversions d'une permutation et nombre d'icelles)
Soit σ une permutation de $[\![1, n]\!]$.

1. Un couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i < j$ est une inversion de σ si $\sigma(i) > \sigma(j)$.
2. Le nombre d'inversions d'une permutation est noté $I(\sigma)$.

Exercice C26.33 — Soit

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 10 & 7 & 1 & 2 & 6 & 4 & 5 & 12 & 8 & 9 & 11 \end{pmatrix} \in S_{12}$$

Quel est le nombre d'inversions $I(\sigma)$ de σ ?

Proposition C26.34 (nombre d'inversions d'une transposition)
Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]$ tel que $i < j$. Alors
$$I((i\ j)) = 2 \cdot (j - i) - 1$$

Démonstration — Posons $\tau = (i\ j)$.

(a) Soient $k \in [\![1, i-1]\!]$ et $\ell > k$. Alors

$$\tau(k) = k \quad \text{et} \quad \tau(\ell) = \begin{cases} \ell > k & \text{si } \ell \neq i \text{ et } \ell \neq j \\ j > k & \text{si } \ell = i \\ i > k & \text{si } \ell = j \end{cases}$$

Donc il n'y a aucune inversion de τ dont la première composante est k.

(b) Soient $k = i$ et $\ell > k$. Alors
$$\tau(k) = j \quad \text{et} \quad \tau(\ell) = \begin{cases} \ell < j & \text{si } \ell \in [\![i+1, j-1]\!] \\ i < j & \text{si } \ell = j \\ \ell > j & \text{si } \ell \geqslant j+1 \end{cases}$$

Donc il y a $(j - i)$ inversions de τ dont la première composante est i.

(c) Soient $k \in [\![i+1, j-1]\!]$ et $\ell > k$. Alors

$$\tau(k) = k \quad \text{et} \quad \tau(\ell) = \begin{cases} \ell > k & \text{si } \ell \neq j \\ i < k & \text{si } \ell = j \end{cases}$$

Donc il y a 1 inversions de τ dont la première composante est k.

(d) Soient $k = j$ et $\ell > k$. Alors
$$\tau(k) = i \quad \text{et} \quad \tau(\ell) = \ell > i$$

Donc il n'y a aucune inversion de τ dont la première composante est k.

(e) Soient $k > j$ et $\ell > k$. Alors
$$\tau(k) = k \quad \text{et} \quad \tau(\ell) = \ell > k$$

Donc il n'y a aucune inversion de τ dont la première composante est k.

De (a), (b), (c), (d) et (e), nous déduisons que

$$I(\tau) = (j - i) + \operatorname{Card}\left([\![i+1, j-1]\!]\right) \cdot 1 = 2 \cdot (j - i) - 1$$

Lemme C26.35 (une identité clé pour la signature)
Soit $\sigma \in S_n$. On note
$$T^+ := \left\{(i, j) \in [\![1, n]\!] \ :\ i < j\right\} \quad \text{et} \quad \mathscr{P}_2 := \{A \in \mathscr{P}([\![1, n]\!]) \ :\ \operatorname{Card}(A) = 2\}$$

Alors
$$(-1)^{I(\sigma)} \underset{(a)}{=} \prod_{(i,j) \in T^+} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{|\sigma(j) - \sigma(i)|} \underset{(b)}{=} \prod_{A \in \mathscr{P}_2} \frac{\sigma(\max A) - \sigma(\min A)}{\max A - \min(A)}$$

Démonstration — L'identité (a) est claire. Établissons l'identité (b).
Remarquons tout d'abord que l'application

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}_2 & \longrightarrow & T^+ \\ A & \longmapsto & (\min A, \max A) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \psi \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}_2 & \longrightarrow & \mathscr{P}_2 \\ A & \longmapsto & \sigma^{-1}(A) \end{array} \right.$$

sont bijectives. Nous calculons

$$\begin{aligned}
\prod_{(i,j)\in T^+} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{|\sigma(j)-\sigma(i)|} &= \prod_{A\in\mathscr{P}_2} \frac{\sigma(\max A)-\sigma(\min A)}{|\sigma(\max A)-\sigma(\min A)|} && [\text{changement d'indice } \varphi] \\
&= \frac{\prod_{A\in\mathscr{P}_2} (\sigma(\max A)-\sigma(\min A))}{\prod_{A\in\mathscr{P}_2} |\sigma(\max A)-\sigma(\min A)|} \\
&= \frac{\prod_{A\in\mathscr{P}_2} (\sigma(\max A)-\sigma(\min A))}{\prod_{A\in\mathscr{P}_2} (\max\sigma(A)-\min\sigma(A))} && [\text{si } A\in\mathscr{P}_2,\ |\sigma(\max A)-\sigma(\min A)| = \max\sigma(A)-\min\sigma(A)\ ] \\
&= \frac{\prod_{A\in\mathscr{P}_2} (\sigma(\max A)-\sigma(\min A))}{\prod_{A\in\mathscr{P}_2} (\max A-\min A)} && [\text{changement d'indice } \psi \text{ au dénominateur}] \\
&= \prod_{A\in\mathscr{P}_2} \frac{\sigma(\max A)-\sigma(\min A)}{\max A-\min(A)}
\end{aligned}$$

THÉORÈME C26.36 (MORPHISME SIGNATURE)
L'application

$$\varepsilon \left| \begin{array}{ccc} (S_n,\circ) & \longrightarrow & (\{-1,1\},\times) \\ \sigma & \longmapsto & (-1)^{I(\sigma)} \end{array} \right.$$

appelée signature, est l'unique morphisme de groupes de $(S_n,\circ)$ vers $(\{-1,1\},\times)$ qui prend la valeur -1 sur les transpositions.

Démonstration — • Unicité — Soient ε_1 et ε_2 deux morphismes de groupes de $(S_n,\circ)$ vers $(\{-1,1\},\times)$ qui prennent la valeur -1 sur les transpositions.
Soit $\sigma \in S_n$. D'après C26.31, il existe $r \in \mathbf{N}^*$ et des transpositions $\tau_1,\ldots,\tau_r$ telles que $\sigma = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_r$. Ainsi

$$\varepsilon_1(\sigma) = \varepsilon_1(\tau_1)\times\ldots\times\varepsilon_1(\tau_r) = (-1)^r \quad \text{et} \quad \varepsilon_2(\sigma) = \varepsilon_2(\tau_1)\times\ldots\times\varepsilon_2(\tau_r) = (-1)^r$$

• Morphisme de groupes — Soient σ_1 et σ_2 deux permutations de $[\![1,n]\!]$.

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\sigma_1\circ\sigma_2) &= \prod_{A\in\mathscr{P}_2} \frac{\sigma_1(\sigma_2(\max A))-\sigma_1(\sigma_2(\min A))}{\max A-\min(A)} && [\text{C26.35}] \\
&= \left(\prod_{A\in\mathscr{P}_2} \frac{\sigma_1(\sigma_2(\max A))-\sigma_1(\sigma_2(\min A))}{\sigma_2(\max A)-\sigma_2(\min(A))}\right) \times \left(\prod_{A\in\mathscr{P}_2} \frac{\sigma_2(\max A)-\sigma_2(\min(A))}{\max A-\min(A)}\right) \\
&= \left(\prod_{A\in\mathscr{P}_2} \frac{\sigma_1(\sigma_2(\max A))-\sigma_1(\sigma_2(\min A))}{\sigma_2(\max A)-\sigma_2(\min(A))}\right) \times \varepsilon_2(\sigma) && [\text{C26.35}]
\end{aligned}$$

Il reste à démontrer que

$$\prod_{A\in\mathscr{P}_2} \frac{\sigma_1(\sigma_2(\max A))-\sigma_1(\sigma_2(\min A))}{\sigma_2(\max A)-\sigma_2(\min(A))} = \varepsilon_1(\sigma)$$

Comme, pour tout $A \in \mathscr{P}_2$

$$\frac{\sigma_1(\sigma_2(\max A)) - \sigma_1(\sigma_2(\min A))}{\sigma_2(\max A) - \sigma_2(\min(A))} = \frac{\sigma_1(\max \sigma_2(A)) - \sigma_1(\min \sigma_2(A))}{\max \sigma_2(A) - \min \sigma_2(A)} \qquad \left[\text{si } a \text{ et } b \text{ sont des entiers non nuls alors } \frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}\right]$$

et l'application

$$\psi \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}_2 & \longrightarrow & \mathscr{P}_2 \\ A & \longmapsto & \sigma_2^{-1}(A) \end{array} \right.$$

est bijective, il vient

$$\prod_{A \in \mathscr{P}_2} \frac{\sigma_1(\sigma_2(\max A)) - \sigma_1(\sigma_2(\min A))}{\sigma_2(\max A) - \sigma_2(\min(A))} = \prod_{A \in \mathscr{P}_2} \frac{\sigma_1(\max \sigma_2(A)) - \sigma_1(\min \sigma_2(A))}{\max \sigma_2(A) - \min \sigma_2(A)} = \prod_{A \in \mathscr{P}_2} \frac{\sigma_1(\max A) - \sigma_1(\min A)}{\max A - \min A} \underset{\text{C26.35}}{=} \varepsilon_1(\sigma)$$

Proposition C26.37 (Signature d'un cycle)
Soit σ un cycle de S_n de longueur p. Alors

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{p-1}$$

Méthode C26.38 — Pour calculer la signature d'une permutation σ, on peut commencer par la décomposer en produit de cycles à supports disjoints

$$\sigma = c_1 \circ \ldots \circ c_r$$

puis, comme la signature est un morphisme de groupes, il vient

$$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(c_1) \times \ldots \times \varepsilon(c_r) = (-1)^{\text{long}(c_1)+\ldots+\text{long}(c_r)-r} \qquad [\text{C26.37}]$$

Exercice C26.39 — Calculer la signature de

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_6$$

Exercice C26.40 — Le noyau de la signature $\varepsilon : (S_n, \sigma) \longrightarrow (\{-1, 1\}, \times)$, noté A_n est appelé groupe alterné.

1. Déterminer le cardinal de A_n.
2. Déterminer A_n lorsque $n \in \{3, 4\}$.

Exercice C26.41 — Soient $\sigma \in S_n$, $(r, s) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$, $\tau_1, \ldots, \tau_r, \gamma_1, \ldots, \gamma_s$ des transpositions de $[\![1, n]\!]$ telles que

$$\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \tau_r \quad \text{et} \quad \sigma = \gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \ldots \circ \gamma_s$$

Démontrer $r \equiv s\ [2]$.

Exercice C26.42 — Calculer la signature de

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 10 & 7 & 1 & 2 & 6 & 4 & 5 & 12 & 8 & 9 & 11 \end{pmatrix} \in S_{12}$$

de deux manières.

§ 3. Formes n-linéaires alternées

Notation C26.43 — Dans toute cette partie, E désigne un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

Définition C26.44 (forme n-linéaire alternée)
Une application

$$f : E^n \longrightarrow \mathbf{K}$$

est dite n-linéaire alternée si elle vérifie les deux conditions suivantes.

1. *Caractère n-linéaire* — Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, pour tout $(x_1,\dots,x_{i-1},x_i,y_i,x_{i+1},\dots,x_n) \in E^{n+1}$, pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2$

$$f\left(x_1,\dots,x_{i-1},\lambda\cdot x_i+\mu\cdot y_i,x_{i+1},\dots,x_n\right) = \lambda\cdot f\left(x_1,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_n\right)+\mu\cdot f\left(x_1,\dots,x_{i-1},y_i,x_{i+1},\dots,x_n\right)$$

2. *Caractère alterné ou antisymétrique* — Pour tout $(x_1,\dots,x_n) \in E^n$, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$

$$f(x_1,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_{j-1},x_j,x_{j+1},\dots,x_n) = -f(x_1,\dots,x_{i-1},x_j,x_{i+1},\dots,x_{j-1},x_i,x_{j+1},\dots,x_n)$$

Notation C26.45 — Soient $(x_1,x_2,\dots,x_n) \in E^n$ et $\sigma \in S_n$. On pose

$$x_\sigma := (x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\dots,x_{\sigma(n)})$$

de sorte que, si $(\sigma_1,\sigma_2) \in S_n^2$ alors $x_{\sigma_1\circ\sigma_2} = \left(x_{\sigma_2}\right)_{\sigma_1}$.

Proposition C26.46 (propriétés d'une application n-linéaire alternée)
Soit $f : E^n \longrightarrow \mathbf{K}$ une application n-linéaire alternée sur E.

1. *Annulation sur une famille avec deux vecteurs identiques* — Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]$ tel que $i<j$, pour tout $(x_1,\dots,x_i,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n) \in E^{n-1}$

$$f(x_1,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_{j-1},x_i,x_{j+1},\dots,x_n) = 0$$

2. *Annulation sur une famille liée* — Pour tout $(x_1,x_2,\dots,x_n) \in E^n$

$$(x_1,x_2,\dots,x_n) \text{ est liée} \implies f(x_1,x_2,\dots,x_n) = 0$$

3. *Effet d'une permutation* — Pour tout $(x_1,x_2,\dots,x_n) \in E^n$, pour tout $\sigma \in S_n$

$$f(x_\sigma) := f(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\dots,x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)\cdot f(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

Exercice C26.47 — Soit l'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})\times\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) & \longmapsto & x_1\cdot y_2 - y_1\cdot x_2 \end{array}\right.$$

1. Démontrer que f est 2-linéaire alternée.
2. Soit (X_1,X_2) deux vecteurs de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$. Donner une interprétation de $\left|f(X_1,X_2)\right|$ en termes d'aire.

Exercice C26.48 — Soient $\mathscr{B} = (e_1,e_2,\dots,e_n)$ une base de E, $f : E^n \longrightarrow \mathbf{K}$ une application n-linéaire alternée et $(x_1,\dots,x_n) \in E^n$. On pose, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_j) = \left(x_{1,j},x_{2,j},\dots,x_{n,j}\right)^\top$$

En développant

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n) = f\left(\sum_{i_1=1}^{n} x_{i_1,1}\cdot e_{i_1}\,,\ \sum_{i_2=1}^{n} x_{i_2,2}\cdot e_{i_2}\,,\ \dots,\ \sum_{i_n=1}^{n} x_{i_n,n}\cdot e_{i_n}\right)$$

déterminer un scalaire λ tel que $f(x_1,x_2,\dots,x_n) = \lambda\cdot f(e_1,e_2,\dots,e_n)$.

REMARQUE C26.49 — L'ensemble des formes n linéaires alternées sur E est noté $\bigwedge^n E$, i.e.

$$\bigwedge^n E := \left\{ f \in \mathbf{K}^{E^n} \ : \ f \text{ est } n \text{ linéaire alternée} \right\} \subset \mathbf{K}^{E^n}$$

L'ensemble $\bigwedge^n E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^{E^n}$ et est donc muni d'une structure naturelle de $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

§ 4. DÉTERMINANT D'UNE FAMILLE DE VECTEURS DANS UNE BASE

NOTATION C26.50 — Dans toute cette partie, E désigne un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

THÉORÈME C26.51 (DÉTERMINANT D'UNE FAMILLE DE VECTEURS DANS UNE BASE)
Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E. Il existe une unique application

$$\det_{\mathscr{B}} : E^n \longrightarrow \mathbf{K}$$

qui est n-linéaire alternée et telle que $\det_{\mathscr{B}}(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$. De plus

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n \quad \det_{\mathscr{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \cdot \prod_{k=1}^{n} [\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_k)]_{\sigma(k)}$$

THÉORÈME C26.52 (UNE FORME n-LINÉAIRE ALTERNÉE EST PROPORTIONNELLE À $\det_{\mathscr{B}}$)
Soient $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $f : E^n \longrightarrow \mathbf{K}$ une forme n-linéaire alternée sur E. Alors

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot \det_{\mathscr{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

donc f est proportionnelle à $\det_{\mathscr{B}}$.

REMARQUE C26.53 — D'après C26.51 et C26.52, $\bigwedge^n E$ est une droite vectorielle. Chaque choix de base $\mathscr{B}$ de E produit $\det_{\mathscr{B}}$, qui en est un vecteur directeur.

COROLLAIRE C26.54 (COMPARAISON DES DÉTERMINANTS ASSOCIÉS À DEUX BASES)
Soient $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathscr{C} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ deux bases de E. Alors

1. $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n \quad \det_{\mathscr{C}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \det_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}) \cdot \det_{\mathscr{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$
2. Les scalaires $\det_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})$ et $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{C})$ sont non nuls et inverses l'un de l'autre.

EXERCICE C26.55 — Notons $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$. Soit l'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (u_1, u_2) & \longmapsto & \det_{\mathscr{B}_0}(u_1, u_2) \end{array} \right.$$

1. Soit (u_1, u_2) des vecteurs non colinéaires de $\mathbf{R}^2$. Donner une interprétation de $\left|\det_{\mathscr{B}_0}(u_1, u_2)\right|$ en termes d'aire.
2. Calculer l'aire du parallélogramme formé par les vecteurs $u_1 = (5, 3)$ et $u_2 = (4, -7)$.

EXERCICE C26.56 — Notons $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Soit l'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (u_1, u_2, u_3) & \longmapsto & \det_{\mathscr{B}_0}(u_1, u_2, u_3) \end{array} \right.$$

Soit (u_1, u_2, u_3) des vecteurs linéairement indépendants de $\mathbf{R}^3$. Donner une interprétation de $\left|\det_{\mathscr{B}_0}(u_1, u_2, u_3)\right|$ en termes d'aire.

PROPOSITION C26.57 (CARACTÉRISATION DES BASES VIA LE DÉTERMINANT)
Soient $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E et $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$. Alors

$$(x_1, \ldots, x_n) \text{ est une base de } E \iff \det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$$

EXERCICE C26.58 — Déterminer les réels λ tels que la famille

$$\mathscr{B} := (\, u_1 = (\lambda, 1, 1)\, ,\ u_2 = (1, \lambda, 1)\, ,\ u_3 = (1, 1, \lambda)\,)$$

est une base de $\mathbf{R}^3$.

§ 5. DÉTERMINANT D'UN ENDOMORPHISME

NOTATION C26.59 — Dans toute cette partie, E désigne un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

LEMME C26.60 (CLÉ POUR LA DÉFINITION DU DÉTERMINANT D'UN ENDOMORPHISME)
Soient $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, $\mathscr{C} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ deux bases de E et u un automorphisme de E. On pose

$$u(\mathscr{B}) := (u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n)) \quad \text{et} \quad u(\mathscr{C}) := \big(u(f_1), u(f_2), \ldots, u(f_n)\big) \qquad [\text{bases de } E]$$

1. $\det_{u(\mathscr{B})}(u(\mathscr{C})) = \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{C})$
2. $\det_{\mathscr{B}}(u(\mathscr{B})) = \det_{\mathscr{C}}(u(\mathscr{C}))$

DÉFINITION C26.61 (DÉTERMINANT D'UN ENDOMORPHISME)
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Le déterminant de u est défini par

$$\det(u) := \det_{\mathscr{B}}(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n)) \text{ où } \mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n) \text{ est une base de } E \qquad \big[\text{indépendant du choix de } \mathscr{B}\big]$$

EXERCICE C26.62 — Que vaut $\det(\mathrm{id}_E)$?

PROPOSITION C26.63 (CARACTÉRISATION DES AUTOMORPHISMES VIA LE DÉTERMINANT)
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors

$$u \text{ est un automorphisme de } E \iff \det(u) \neq 0$$

THÉORÈME C26.64 (DÉTERMINANT D'UNE COMPOSÉE D'ENDOMORPHISMES)
Soient $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$. Alors

$$\det(v \circ u) = \det(v) \cdot \det(u)$$

COROLLAIRE C26.65 (DÉTERMINANT DE LA RÉCIPROQUE D'UN AUTOMORPHISME)
Soit u un automorphisme de E. Alors

$$\det(u) \neq 0 \quad \text{et} \quad \det\big(u^{-1}\big) = \det(u)^{-1}$$

EXERCICE C26.66 — On rappelle que

$$\mathrm{GL}(E) := \big\{ f \in \mathscr{L}(E) \ :\ f \text{ est bijective} \big\}$$

est stable par composition et que $(GL(E), \circ)$ est un groupe appelé groupe linéaire de E. Que dire de l'application ci-dessous, induite par le déterminant ?

$$\left|\begin{array}{ccc} (\mathrm{GL}(E), \circ) & \longrightarrow & (\mathbf{K}^*, \times) \\ u & \longmapsto & \det(u) \end{array}\right.$$

EXERCICE C26.67 — Justifier que

$$\mathscr{L}\left(\mathbf{R}^2\right)=\left\{\left|\begin{array}{ccc}\mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2\\ (x,y) & \longmapsto & (ax+by,cx+dy)\end{array}\right. : (a,b,c,d)\in\mathbf{R}^4\right\}$$

puis décrire en extension $\mathrm{GL}(\mathbf{R}^2)$.

EXERCICE C26.68 — Soit s une symétrie vectorielle de E. Calculer $\det(s)$.

§ 6. DÉTERMINANT D'UNE MATRICE CARRÉE

NOTATION C26.69 — On note $\mathscr{B}_0$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ et, pour tout $A\in\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ et $(i,j)\in[\![1,n]\!]$, on note $A_{i,\bullet}$ désigne la i-ième ligne de A et $A_{\bullet,j}$ la j-ième colonne de A, i.e.

$$A_{i,\bullet}:=([A]_{i,1},[A]_{i,2},\ldots,[A]_{i,n})\in\mathbf{K}^n \quad \text{et} \quad A_{\bullet,j}:=\begin{pmatrix}[A]_{1,j}\\ [A]_{2,j}\\ \vdots\\ [A]_{n,j}\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$$

DÉFINITION C26.70 (DÉTERMINANT D'UNE MATRICE CARRÉE)
L'application

$$\det\left|\begin{array}{ccc}\mathscr{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathbf{K}\\ A & \longmapsto & \det(A):=\det_{\mathscr{B}_0}\left(A_{\bullet,1},A_{\bullet,2},\ldots,A_{\bullet,n}\right)=\displaystyle\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\cdot\prod_{k=1}^{n}[A]_{k,\sigma(k)}\end{array}\right.$$

est l'unique application
(a) linéaire par rapport à chacune des colonnes
(b) alternée par rapport aux colonnes (l'échange de deux colonnes a pour effet de multiplier le déterminant par -1)
(c) valant 1 sur la matrice I_n.

REMARQUE C26.71 — Le déterminant de $A\in\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est une expression polynomiale en les coefficients de la matrice A.

EXERCICE C26.72 — On pose $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Calculer le déterminant de la matrice

$$A=\begin{pmatrix}j & i\\ 1 & j^2\end{pmatrix}$$

EXERCICE C26.73 — Calculer les déterminants des matrices

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&0&2\\0&1&1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1&2&5\\3&4&1\\2&2&4\end{pmatrix}$$

PROPOSITION C26.74 (DÉTERMINANT D'UNE MATRICE VS. DÉTERMINANT DE L'APPLICATION LINÉAIRE ASSOCIÉE)
Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. On note

$$\varphi_A\left|\begin{array}{ccc}\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})\\ X & \longmapsto & AX\end{array}\right.$$

l'application linaire canoniquement associée. Alors

$$\det(A)=\det(\varphi_A)$$

Proposition C26.75 (Déterminant d'un produit de matrices carrées)
Pour tout $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})^2$
$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$
et, pour tout $(\lambda, A) \in \mathbf{K} \times \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$
$$\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$$

Théorème C26.76 (Caractérisation des matrices inversibles par le déterminant)
Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$
$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K}) \iff \det(A) \neq 0$$

Proposition C26.77 (Morphisme de groupes induit par $\det$)
L'application déterminant induit l'application
$$\left| \begin{array}{ccc} (\mathrm{GL}_n(\mathbf{K}), \times) & \longrightarrow & (\mathbf{K}^*, \times) \\ A & \longmapsto & \det(A) \end{array} \right.$$
qui est un morphisme de groupes.

Exercice C26.78 — Que dire de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K}) := \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \ : \ \det(A) = 1\}$?

Théorème C26.79 (Déterminant d'une matrice vs. déterminant de sa transposée)
Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$
$$\det(A) = \det\left(A^\top\right)$$

Corollaire C26.80 (Propriétés du déterminant d'une matrice par rapport à ses lignes)
L'application
$$\det \colon \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathbf{K}$$
est
(a) linéaire par rapport à chacune des lignes
(b) alternée par rapport aux lignes (l'échange de deux lignes a pour effet de multiplier le déterminant par -1)

Exercice C26.81 — Calculer le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

§ 7. Calculs de déterminants de matrices

Théorème C26.82 (Effet d'une opération élémentaire sur le déterminant)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

1. *Transposition.* Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. Alors
$$\det(A) = -1 \cdot \det(A \quad [C_i \leftrightarrow C_j]) \quad \text{et} \quad \det(A) = -1 \cdot \det(A \quad [L_i \leftrightarrow L_j])$$
2. *Dilatation.* Soient $i \in [\![1, n]\!]$ et $\lambda \in \mathbf{K}^*$. Alors
$$\det(A) = \frac{1}{\lambda} \cdot \det(A \quad [C_i \leftarrow \lambda \cdot C_i]) \quad \text{et} \quad \det(A) = \frac{1}{\lambda} \cdot \det(A \quad [L_i \leftarrow \lambda \cdot L_i])$$
3. *Transvection.* Soient $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors
$$\det(A) = \det(A \quad [C_j \leftarrow C_j + \lambda \cdot C_i]) \quad \text{et} \quad \det(A) = \det(A \quad [L_j \leftarrow L_j + \lambda \cdot L_i])$$

EXERCICE C26.83 — Supposons ici que $n \geqslant 3$ et considérons $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

1. On note B la matrice obtenue en effectuant successivement les opérations
$$L_2 \leftarrow 3 \cdot L_2 - 7 \cdot L_1 \quad \text{et} \quad L_3 \leftarrow 5 \cdot L_3 - 4 \cdot L_1$$
sur la matrice A. Exprimer le déterminant de A en fonction du déterminant de B.
2. On note C la matrice obtenue en effectuant l'opération
$$L_3 \leftarrow 5 \cdot L_1 + 6 \cdot L_2$$
sur la matrice A. Que dire du déterminant de C ?

EXERCICE C26.84 — Exprimer le déterminant de la matrice
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$
en fonction du déterminant d'une matrice triangulaire supérieure, avec des coefficients diagonaux tous égaux à 1.

DÉFINITION C26.85 (MINEUR ET COFACTEUR)
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

1. La matrice $A_{i,j} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{K})$ est la matrice obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ième colonne de A.
2. Le mineur de A associé au couple (i,j) est
$$\det(A_{i,j})$$
3. Le cofacteur de A associé au couple (i,j) est
$$C_{i,j} := (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{i,j})$$

EXERCICE C26.86 — Calculer tous les cofacteurs de la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

LEMME C26.87 (CLÉ POUR LE DÉVELOPPEMENT D'UN DÉTERMINANT SUIVANT UNE LIGNE/COLONNE)
Soient $\mathscr{B}_0 = (X_1, \ldots, X_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

1. $\det\left(A_{\bullet,1}, \ldots, \ldots, A_{\bullet,n-1}, X_n\right) = \det\left(A_{n,n}\right)$
2. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$
$$\det\left(A_{\bullet,1}, \ldots, A_{\bullet,j-1}, X_i, A_{\bullet,j+1}, \ldots, A_{\bullet,n}\right) = (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{i,j})$$

THÉORÈME C26.88 (DÉVELOPPEMENT D'UN DÉTERMINANT SUIVANT UNE LIGNE/COLONNE)
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

1. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$
$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot [A]_{i,j} \cdot \det(A_{i,j}) \qquad \left[\text{développement suivant la } i\text{-ième ligne de } A\right]$$
2. Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$
$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot [A]_{i,j} \cdot \det(A_{i,j}) \qquad \left[\text{développement suivant la } j\text{-ième colonne de } A\right]$$

EXERCICE C26.89 — Calculer le déterminant de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

PROPOSITION C26.90 (DÉTERMINANT D'UNE MATRICE TRIANGULAIRE)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Si A est triangulaire (inférieure ou supérieure), alors

$$\det(A) = \prod_{k=1}^{n} [A]_{k,k} \qquad \text{[produit des éléments diagonaux]}$$

EXEMPLE C26.91 — $\det \begin{pmatrix} 2 & 8 & 1 & 7 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 252$

EXERCICE C26.92 — Déterminer les valeurs de $\lambda \in \mathbf{R}$ telles que $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_4(\mathbf{K})$.

THÉORÈME C26.93 (DÉTERMINANT DE VANDERMONDE)
Soient $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{K}^n$. On pose

$$V(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \alpha_3^{n-1} & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \qquad \text{[matrice de Vandermonde]}$$

Alors

$$\det(V(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\alpha_j - \alpha_i)$$

EXERCICE C26.94 — Soient $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{K}^n$ et

$$L \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}^n \\ P & \longmapsto & \left(\widetilde{P}(\alpha_1), \widetilde{P}(\alpha_2), \dots, \widetilde{P}(\alpha_n)\right) \end{array} \right.$$

1. Calculer la matrice de l'application linéaire L dans les bases canoniques de $\mathbf{K}_{n-1}[X]$ et $\mathbf{K}^n$.
2. Donner une CNS pour que L soit bijective.

§ 8. COMATRICE

DÉFINITION C26.95 (COMATRICE)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. La comatrice de A, notée $\mathrm{Com}(A)$, est la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ définie par

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad [\mathrm{Com}(A)]_{i,j} = C_{i,j} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{i,j})$$

THÉORÈME C26.96 (RELATION FONDAMENTALE ENTRE UNE MATRICE ET SA COMATRICE)
Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$
$$A \times \mathrm{Com}(A)^\top = \mathrm{Com}(A)^\top \times A = \det(A) \cdot I_n$$

THÉORÈME C26.97 (EXPRESSION DE L'INVERSE D'UNE MATRICE INVERSIBLE)
Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ alors
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \mathrm{Com}(A)^\top$$

EXERCICE C26.98 — Justifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

EXERCICE C26.99 — Soit A une matrice de format (n, n) à coefficients entiers. Donner une CNS sur A pour qu'il existe une matrice B à coefficients entiers telle que
$$A \times B = B \times A = I_n$$