Chapitre n°25
Fonctions convexes

Notation C25.1 — Dans toute ce document I désigne un intervalle non vide de $\mathbf{R}$ et on fixe un repère $\mathscr{R} = \left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,\right)$ du plan.

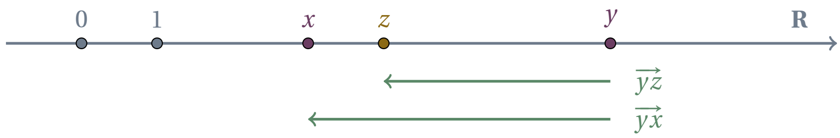
§ 1. Segments de R

Rappel C25.2 — Nous rappelons que Si x et y sont deux réels tels que $x<y$, alors le segment $[x,y]$ est défini par :

$$[x,y] := \{z\in\mathbf{R} \,:\, x\leqslant z\leqslant y\}\ .$$

Remarque C25.3 — Nous pouvons observer, au moyen d'une figure qu'un réel z appartient au segment $[x,y]$ si et seulement si

$$\exists\lambda\in[0,1],\quad \underbrace{\overrightarrow{yz}}_{z-y} = \lambda\cdot\underbrace{\overrightarrow{yx}}_{x-y}$$



i.e. si et seulement s'il existe $\lambda\in[0,1]$ tel que $z=\lambda\cdot x+(1-\lambda)\cdot y$. Ces considérations conduisent à formuler l'énoncé suivant.

Lemme C25.4 (description en extension d'un segment réel)
Soient x,y des nombres réels tels que $x<y$. Alors

$$\{z\in\mathbf{R} \,:\, x\leqslant z\leqslant y\} = \{\lambda x+(1-\lambda)y \,:\, \lambda\in[0,1]\}$$

Démonstration — $\boxed{\supset}$ Soit $z\in\{\lambda x+(1-\lambda)y \,:\, \lambda\in[0,1]\}$.

- Comme $x\leqslant y$ et $\lambda\geqslant 0$, $\lambda x\leqslant\lambda y$, d'où $z=\lambda x+(1-\lambda)y\leqslant\lambda y+(1-\lambda)y=y$.
- Comme $x\leqslant y$ et $1-\lambda\geqslant 0$, $(1-\lambda)x\leqslant(1-\lambda)y$, d'où $x=\lambda x+(1-\lambda)x\leqslant\lambda x+(1-\lambda)y=z$.

Ainsi $x\leqslant z\leqslant y$.

$\boxed{\subset}$ Soit $z\in\mathbf{R}$ tel que $x\leqslant z\leqslant y$. Nous devons déterminer un $\lambda\in[0,1]$ tel que $z=\lambda x+(1-\lambda)y$. L'étude ci-dessous, nous invite à poser $\lambda := \dfrac{z-y}{x-y}=\dfrac{y-z}{y-x}$. Vérifions que ce choix convient.

- Comme $y-z\geqslant 0$ et $y-x>0$, $\lambda=\dfrac{y-z}{y-x}\geqslant 0$.
- Comme $x\leqslant z$, $-z\leqslant -x$ et donc $y-z\leqslant y-x$. Puisque $y-x>0$, il vient $\lambda=\dfrac{y-z}{y-x}\leqslant 1$.
- $\lambda x+(1-\lambda)y=\dfrac{z-y}{x-y}x+\left(1-\dfrac{z-y}{x-y}\right)y=\dfrac{z-y}{x-y}x+\dfrac{x-z}{x-y}y=\dfrac{zx-yx+xy-zy}{x-y}=z$

§ 2. Fonctions convexes

Définition C25.5 (convexité/concavité d'une fonction)
Soit une fonction $f: I\longrightarrow\mathbf{R}$.

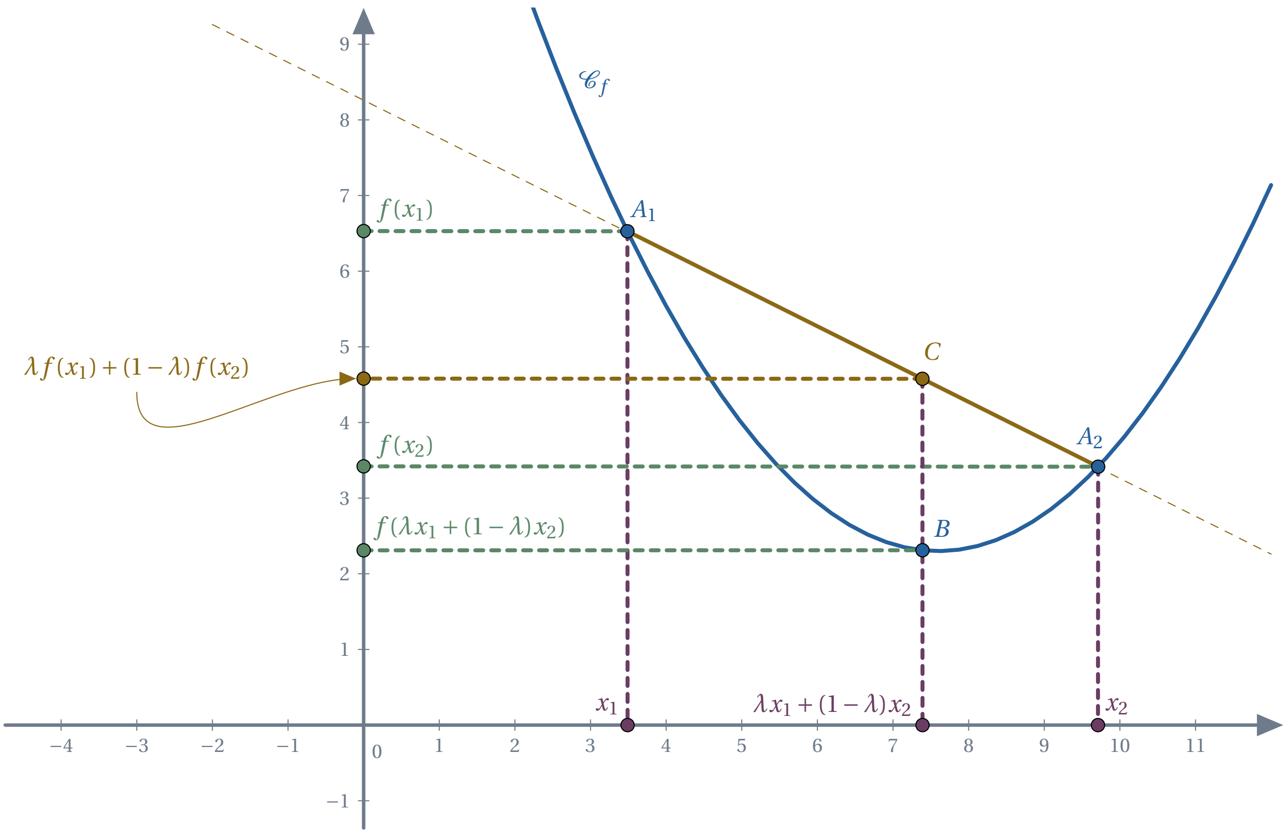
1. f est <u>convexe</u> si
$$\forall (x,y)\in I^2,\quad \forall\lambda\in[0,1],\quad f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$
2. f est <u>concave</u> si
$$\forall (x,y)\in I^2,\quad \forall\lambda\in[0,1],\quad f(\lambda x+(1-\lambda)y)\geqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

Remarque C25.6 — Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ est concave si et seulement si son opposée $-f$ est convexe (resp. strictement convexe). Nous allons étudier principalement les fonctions convexes dans la suite. Les résultats que nous établirons pour ces fonctions se transposeront aux fonctions concaves grâce à l'observation précédente.

Remarque C25.7 — Soient une fonction $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$, $(x_1, x_2) \in I^2$ et $\lambda \in [0,1]$. Considérons les trois points

$$A_1(x_1, f(x_1)) \qquad A_2(x_2, f(x_2)) \qquad B(\lambda \cdot x_1 + (1-\lambda)\cdot x_2, f(\lambda \cdot x_1 + (1-\lambda)\cdot x_2))$$

de la courbe représentative de f, notée $\mathscr{C}_f$. Le segment $[A_1, A_2]$, dont les extrémités sont des points de $\mathscr{C}_f$, est appelé une corde de $\mathscr{C}_f$. Notons C le point de la corde $[A_1, A_2]$ d'abscisse $\lambda \cdot x_1 + (1-\lambda)\cdot x_2$.



La droite $(A_1 A_2)$ a comme coefficient directeur $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ et passe par le point de $A_1(x_1, f(x_1))$. Son équation cartésienne réduite est donc :

$$y = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) + f(x_1)$$

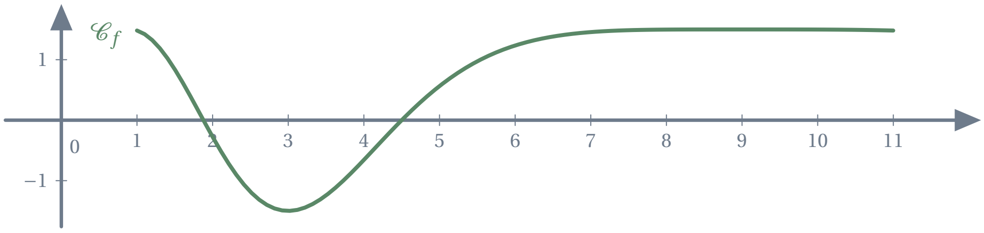
Ainsi l'ordonnée de C est-elle $\lambda \cdot f(x_1) + (1-\lambda)\cdot f(x_2)$. Nous déduisons de cette étude que :

$$C \text{ est au-dessus de } B \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{f(\lambda \cdot x_1 + (1-\lambda)\cdot x_2)}_{\text{ordonnée de } B} \leqslant \underbrace{\lambda \cdot f(x_1) + (1-\lambda)\cdot f(x_2)}_{\text{ordonnée de } C}.$$

Ceci étant vrai pour tout $(x_1, x_2) \in I^2$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$, nous en déduisons que

> la fonction f est convexe
>
> si et seulement si
>
> toutes les cordes de $\mathscr{C}_f$ sont au-dessus de $\mathscr{C}_f$.

Exercice C25.8 — On donne ci-dessous le graphe d'une fonction $f\colon [1,11] \longrightarrow \mathbf{R}$. La fonction f est-elle convexe? Justifier la réponse en complétant le graphique.



Remarque C25.9 — Soient $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ et f la fonction affine définie par

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & ax+b \end{array} \right.$$

La fonction f est convexe et concave.

Exercice C25.10 — Soit $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe et concave. Démontrer que f est affine.

Proposition C25.11 (convexité de la fonction carrée)
La fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$$

est convexe.

Exercice C25.12 — Démontrer que la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_{>0} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array} \right.$$

est convexe.

§ 3. Inégalité de Jensen

Lemme C25.13 (une propriété de stabilité d'un intervalle)
Soient $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$, pour tout $(x_1,\dots,x_n) \in I^n$, pour tout $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in (\mathbf{R}_+)^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Alors

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i \in I$$

Démonstration — Notons x_m le plus petit des réels $x_1,\dots,x_n$ et x_M le plus grand des réels $x_1,\dots,x_n$. Alors

$$\forall\, i \in [\![1,n]\!] \quad \lambda_i \cdot x_m \leqslant \lambda x_i \leqslant \lambda_i \cdot x_M \qquad [\lambda_i \geqslant 0]$$

En sommant membre-à-membre ces n inégalités, il vient $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_m \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_M$ puis

$$x_m \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i \leqslant x_M \qquad [\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1]$$

Comme x_m et x_M appartiennent à l'intervalle I, nous en déduisons $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i \in I$.

PROPOSITION C25.14 (INÉGALITÉ DE JENSEN)
Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe. Pour tout $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$, pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbf{R}_+)^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot f(x_i)$$

Démonstration — Nous raisonnons par récurrence et posons, pour tout $n \geqslant 2$

$$\mathscr{P}(n) \ : \ \text{« pour tout } (x_1, \dots, x_n) \in I^n, \text{ pour tout } (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbf{R}_+)^n \text{ tel que } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,\ f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot f(x_i) \text{ »}$$

• Initialisation à $n = 2$. Soient $(x_1, x_2) \in I^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in (\mathbf{R}_+)^2$ tel que $\lambda_1 + \lambda_2$. Alors $\lambda_1 \in [0, 1]$ et $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$. Ainsi, d'après la définition d'une fonction convexe

$$f(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) = f(\lambda_1 \cdot x_1 + (1 - \lambda_1) \cdot x_2) \leqslant \lambda_1 \cdot f(x_1) + (1 - \lambda_1) \cdot f(x_2) = \lambda_1 \cdot f(x_1) + \lambda_2 \cdot f(x_2)$$

• Hérédité. Soit $n \geqslant 2$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Soient $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in I^{n+1}$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in (\mathbf{R}_+)^{n+1}$ tel que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$.

— Supposons $\lambda_{n+1} \neq 1$. Nous observons que

$$1 - \lambda_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i > 0$$

et alors

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \cdot x_i\right) &= f\left(\underbrace{(1 - \lambda_{n+1})}_{\text{poids}} \cdot \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} \cdot x_i\right)}_{\text{point}} + \underbrace{\lambda_{n+1}}_{\text{poids complémentaire}} \cdot \underbrace{x_{n+1}}_{\text{point}}\right) \\
&\leqslant (1 - \lambda_{n+1}) \cdot f\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} \cdot x_i\right) + \lambda_{n+1} \cdot f(x_{n+1}) && [f \text{ est convexe}] \\
&\leqslant (1 - \lambda_{n+1}) \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} \cdot f(x_i) + \lambda_{n+1} \cdot f(x_{n+1}) && \left[\mathscr{P}(n),\ 1 - \lambda_{n+1} \geqslant 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}}}_{\geqslant 0} = 1\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \cdot f(x_i)
\end{aligned}$$

— Supposons $\lambda_{n+1} = 1$. Alors

$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\lambda_i}_{\geqslant 0} = 0$$

et donc $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. L'assertion

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \cdot x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \cdot f(x_i)$$

à démontrer s'écrit alors $f(x_{n+1}) \leqslant f(x_{n+1})$ qui est claire.

EXERCICE C25.15 — Soit $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$. Démontrer que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leqslant n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

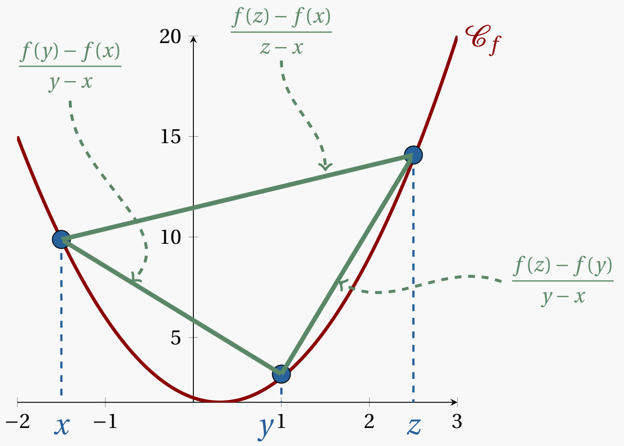
EXERCICE C25.16 — Soit $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$. Démontrer que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbf{R}_{>0})^n$, $\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \geqslant n^2$.

§ 4. Inégalité des trois pentes

Proposition C25.17 (inégalités des trois pentes)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe.
Pour tout $x < y < z$ dans I

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$



Démonstration — • Nous observons que $y \in [x,z]$. Il existe donc λ dans $[0,1]$ tel que $y = \lambda x + (1-\lambda)z$. On calcule $\lambda = \frac{z-y}{z-x}$. Comme la fonction f est convexe, $f(\lambda x + (1-\lambda)z) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(z)$, ce qui s'écrit encore

$$(\star) \qquad f(y) \leqslant \frac{z-y}{z-x} f(x) + \frac{y-x}{z-x} f(z)\,.$$

• Démontrons $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$. Comme $y-x>0$

$$\begin{aligned}
\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \quad &\Longleftrightarrow \quad f(y)-f(x) \leqslant \frac{y-x}{z-x}(f(z)-f(x)) \\
&\Longleftrightarrow \quad f(y) \leqslant \frac{y-x}{z-x}(f(z)-f(x)) + f(x) = \frac{z-y}{z-x} f(x) + \frac{y-x}{z-x} f(z)\,.
\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est vraie d'après $(\star)$. La première l'est donc également.

• Démontrons $\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$. Comme $z-y>0$

$$\begin{aligned}
\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{z-y}{z-x}(f(z)-f(x)) \leqslant f(z)-f(y) \\
&\Longleftrightarrow \quad f(y) \leqslant f(z) - \frac{z-y}{z-x}(f(z)-f(x)) = \frac{z-y}{z-x} f(x) + \frac{y-x}{z-x} f(z)\,.
\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est vraie d'après $(\star)$. La première l'est donc également.

• Remarque. En analysant la démonstration ci-dessus, on peut observer que l'une quelconque des deux égalités de l'inégalité des trois pentes implique la convexité de la fonction f, d'où une forme de réciproque.

Proposition C25.18 (caractérisation de la convexité par la croissance des pentes)
Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction. L'application f est convexe si et seulement si, pour tout $a \in I$, la fonction

$$p_a \left| \begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array} \right. \qquad [\text{fonction pente au point } a]$$

est croissante.

PROPOSITION C25.19 (POSITION D'UNE COURBE DE FONCTION CONVEXE PAR RAPPORT À UNE DE SES SÉCANTES) Soient $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe, a, b des points de I tels que $a < b$ et $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$ les points de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives a et b.

1. $\forall\, x \in [a, b] \quad f(x) \leqslant \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) + f(a)$
2. $\forall\, x \in I \setminus [a, b] \quad f(x) \geqslant \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) + f(a)$

REMARQUE C25.20 — Nous conservons les notations de la proposition C25.19. La droite sécante (AB) à la courbe $\mathscr{C}_f$ a pour équation réduite

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) + f(a)$$

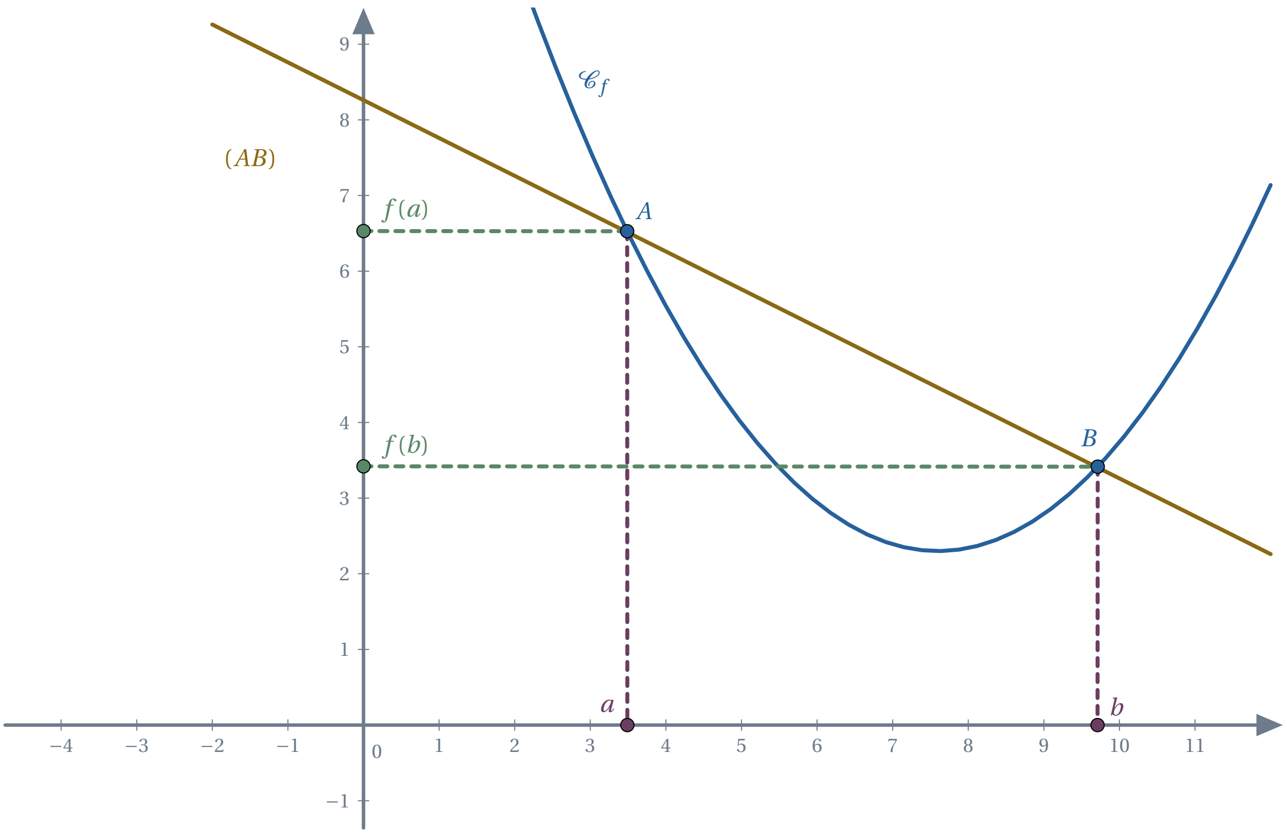
Le 1 de C25.19 signifie que

$$\boxed{\text{la sécante } (AB) \text{ est au-dessus de la courbe } \mathscr{C}_f \text{ sur l'intervalle } [a, b]}$$

et le 2 de C25.19 exprime que

$$\boxed{\text{la sécante } (AB) \text{ est en dessous de la courbe } \mathscr{C}_f \text{ en dehors de l'intervalle } [a, b]}$$

ce qu'illustre la figure ci-dessous.



§ 5. Des propriétés remarquables des fonctions convexes (HP)

Exercice C25.21 — Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe continue. Démontrer que l'ensemble des points où f admet son minimum est un segment.

Exercice C25.22 — Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe continue. Démontrer que f atteint son maximum en a ou en b.

Exercice C25.23 — Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction strictement convexe, i.e. telle que, pour tous réels x, y distincts

$$\forall \lambda \in [0,1] \quad f(\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y) < \lambda \cdot f(x) + (1-\lambda) \cdot f(y)$$

Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au plus deux solutions.

Exercice C25.24 — Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe majorée. Démontrer que f est constante.

Exercice C25.25 — Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe admettant un minimum local en un point intérieur de I. Démontrer qu'il s'agit d'un minimum global.

Exercice C25.26 — Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe. On note $\mathring{I}$ l'intérieur de I, qui est l'intervalle I éventuellement privé de ses extrémités.

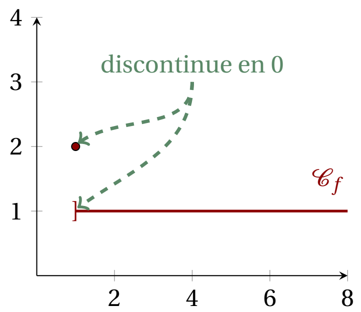
1. Démontrer que f est dérivable à droite et à gauche en tout point de $\mathring{I}$.
2. En déduire que f est continue sur $\mathring{I}$.

Remarque C25.27 — **Une fonction convexe n'est pas nécessairement continue.**

Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe sur I. D'après C25.26, la fonction f est continue en tout point de $\mathring{I}$, mais elle n'est pas nécessairement continue sur I (il peut y avoir discontinuité aux extrémités), comme le montre l'exemple de la fonction

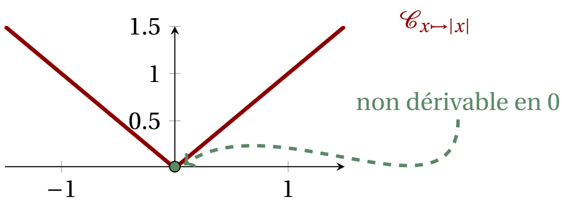
$$f \left| \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x > 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{array} \right.$$

qui est convexe, mais discontinue en 1.



Remarque C25.28 — **Une fonction convexe n'est pas nécessairement dérivable.**

Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe sur I. D'après C25.26, la fonction f est dérivable à droite et à gauche en tout point de l'intérieur $\mathring{I}$ de I, mais elle n'est pas nécessairement dérivable en tout point de $\mathring{I}$, comme le montre l'exemple de la fonction valeur absolue (convexe sur $\mathbf{R}$, mais non dérivable en 0).



§ 6. Fonctions convexes dérivables

Théorème C25.29 (caractérisation des fonctions dérivables (resp. deux fois dérivables) convexes)

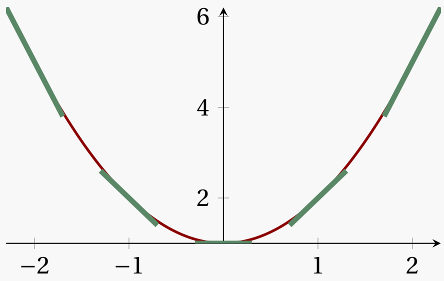
Soit $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction.

1. Si f est dérivable sur I alors

$$f \text{ est convexe} \iff f' \text{ est croissante.}$$

2. Si f est deux fois dérivable sur I alors

$$f \text{ est convexe} \iff f'' \geqslant 0.$$



Corollaire C25.30 (caractérisation des fonctions dérivables (resp. deux fois dérivables) concaves)

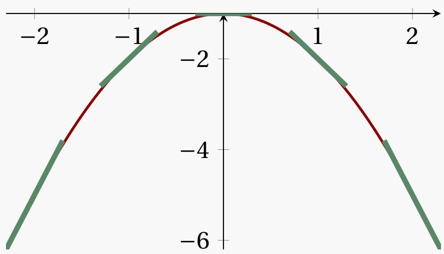
Soit $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction.

1. Si f est dérivable sur I alors

$$f \text{ est concave} \iff f' \text{ est décroissante.}$$

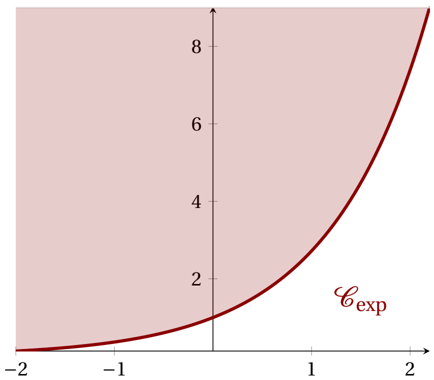
2. Si f est deux fois dérivable sur I alors

$$f \text{ est concave} \iff f'' \leqslant 0.$$

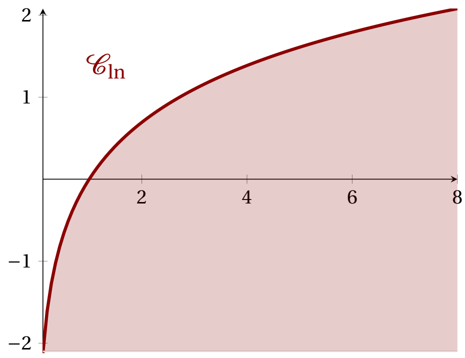


Exemple C25.31 —

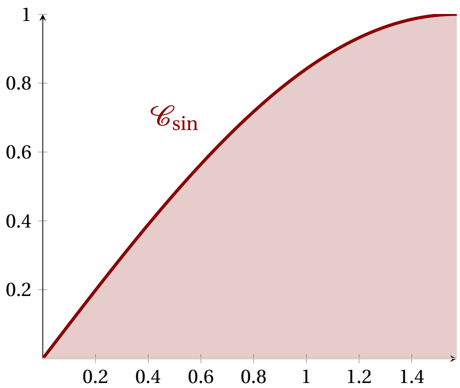
La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbf{R}$.



La fonction logarithme est concave sur $\mathbf{R}_{>0}$.

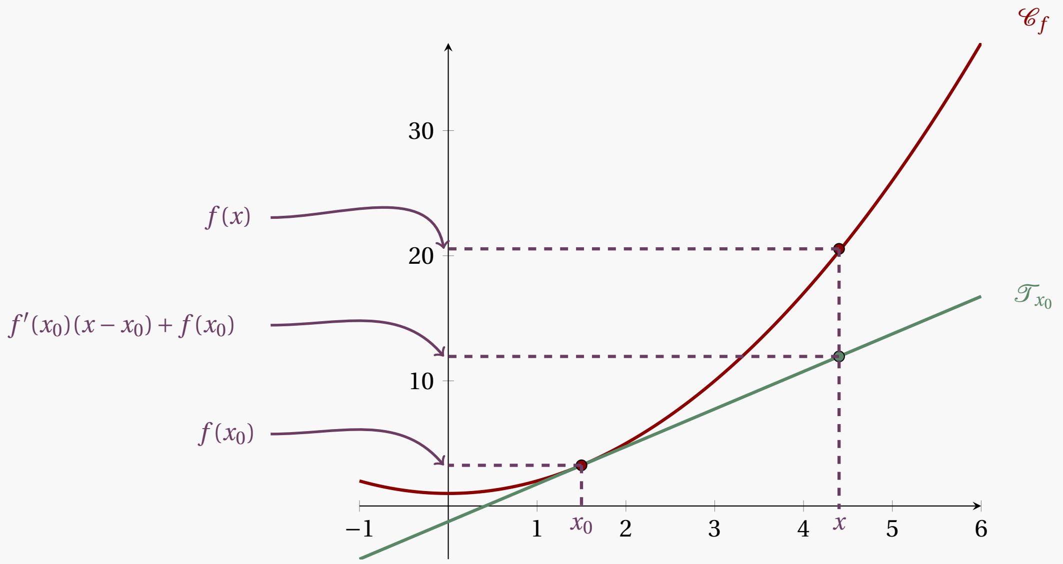


La fonction sinus est concave sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.



THÉORÈME C25.32 (LE GRAPHE D'UNE FONCTION CONVEXE DÉRIVABLE EST AU-DESSUS DE SES TANGENTES)
Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable sur I. La fonction f est convexe si et seulement si son graphe est au-dessus de toutes ses tangentes, i.e. si et seulement si

$$\forall\, x_0 \in I \quad \forall\, x \in I \qquad f(x) \geqslant f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$



EXERCICE C25.33 — Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe dérivable et soit $x_0 \in I$.

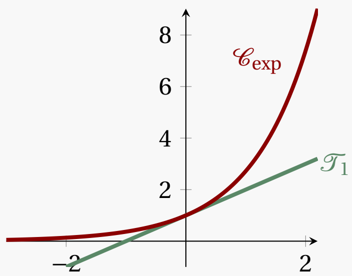
1. Démontrer que l'intersection du graphe de f et de sa tangente au point d'abscisse x_0 est un intervalle de $\mathbf{R}^2$.
2. Que dire de plus si f est strictement convexe, i.e. si pour tous points distincts x, y de I

$$\forall\, \lambda \in [0,1] \quad f(\lambda \cdot x + (1-\lambda)\cdot y) < \lambda \cdot f(x) + (1-\lambda)\cdot f(y)$$

§ 7. QUELQUES INÉGALITÉS DE CONVEXITÉ CLASSIQUES (HP)

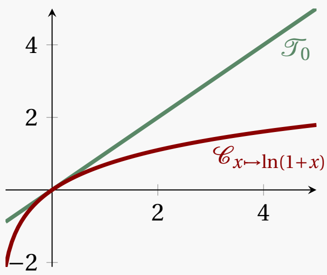
PROPOSITION C25.34 (INÉGALITÉ DE CONVEXITÉ POUR exp)

$$\forall\, x \in \mathbf{R} \qquad e^x \geqslant 1 + x$$



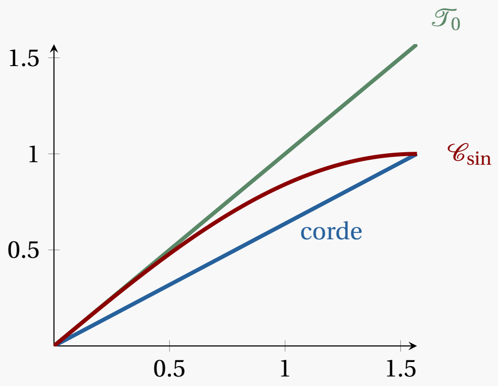
PROPOSITION C25.35 (INÉGALITÉ DE CONCAVITÉ POUR ln)

$$\forall\, x \in]-1, +\infty[\qquad \ln(1+x) \leqslant x$$



PROPOSITION C25.36 (INÉGALITÉS DE CONCAVITÉ POUR sin)

$$\forall\, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \frac{2}{\pi} x \leqslant \sin(x) \leqslant x$$



THÉORÈME C25.37 (INÉGALITÉ ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUE)
Soient $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$ et $(x_1, \dots, x_n) \in \left(\mathbf{R}_+^*\right)^n$. Alors

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

EXERCICE C25.38 — L'inégalité arithmético-géométrique, pour $n = 2$, s'écrit $\sqrt{x_1 x_2} \leqslant \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, pour tout $(x_1, x_2) \in \left(\mathbf{R}_+^*\right)^2$. En donner une démonstration élémentaire.

EXERCICE C25.39 — Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice bistochastique, i.e. telle que :
(a) les coefficients de A sont positifs ou nuls ;
(b) la somme des coefficients de chaque ligne de A vaut 1 ;
(c) la somme des coefficients de chaque colonne de A vaut 1.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ tel que $x_1 > 0, \dots, x_n > 0$ et $Y = AX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Démontrer $\prod_{i=1}^{n} x_i \leqslant \prod_{i=1}^{n} y_i$.

THÉORÈME C25.40 (INÉGALITÉ DE YOUNG)
Soient $p > 0$ et $q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors

$$\forall\, (x, y) \in \left(\mathbf{R}_+^*\right)^2 \qquad x \cdot y \leqslant \frac{1}{p} \cdot x^p + \frac{1}{q} \cdot y^q$$

COROLLAIRE C25.41 (INÉGALITÉ DE HÖLDER)
Soient $p > 0$ et $q > 0$ tels tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soit $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$. Alors

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbf{R}_+)^n \quad \forall (y_1, \dots, y_n) \in (\mathbf{R}_+)^n \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

THÉORÈME C25.42 (INÉGALITÉ DE MINKOWSKI)
Soit $p \geqslant 1$ et $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^{2n}$. Alors

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$