

# CHAPITRE N°24

## MATRICES

**NOTATION C24.1** — Dans tout ce document, la lettre  $\mathbf{K}$  désigne un corps qui peut être  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ .

### § 1. MATRICE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE DANS DES BASES

#### DÉFINITION C24.2 (MATRICE D'UN VECTEUR DANS UNE BASE)

Soient

- $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$
- $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$

Si  $x \in E$ , il existe un unique  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n$  tel que

$$x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i \quad \text{[l'existence (resp. l'unicité) vient du caractère générateur (resp. libre) de } \underline{e}\text{]}$$

La matrice du vecteur  $x$  dans  $\underline{e}$ , notée  $\text{Mat}_{\underline{e}}(x)$  est vecteur colonne défini par  $\text{Mat}_{\underline{e}}(x) := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ .

**REMARQUE C24.3** — On garde les mêmes notations que celles de C24.2. L'application

$$\begin{array}{l} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \longrightarrow E \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i \end{array}$$

est linéaire (exercice laissé au lecteur), injective ( $\underline{e}$  est libre) et surjective ( $\underline{e}$  est génératrice de  $E$ ). Il s'agit donc d'un isomorphisme. Son application réciproque, qui est elle aussi un isomorphisme, est

$$\text{Mat}_{\underline{e}} \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ x \longmapsto \text{Mat}_{\underline{e}}(x) \end{array} \right.$$

**EXERCICE C24.4** — On note  $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbf{R}^3$ .

1. Déterminer la matrice de  $u = (1, 2, 3)$  dans la base  $\mathcal{B}_0$ .
2. Déterminer le vecteur  $v \in \mathbf{R}^3$  tel que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(v) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ .
3. Justifier que la famille  $\mathcal{B} := (f_1 = (0, 1, 1), f_2 = (1, 0, 1), f_3 = (1, 1, 0))$  est une base de  $\mathbf{R}^3$ .
4. Déterminer la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
5. Déterminer le vecteur  $w \in \mathbf{R}^3$  tel que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(w) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ .

**EXERCICE C24.5** — Soient  $n \in \mathbf{N}_{\geq 2}$  et  $\mathcal{B}_0$  la base canonique de  $\mathbf{R}_n[X]$ .

1. Déterminer la matrice de  $A = X^n - 2X + 3$  dans la base  $\mathcal{B}_0$ .
2. Pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on définit le polynôme  $P_k$  par  $P_k := \sum_{i=1}^k X_i$ . Démontrer que la famille  $\mathcal{B} := (P_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  est une base de  $\mathbf{R}_n[X]$ .
3. Déterminer la matrice de  $X^n$  dans la base  $\mathcal{B}_0$ .

**DÉFINITION C24.6 (MATRICE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE DANS UN COUPLE DE BASES)**

Soient

- $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $p \geq 1$  muni d'une base  $\underline{e} = (e_1, \dots, e_p)$
- $F$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$  muni d'une base  $\underline{f} = (f_1, \dots, f_n)$
- $u \in \mathcal{L}(E, F)$

La matrice de l'application linéaire  $u$  dans le couple de bases  $(\underline{e}, \underline{f})$  est la matrice notée  $\text{Mat}_{\underline{e}, \underline{f}}(u)$ , dont la description en uplet de colonnes est donnée par

$$\text{Mat}_{\underline{e}, \underline{f}}(u) := \left( \text{Mat}_{\underline{f}}(u(e_1)) \mid \text{Mat}_{\underline{f}}(u(e_2)) \mid \dots \mid \text{Mat}_{\underline{f}}(u(e_p)) \right) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$$

Ainsi, pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$

$$\left[ \text{Mat}_{\underline{e}, \underline{f}}(u) \right]_{i,j} := i\text{-ème coordonnée du vecteur } u(e_j) \in F \text{ dans la base } \underline{f}$$

**EXERCICE C24.7** — On note  $\mathcal{B}_2$  (resp.  $\mathcal{B}_3$ ) la base canonique de  $\mathbf{R}^2$  (resp.  $\mathbf{R}^3$ ). Soit  $f$  l'application linéaire définie par

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ (x, y, z) \longmapsto (x + y + z, 2x - 3y + 4z) \end{array} \right.$$

1. Déterminer  $\text{Mat}_{\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_2}(f)$ .
2. Démontrer que  $\mathcal{C}_3 := ((7, -2, -5), (1, 1, 1), (1, -1, 1))$  est une base de  $\mathbf{R}^3$  et justifier que  $\mathcal{C}_2 := ((1, 1), (1, -1))$  est une base de  $\mathbf{R}^2$ .
3. Déterminer  $\text{Mat}_{\mathcal{C}_3, \mathcal{C}_2}(f)$ .

**DÉFINITION C24.8 (MATRICE D'UN ENDOMORPHISME DANS UNE BASE)**

Soient

- $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$  muni d'une base  $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$
- $u \in \mathcal{L}(E)$

La matrice de l'endomorphisme  $u$  dans la base  $\underline{e}$  est la matrice notée  $\text{Mat}_{\underline{e}}(u) := \text{Mat}_{\underline{e}, \underline{e}}(u)$ , dont la description en uplet de colonnes est donnée par

$$\text{Mat}_{\underline{e}}(u) := \left( \text{Mat}_{\underline{e}}(u(e_1)) \mid \text{Mat}_{\underline{e}}(u(e_2)) \mid \dots \mid \text{Mat}_{\underline{e}}(u(e_n)) \right) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$$

Ainsi, pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$

$$\left[ \text{Mat}_{\underline{e}}(u) \right]_{i,j} := i\text{-ème coordonnée du vecteur } u(e_j) \in E \text{ dans la base } \underline{e}$$

**EXERCICE C24.9** — On munit le  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel  $\mathbf{C}$  de sa base canonique  $\mathcal{B}_0 := (1, i)$  et on fixe un nombre complexe  $a + ib$  où  $(a, b) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Déterminer la matrice de l'application linéaire

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C} \\ z \longmapsto (a + ib) \cdot z \end{array} \right. \quad [\text{similitude de centre } O, \text{ de rapport } |a + ib| \text{ et d'angle } \arg(a + ib), \text{ cf. C3.171}]$$

dans la base  $\mathcal{B}_0$ .

**EXERCICE C24.10** — Soient  $F := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x + y + z = 0\}$  et  $G = \{(a, a, a) : a \in \mathbf{R}\}$ .

1. Démontrer que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $\mathbf{R}^3$ .
2. On note  $\mathcal{B}_0$  la base canonique de  $\mathbf{R}^3$  et  $p$  la projection de  $\mathbf{R}^3$  sur  $F$  parallèlement à  $G$ . Calculer  $\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(p)$ .
3. Calculer  $\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(p)^2$ .
4. Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $\mathbf{R}^3$  adaptée à la décomposition  $\mathbf{R}^3 = F \oplus G$ . Que vaut  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$ ?

**PROPOSITION C24.11 (COORDONNÉES DE L'IMAGE D'UN VECTEUR PAR UNE APPLICATION LINÉAIRE)**

Soient

- $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $p \geq 1$  muni d'une base  $\underline{e} = (e_1, \dots, e_p)$
- $F$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$  muni d'une base  $\underline{f} = (f_1, \dots, f_n)$
- $u \in \mathcal{L}(E, F)$

Alors

$$\forall x \in E \quad \text{Mat}_{\underline{f}}(u(x)) = \text{Mat}_{\underline{e}, \underline{f}}(u) \times \text{Mat}_{\underline{e}}(x)$$

Démonstration — Soit  $x \in E$ . Nous démontrons que les deux matrices  $\text{Mat}_{\underline{f}}(u(x))$  et  $\text{Mat}_{\underline{e}, \underline{f}}(u) \times \text{Mat}_{\underline{e}}(x)$ , toutes deux de format  $(n, 1)$ , ont même coefficient d'adresse  $(i, 1)$ , pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

$$\begin{aligned} u(x) &= u\left(\sum_{j=1}^n [\text{Mat}_{\underline{e}}(x)]_{j,1} \cdot e_j\right) \quad [\text{définition de } \text{Mat}_{\underline{e}}(x)] \\ &= \sum_{j=1}^p [\text{Mat}_{\underline{e}}(x)]_{j,1} \cdot u(e_j) \quad [\text{linéarité de } u] \\ &= \sum_{j=1}^p [\text{Mat}_{\underline{e}}(x)]_{j,1} \cdot \sum_{i=1}^n [\text{Mat}_{\underline{e}, \underline{f}}(u)]_{i,j} \cdot f_i \quad [\text{définition de } \text{Mat}_{\underline{e}, \underline{f}}(u)] \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^p [\text{Mat}_{\underline{e}, \underline{f}}(u)]_{i,j} \cdot [\text{Mat}_{\underline{e}}(x)]_{j,1} \right) \cdot f_i \\ &= \sum_{i=1}^n [\text{Mat}_{\underline{e}, \underline{f}}(u) \times \text{Mat}_{\underline{e}}(x)]_{i,1} \cdot f_i \quad [\text{définition du produit matriciel}] \end{aligned}$$

D'après la définition de la matrice  $\text{Mat}_{\underline{f}}(u(x))$ , nous en déduisons que, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$[\text{Mat}_{\underline{e}, \underline{f}}(u) \times \text{Mat}_{\underline{e}}(x)]_{i,1} = [\text{Mat}_{\underline{f}}(u(x))]_{i,1}$$

**THÉORÈME C24.12 (ISOMORPHISME FONDAMENTAL DE  $\mathcal{L}(E, F)$  SUR  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$  ASSOCIÉ À UN COUPLE DE BASES)**

Soient

- $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $p \geq 1$  muni d'une base  $\underline{e} = (e_1, \dots, e_p)$
- $F$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$  muni d'une base  $\underline{f} = (f_1, \dots, f_n)$

L'application

$$\varphi \left| \begin{array}{l} (\mathcal{L}(E, F), +, \cdot) \longrightarrow (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}), +, \cdot) \\ u \longmapsto \text{Mat}_{\underline{e}, \underline{f}}(u) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme de  $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels.

Démonstration — • Linéarité. Soient  $(u, v) \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$ . Nous démontrons que les matrices  $\text{Mat}_{\underline{e}, \underline{f}}(\lambda \cdot u + \mu \cdot v)$  et  $\lambda \cdot \text{Mat}_{\underline{e}, \underline{f}}(u) + \mu \cdot \text{Mat}_{\underline{e}, \underline{f}}(v)$ , toutes deux de format  $(n, p)$ , ont même  $j$ -ième colonne, où  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ .

$$\begin{aligned} (\lambda \cdot u + \mu \cdot v)(e_j) &:= \lambda \cdot u(e_j) + \mu \cdot v(e_j) \\ &= \lambda \cdot \sum_{i=1}^n [\text{Mat}_{\underline{e}, \underline{f}}(u)]_{i,j} \cdot f_i + \mu \cdot \sum_{i=1}^n [\text{Mat}_{\underline{e}, \underline{f}}(v)]_{i,j} \cdot f_i \quad [\text{définitions de } \text{Mat}_{\underline{e}, \underline{f}}(u) \text{ et } \text{Mat}_{\underline{e}, \underline{f}}(v)] \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \lambda \cdot [\text{Mat}_{\underline{e}, \underline{f}}(u)]_{i,j} + \mu \cdot [\text{Mat}_{\underline{e}, \underline{f}}(v)]_{i,j} \right) \cdot f_i \end{aligned}$$

D'après la définition de la matrice  $\text{Mat}_{\underline{e}, \underline{f}}(\lambda \cdot u + \mu \cdot v)$ , il vient, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$[\text{Mat}_{\underline{e}, \underline{f}}(\lambda \cdot u + \mu \cdot v)]_{i,j} = \lambda \cdot [\text{Mat}_{\underline{e}, \underline{f}}(u)]_{i,j} + \mu \cdot [\text{Mat}_{\underline{e}, \underline{f}}(v)]_{i,j} =: [\lambda \cdot \text{Mat}_{\underline{e}, \underline{f}}(u) + \mu \cdot \text{Mat}_{\underline{e}, \underline{f}}(v)]_{i,j}$$

• Bijectivité. Nous définissons pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $u_{i,j}$  comme étant l'unique application linéaire de  $E$  dans  $F$

telle que

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad u_{i,j}(e_k) = \begin{cases} f_j & \text{si } k = i \\ 0_F & \text{si } k \neq i \end{cases}$$

Nous savons que la famille  $(u_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,p \rrbracket \times \llbracket 1,n \rrbracket}$  est une base de  $\mathcal{L}(E, F)$  (C20.74). Comme, pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\text{Mat}_{\underline{e}, \underline{f}}(u_{i,j}) = E_{j,i} := (\delta_{k,j} \cdot \delta_{i,\ell})_{(k,\ell) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,p \rrbracket}$$

l'application linéaire  $\varphi$  envoie une base de  $\mathcal{L}(E, F)$  sur une base de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ . Il s'agit donc d'un isomorphisme.

**EXERCICE C24.13** — Soient  $\mathcal{B} := (1, X, X^2)$  la base canonique de  $\mathbf{R}_2[X]$ ,  $\mathcal{C} := (e_1, e_2, e_3, e_4)$  la base canonique de  $\mathbf{R}^4$  et  $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}_2[X], \mathbf{R}^4)$  telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbf{K})$$

1. Expliciter l'application  $f$ .
2. Démontrer que l'application  $f$  est injective.
3. L'application  $f$  est-elle surjective?
4. Donner une base de  $\text{Im}(f)$ .

**THÉORÈME C24.14 (COMPOSÉE D'APPLICATIONS LINÉAIRES VS. MULTIPLICATION DE MATRICES)**

Soient

- $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $p \geq 1$  muni d'une base  $\underline{e} = (e_1, \dots, e_p)$
- $F$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$  muni d'une base  $\underline{f} = (f_1, \dots, f_n)$
- $G$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $m \geq 1$  muni d'une base  $\underline{g} = (g_1, \dots, g_m)$
- $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $v \in \mathcal{L}(F, G)$

Alors

$$\text{Mat}_{\underline{e}, \underline{g}}(v \circ u) = \text{Mat}_{\underline{f}, \underline{g}}(v) \times \text{Mat}_{\underline{e}, \underline{f}}(u)$$

Démonstration — Comme  $\text{Mat}_{\underline{e}, \underline{g}}(v \circ u) \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbf{K})$ ,  $\text{Mat}_{\underline{f}, \underline{g}}(v) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K})$  et  $\text{Mat}_{\underline{e}, \underline{f}}(u) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ , le produit matriciel  $\text{Mat}_{\underline{f}, \underline{g}}(v) \times \text{Mat}_{\underline{e}, \underline{f}}(u)$  est bien défini et les matrices  $\text{Mat}_{\underline{e}, \underline{g}}(v \circ u)$  et  $\text{Mat}_{\underline{f}, \underline{g}}(v) \times \text{Mat}_{\underline{e}, \underline{f}}(u)$  ont toutes deux le format  $(m, p)$ . Nous démontrons qu'elles ont même  $j$ -ième colonne, où  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ .

$$\begin{aligned} v(u(e_j)) &= v\left(\sum_{i=1}^n [\text{Mat}_{\underline{e}, \underline{f}}(u)]_{i,j} \cdot f_i\right) \quad \left[ \text{définition de } \text{Mat}_{\underline{e}, \underline{f}}(u) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n [\text{Mat}_{\underline{e}, \underline{f}}(u)]_{i,j} \cdot v(f_i) \quad \left[ \text{linéarité de } v \right] \\ &= \sum_{i=1}^n [\text{Mat}_{\underline{e}, \underline{f}}(u)]_{i,j} \cdot \sum_{k=1}^m [\text{Mat}_{\underline{f}, \underline{g}}(v)]_{k,i} \cdot g_k \quad \left[ \text{définition de } \text{Mat}_{\underline{f}, \underline{g}}(v) \right] \\ &= \sum_{k=1}^m \left( \sum_{i=1}^n [\text{Mat}_{\underline{f}, \underline{g}}(v)]_{k,i} \cdot [\text{Mat}_{\underline{e}, \underline{f}}(u)]_{i,j} \right) \cdot g_k \\ &= \sum_{k=1}^m [\text{Mat}_{\underline{f}, \underline{g}}(v) \times \text{Mat}_{\underline{e}, \underline{f}}(u)]_{k,j} \cdot g_k \quad \left[ \text{définition du produit matriciel} \right] \end{aligned}$$

D'après la définition de la matrice  $\text{Mat}_{\underline{e}, \underline{g}}(v \circ u)$ , il vient, pour tout  $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$

$$[\text{Mat}_{\underline{e}, \underline{g}}(v \circ u)]_{k,j} = [\text{Mat}_{\underline{f}, \underline{g}}(v) \times \text{Mat}_{\underline{e}, \underline{f}}(u)]_{k,j}$$

**COROLLAIRE C24.15 (ISOMORPHISME FONDAMENTAL DE  $\mathcal{L}(E)$  SUR  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  ASSOCIÉ À UNE BASE)**

Soit

- $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$  muni d'une base  $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$

L'application

$$\varphi \left| \begin{array}{l} (\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot) \longrightarrow (\mathcal{M}_n(\mathbf{K}), +, \times, \cdot) \\ u \longmapsto \text{Mat}_{\underline{e}}(u) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme de  $\mathbf{K}$ -algèbres, i.e. un isomorphisme de  $\mathbf{K}$ -espaces vectoriel et un isomorphisme d'anneaux.

Démonstration — • D'après C24.12, l'application  $\varphi$  est un isomorphisme de  $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels.

- D'après C24.14

$$\forall (u, v) \in \mathcal{L}(E)^2 \quad \varphi(v \circ u) := \text{Mat}_{\underline{e}}(v \circ u) = \text{Mat}_{\underline{e}}(v) \times \text{Mat}_{\underline{e}}(u) = \varphi(v) \times \varphi(u)$$

- Comme, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\text{id}_E(e_i) = e_i$ , la matrice de  $\text{id}_E$  dans la base  $\underline{e}$  est la matrice identité  $I_n$ , i.e.  $\varphi(\text{id}_E) = I_n$ .

**EXERCICE C24.16** — Soient  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$  muni d'une base  $\mathcal{B}$  et  $s$  une symétrie vectorielle de  $E$ . Calculer les puissances de la matrice  $A := \text{Mat}_{\mathcal{B}}(s) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ .

**EXERCICE C24.17** — Soient  $n \in \mathbf{N}^*$  et  $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbf{K})$  la matrice définie par

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad [A]_{i,j} := \begin{cases} 0 & \text{si } j = 1 \\ j \cdot \delta_{i,j-1} & \text{si } j \in \llbracket 2, n \rrbracket \end{cases}$$

Démontrer que la matrice  $A^{n+1}$  est nulle.

**COROLLAIRE C24.18 (LIEN ENTRE MATRICES INVERSIBLES ET ISOMORPHISMES)**

Soient

- $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $p \geq 1$  muni d'une base  $\underline{e} = (e_1, \dots, e_p)$
- $F$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$  muni d'une base  $\underline{f} = (f_1, \dots, f_n)$
- $u \in \mathcal{L}(E, F)$

On dispose des deux résultats suivants.

1. L'application linéaire  $u$  est un isomorphisme si et seulement si  $p = n$  et la matrice  $\text{Mat}_{\underline{e}, \underline{f}}(u)$  est inversible.
2. Si l'application linéaire  $u$  est un isomorphisme, alors

$$\text{Mat}_{\underline{f}, \underline{e}}(u^{-1}) = \left( \text{Mat}_{\underline{e}, \underline{f}}(u) \right)^{-1}$$

Démonstration —  $\Rightarrow$  Supposons que  $f$  est un isomorphisme. Alors  $E$  et  $F$  ont même dimension, i.e.  $p = n$ . L'existence de l'isomorphisme réciproque de  $u$  et C24.14 nous permettent d'écrire

$$\text{Mat}_{\underline{e}, \underline{f}}(u) \times \text{Mat}_{\underline{f}, \underline{e}}(u^{-1}) = \text{Mat}_{\underline{f}, \underline{f}}(u \circ u^{-1}) = \text{Mat}_{\underline{f}, \underline{f}}(\text{id}_F) = I_n$$

et

$$\text{Mat}_{\underline{f}, \underline{e}}(u^{-1}) \times \text{Mat}_{\underline{e}, \underline{f}}(u) = \text{Mat}_{\underline{e}, \underline{e}}(u^{-1} \circ u) = \text{Mat}_{\underline{e}, \underline{e}}(\text{id}_E) = I_n$$

La matrice  $\text{Mat}_{\underline{e}, \underline{f}}(u)$  est donc inversible et son inverse est la matrice  $\text{Mat}_{\underline{f}, \underline{e}}(u^{-1})$ .

$\Leftarrow$  Supposons  $p = n$  et  $A := \text{Mat}_{\underline{e}, \underline{f}}(u)$  inversible. D'après C24.12, il existe une unique application linéaire  $v \in \mathcal{L}(F, E)$  telle que

$$\text{Mat}_{\underline{f}, \underline{e}}(v) = A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$$

D'après C24.14

$$\text{Mat}_{\underline{f}, \underline{f}}(u \circ v) = \text{Mat}_{\underline{e}, \underline{f}}(u) \times \text{Mat}_{\underline{f}, \underline{e}}(v) = A \times A^{-1} = I_n = \text{Mat}_{\underline{f}, \underline{f}}(\text{id}_F)$$

et

$$\text{Mat}_{\underline{e}, \underline{e}}(v \circ u) = \text{Mat}_{\underline{f}, \underline{e}}(v) \times \text{Mat}_{\underline{e}, \underline{f}}(u) = A^{-1} \times A = I_n = \text{Mat}_{\underline{e}, \underline{e}}(\text{id}_E)$$

D'après C24.12, il vient  $u \circ v = \text{id}_F$  et  $v \circ u = \text{id}_E$ . Donc  $u$  est un isomorphisme.

**EXERCICE C24.19** — Soient  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $\mathcal{B} := (1, X, \dots, X^n)$  la base canonique de  $\mathbf{K}_n[X]$  et

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{K}_n[X] \longrightarrow \mathbf{K}_n[X] \\ P \longrightarrow P + P' \end{array} \right.$$

1. Démontrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbf{K}_n[X]$ .
2. Calculer la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
3. En déduire que  $f$  est un automorphisme de  $\mathbf{K}_n[X]$ .

## § 2. APPLICATION LINÉAIRE CANONIQUEMENT ASSOCIÉE À UNE MATRICE

**NOTATION C24.20** — Dans cette partie

- pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ , pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $X_{n,i}$  est le vecteur de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$  dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la ligne  $i$  qui vaut 1 ;
- pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $\mathcal{B}_n = (X_{n,1}, X_{n,2}, \dots, X_{n,n})$  désigne la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$  ;
- les lettres  $n$  et  $p$  désignent des entiers naturels non nuls.

**DÉFINITION C24.21 (APPLICATION LINÉAIRE CANONIQUEMENT ASSOCIÉE À UNE MATRICE)**

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ . L'application linéaire canoniquement associée à  $A$ , notée  $\varphi_A$ , est définie par

$$\varphi_A \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ X \longmapsto AX \end{array} \right.$$

Elle est caractérisée par  $\text{Mat}_{\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_n}(\varphi_A) = A$ .

**PROPOSITION C24.22 (NOYAU D'UNE MATRICE)**

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ . Le noyau de  $A$ , défini par  $\text{Ker}(A) := \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K}) : AX = \mathbf{0}_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})}\}$ , vérifie

$$\text{Ker}(A) = \text{Ker}(\varphi_A) \quad [\text{sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})]$$

Il s'agit de l'ensemble solution du système linéaire homogène associé à la matrice  $A$ .

**PROPOSITION C24.23 (IMAGE D'UNE MATRICE)**

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ . L'image de  $A$ , défini par  $\text{Im}(A) := \{AX : X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})\}$ , vérifie

$$\text{Im}(A) = \text{Im}(\varphi_A) \quad [\text{sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})]$$

Si  $C_1, C_2, \dots, C_p$  désignent les vecteurs colonnes de  $A$ , alors

$$\text{Im}(A) = \text{Vect}(C_1, C_2, \dots, C_p) \quad [\text{les vecteurs colonnes de } A \text{ engendrent son image}]$$

**PROPOSITION C24.24 (RANG D'UNE MATRICE)**

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ . Le rang de  $A$ , défini par  $\text{Rg}(A) := \dim(\text{Im}(A))$ , vérifie

$$\text{Rg}(A) = \text{Rg}(\varphi_A)$$

Il possède les deux propriétés suivantes

$$\text{Rg}(A) + \dim(\text{Ker}(A)) = p \quad \text{et} \quad \text{Rg}(A) \leq \min\{n, p\}$$

**RAPPEL C24.25** — Soient  $E, F, G$  des  $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie,  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $v \in \mathcal{L}(F, G)$ . Nous savons (C20.35) que si  $v$  est un isomorphisme, alors  $\text{Rg}(v \circ u) = \text{Rg}(u)$  et si  $u$  est un isomorphisme, alors  $\text{Rg}(v \circ u) = \text{Rg}(v)$ .

**PROPOSITION C24.26 (INVARIANCE DU RANG D'UNE MATRICE PAR MULTIPLICATION PAR UNE MATRICE INVERSIBLE)**

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ .

1. Si  $P \in \text{GL}_n(\mathbf{K})$  alors  $\text{Rg}(PA) = \text{Rg}(A)$ .
2. Si  $Q \in \text{GL}_p(\mathbf{K})$  alors  $\text{Rg}(AQ) = \text{Rg}(A)$ .

**THÉORÈME C24.27 (CALCUL DU RANG D'UNE MATRICE PAR L'ALGORITHME DU PIVOT DE GAUSS)**

Soit

- $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$
- $E \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$  une matrice échelonnée obtenue en appliquant l'algorithme du pivot de Gauss à  $A$
- $r$  le nombre de pivots de  $E$

Alors

$$\text{Rg}(A) = r$$

**EXERCICE C24.28** — Calculer le rang et une base de l'image de la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**EXERCICE C24.29** — Calculer le rang et une base de l'image de la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

**THÉORÈME C24.30 (CRITÈRES D'INVERSIBILITÉ D'UNE MATRICE)**

Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  dont les colonnes sont notées  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . Les assertions suivantes sont équivalentes.

1.  $A$  est inversible.
2.  $\text{Ker}(A) = \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})}\}$
3.  $\text{Vect}(C_1, C_2, \dots, C_n) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$
4.  $\text{Rg}(A) = n$

**EXERCICE C24.31** — Soit  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  une matrice nilpotente. Démontrer que la matrice  $I_n + N$  est inversible.

**EXERCICE C24.32** — Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ . On suppose qu'il existe un polynôme  $P \in \mathbf{K}[X]$  tel que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} [P]_k \cdot A^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})}$$

Démontrer que  $A$  est inversible si et seulement si  $\tilde{P}(0) \neq 0$ .

**EXERCICE C24.33** — Soit la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3\mathbf{R}$$

1. Déterminer le spectre de  $A$  défini par  $\text{Spec}_{\mathbf{R}}(A) := \{\lambda \in \mathbf{R} : A - \lambda \cdot I_3 \notin \text{GL}_3(\mathbf{R})\}$ .
2. Déterminer, pour tout  $\lambda \in \text{Spec}_{\mathbf{R}}(A)$ , une base de  $E_\lambda(A) := \text{Ker}(A - \lambda \cdot I_3)$ .

**THÉORÈME C24.34 (INVERSIBILITÉ À GAUCHE, INVERSIBILITÉ À DROITE ET INVERSIBILITÉ D'UNE MATRICE)**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ .

1. S'il existe  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  telle que  $AB = I_n$  alors  $A$  est inversible et  $A^{-1} = B$ .
2. S'il existe  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  telle que  $BA = I_n$  alors  $A$  est inversible et  $A^{-1} = B$ .

### § 3. SYSTÈMES LINÉAIRES

#### PROPOSITION C24.35 (SOLUTIONS D'UN SYSTÈME LINÉAIRE HOMOGENÈ)

Soient

- $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$
- $(SH)$  le système linéaire homogène  $AX = 0$  d'inconnue  $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$
- $\text{Sol}(SH) := \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K}) : AX = 0\}$  l'ensemble solution de  $(SH)$

$\text{Sol}(SH)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$  dont la dimension est  $p - \text{Rg}(A)$ .

#### PROPOSITION C24.36 (SOLUTIONS D'UN SYSTÈME LINÉAIRE)

Soient

- $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$
- $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$
- $(S)$  le système linéaire  $AX = B$  d'inconnue  $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$
- $(SH)$  le système linéaire homogène  $AX = 0$  associé à  $(S)$  d'inconnue  $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$
- $\text{Sol}(S) := \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K}) : AX = B\}$  l'ensemble solution de  $(S)$
- $\text{Sol}(SH) := \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K}) : AX = 0\}$  l'ensemble solution de  $(SH)$

Alors

1.  $(S)$  est compatible si et seulement si  $B \in \text{Im}(A)$
2. si  $(S)$  est compatible et  $X_p$  est une solution « particulière » de  $(S)$

$$\text{Sol}(S) = \{X_p + X : X \in \text{Sol}(SH)\} \quad [\text{sous-espace affine de } \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K}) \text{ de dimension } p - \text{Rg}(A)]$$

#### PROPOSITION C24.37 (SYSTÈME DE CRAMER)

Soient

- $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$
- $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$
- $(S)$  le système linéaire  $AX = B$  d'inconnue  $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$

Si  $n = p$  et si  $A \in \text{GL}_n(\mathbf{K})$  alors le système  $(S)$  est dit de Cramer et il possède une unique solution donnée par  $X = A^{-1}B$ .

**EXERCICE C24.38** — Étudier, pour tout  $\lambda \in \mathbf{R}$ , le système linéaire

$$\begin{cases} -\lambda \cdot x + y + z = 1 \\ x - \lambda y + z = 1 \\ x + y - \lambda z = 1 \end{cases}$$

d'inconnue  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ .

### § 4. CHANGEMENTS DE BASES

#### DÉFINITION C24.39 (MATRICE DE PASSAGE D'UNE BASE À UNE AUTRE)

Soient

- $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$
- $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$
- $\underline{f} = (f_1, \dots, f_n)$  une base de  $E$

La matrice de passage de la base  $\underline{e}$  à la base  $\underline{f}$  est la matrice notée  $P_{\underline{e} \rightarrow \underline{f}}$  définie par

$$P_{\underline{e} \rightarrow \underline{f}} := \text{Mat}_{\underline{f}, \underline{e}}(\text{id}_E) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$$

Pour tout  $j \in [1, n]$ , la  $j$ -ème colonne de la matrice  $P_{\underline{e} \rightarrow \underline{f}}$  est formée des coordonnées du vecteurs  $f_j$  dans la base  $\underline{e}$ .

**EXEMPLE C24.40** — Soient  $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbf{R}^3$  et

$$\underline{f} := (f_1 = (1, 1, -1), f_2 = (1, 2, 1), f_3 = (1, -1, 2))$$

Démontrer que  $\underline{f}$  est une base de  $\mathbf{R}^3$ , puis calculer les matrices  $P_{\underline{e} \rightarrow \underline{f}}$  et  $P_{\underline{f} \rightarrow \underline{e}}$ .

**PROPOSITION C24.41 (INVERSIBILITÉ ET INVERSE D'UNE MATRICE DE PASSAGE)**

Soient

- $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$
- $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$
- $\underline{f} = (f_1, \dots, f_n)$  une base de  $E$

La matrice  $P_{\underline{e} \rightarrow \underline{f}}$  est inversible et

$$(P_{\underline{e} \rightarrow \underline{f}})^{-1} = P_{\underline{f} \rightarrow \underline{e}}$$

**EXERCICE C24.42** — Justifier que la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$$

est inversible et donner son inverse.

**PROPOSITION C24.43 (EFFET D'UN CHANGEMENT DE BASE SUR LA MATRICE D'UN VECTEUR)**

Soient

- $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$
- $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$
- $\underline{f} = (f_1, \dots, f_n)$  une base de  $E$

Alors

$$\forall x \in E \quad \text{Mat}_{\underline{e}}(x) = P_{\underline{e} \rightarrow \underline{f}} \times \text{Mat}_{\underline{f}}(x)$$

**THÉORÈME C24.44 (EFFET D'UN CHANGEMENT DU COUPLE DE BASES SUR LA MATRICE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE)**

Soient

- $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $p \geq 1$
- $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  deux bases de  $E$
- $F$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$
- $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  deux bases de  $F$

Alors

$$\forall u \in \mathcal{L}(E, F) \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{C}_2}(u) = (P_{\mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2})^{-1} \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1}(u) \times P_{\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2}$$

**COROLLAIRE C24.45 (EFFET D'UN CHANGEMENT DE BASE SUR LA MATRICE D'UN ENDOMORPHISME)**

Soient

- $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$
- $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  deux bases de  $E$

Alors

$$\forall u \in \mathcal{L}(E) \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(u) = (P_{\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2})^{-1} \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u) \times P_{\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2}$$

**EXERCICE C24.46** — Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$  canoniquement associé à la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$$

1. Déterminer la spectre de  $f$  défini par

$$\text{Spec}(f) := \{\lambda \in \mathbf{R} : f - \lambda \cdot \text{id} \text{ n'est pas un automorphisme de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})\}$$

Indication : Notons la base canonique de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$  est notée  $\mathcal{B}_3$  et fixons  $\lambda \in \mathbf{R}$ . Alors

$$\begin{aligned} f - \lambda \cdot \text{id} \text{ n'est pas un automorphisme de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R}) &\iff \text{Mat}_{\mathcal{B}_3}(f - \lambda \cdot \text{id}) \notin \text{GL}_3(\mathbf{R}) && \text{[C24.18]} \\ &\iff \text{Rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}_3}(f - \lambda \cdot \text{id})) < 3 && \text{[C24.30]} \end{aligned}$$

On procède alors au calcul du rang de

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_3}(f - \lambda \cdot \text{id}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_3}(f) - \lambda \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}_3}(\text{id}) = A - \lambda \cdot I_3$$

en appliquant l'algorithme du pivot de Gauß.

2. On note  $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$  les éléments de  $\text{Spec}_{\mathbf{R}}(f)$ . Déterminer, pour tout  $i \in \{0, 1, 2\}$ , un vecteur de base  $u_i$  de  $E_{\lambda_i}(f) := \text{Ker}(f - \lambda_i \cdot \text{id})$ .

Indication : Fixons  $i \in \{0, 1, 2\}$  et  $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ . D'après la question 1, nous savons que  $\text{Ker}(f - \lambda_i \cdot \text{id}) \neq \{0\}$ .

$$\begin{aligned} X \in \text{Ker}(f - \lambda_i \cdot \text{id}) &\iff (f - \lambda_i \cdot \text{id})(X) = 0 \\ &\iff \text{Mat}_{\mathcal{B}_3}((f - \lambda_i \cdot \text{id})(X)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_3}(0) \\ &\iff \text{Mat}_{\mathcal{B}_3}(f - \lambda_i \cdot \text{id}) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_3}(X) = 0 && \text{[C24.11]} \\ &\iff (A - \lambda_i \cdot I_3) \times X = 0 && [\text{Mat}_{\mathcal{B}_3}(X) = X] \end{aligned}$$

On résout alors le système linéaire homogène  $(A - \lambda_i \cdot I_3) \times X = 0$ , d'inconnue  $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ , en appliquant l'algorithme du pivot de Gauß.

3. Démontrer que  $\mathcal{B} := (u_1, u_2, u_3)$  est une base de  $\mathbf{R}^3$ .

Indication : On démontre la liberté de la famille  $(u_1, u_2, u_3)$ , en introduisant un système linéaire homogène que l'on résout avec l'algorithme du pivot de Gauß. On conclut avec un argument de cardinalité-dimension.

4. Calculer la matrice  $D$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

Indication : On s'appuie sur la définition et on observe que, par construction, pour tout  $i \in \{0, 1, 2\}$ ,  $f(u_i) = \lambda_i \cdot u_i$ .

5. Déterminer une matrice  $P \in \text{GL}_3(\mathbf{R})$  telle que

$$A = P \times D \times P^{-1}$$

Indication : Il s'agit d'un point essentiel. Le théorème de changement de base, appliqué avec rigueur et précision, est la clé.

6. En déduire les puissances de  $A$ .

Indication : Démontrer que, pour tout  $k \in \mathbf{N}$

$$A^k = P \times D^k \times P^{-1}$$

Les puissances d'une matrice diagonale sont aisées à calculer. Il reste à déterminer  $P^{-1}$  et à calculer deux produits matriciels.

**EXERCICE C24.47** — Adapter la démarche de l'exercice C24.46 pour déterminer une matrice  $P \in \text{GL}_3(\mathbf{R})$  et une matrice diagonale  $D \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$  telles que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = P \times D \times P^{-1}$$

## § 5. MATRICES ÉQUIVALENTES ET RANG

**NOTATION C24.48** — Dans cette partie, les entiers  $n$  et  $p$  désignent des entiers naturels non nuls.

**RAPPEL C24.49** — Pour tout  $r \in [0, \min\{n, p\}]$ , on note  $J_{n,p}(r)$  la matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$  définie par

$$J_{n,p}(r) = \begin{cases} 0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})} & \text{si } r = 0 \\ \sum_{i=1}^r E_{i,i} & \text{si } r \geq 1 \end{cases} \quad [\text{matrice de Jordan}]$$

**EXEMPLE C24.50** —  $J_{3,4}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $J_{5,6}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

### THÉORÈME C24.51 (REPRÉSENTATION D'UNE APPLICATION LINÉAIRE PAR UNE MATRICE DE JORDAN)

Soient

- $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $p$
- $F$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$
- $u \in \mathcal{L}(E, F)$
- $r := \text{Rg}(u)$

Il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  et une base  $\mathcal{C}$  de  $F$  telles que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) = J_{n,p}(r)$$

**EXERCICE C24.52** — Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^4, \mathbf{R}^3)$  l'application définie par

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^4 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) & \longmapsto & (x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4, x_3 + x_4) \end{array} \right.$$

Déterminer une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbf{R}^4$  et une base  $\mathcal{C}$  de  $\mathbf{R}^3$  telles que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) = J_{3,4}(2)$$

### DÉFINITION C24.53 (MATRICES ÉQUIVALENTES)

Soit  $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})^2$ . Les matrices  $A$  et  $B$  sont dites équivalentes si

$$\exists (P, Q) \in \text{GL}_n(\mathbf{K}) \times \text{GL}_p(\mathbf{K}) \quad A = P^{-1} \times B \times Q$$

Dans ce cas, on note  $A \equiv B$ .

### PROPOSITION C24.54 (PROPRIÉTÉS DE LA RELATION $\equiv$ SUR $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ )

La relation  $\equiv$  est une relation d'équivalence sur  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ .

### PROPOSITION C24.55 (MATRICES ÉQUIVALENTES ET REPRÉSENTATION D'UNE APP. LIN. DANS DES COUPLES DE BASES)

Soit  $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})^2$ . Les matrices  $A$  et  $B$  sont équivalentes si et seulement s'il existe

- $u \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$
- $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$  deux bases de  $\mathbf{K}^p$
- $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  deux bases de  $\mathbf{K}^n$

tels que  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1}(u)$  et  $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{C}_2}(u)$ .

**THÉORÈME C24.56 (MATRICES DE RANG  $r$  VS. MATRICES ÉQUIVALENTES À  $J_{n,p}(r)$ )**

Soient  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$  et  $r \in \llbracket 0, \min\{n, p\} \rrbracket$ .

$$\text{Rg}(A) = r \iff A \equiv J_{n,p}(r)$$

**COROLLAIRE C24.57 (CARACTÉRISATION DES MATRICES ÉQUIVALENTES PAR LE RANG)**

Deux matrices de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$  sont équivalentes si et seulement si elles possèdent le même rang.

**REMARQUE C24.58** — Les matrices  $J_{n,p}(r)$ , où  $r \in \llbracket 0, \min\{n, p\} \rrbracket$ , forment une liste exhaustive et sans répétition des classes d'équivalences de la relation  $\equiv$  sur  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ .

**EXERCICE C24.59** — Les matrices  $A$  et  $B$  définies ci-dessous sont-elles équivalentes?

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & 5 & 7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbf{K}) \quad \text{et} \quad B := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbf{K})$$

**PROPOSITION C24.60 (RANG DE LA TRANSPOSÉE D'UNE MATRICE)**

Pour tout  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$

$$\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A^\top)$$

**DÉFINITION C24.61 (MATRICE EXTRAITE D'UNE MATRICE)**

Soient  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$  et  $r \in \llbracket 0, \min\{n, p\} \rrbracket$ . On appelle matrice extraite de  $A$  de format  $(r, r)$  toute matrice de la forme

$$A_{\alpha,\beta} := ([A]_{\alpha(i),\beta(j)})_{(i,j) \in \llbracket 1,r \rrbracket^2} \in \mathcal{M}_r(\mathbf{K})$$

où

- $\alpha: \llbracket 1, r \rrbracket \longrightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$  est une application strictement croissante
- $\beta: \llbracket 1, r \rrbracket \longrightarrow \llbracket 1, p \rrbracket$  est une application strictement croissante

La matrice  $A_{\alpha,\beta}$  est obtenue en supprimant les lignes d'indices autres que  $\alpha(1), \dots, \alpha(r)$  et les colonnes d'indices autres que  $\beta(1), \dots, \beta(r)$ .

**EXERCICE C24.62** — Donner toutes les matrices extraites de format  $(2, 2)$  de la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & -1 \\ 5 & -3 & 4 & 6 \\ 9 & 0 & -2 & 8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbf{K})$$

**NOTATION C24.63** — Pour tout  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ , pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$

- $A_{\bullet, j}$  désigne la  $j$ -ème colonne de  $A$
- $A_{i, \bullet}$  désigne la  $i$ -ème ligne de  $A$

**LEMME C24.64 (RANG D'UNE MATRICE ET SUPPRESSION DE COLONNES/LIGNES)**

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ .

1. Si  $r \in \llbracket 1, p \rrbracket$  et  $\beta \in \llbracket 1, r \rrbracket \longrightarrow \llbracket 1, p \rrbracket$  est une application strictement croissante, alors

$$\text{Rg}((A_{\bullet, \beta(1)} \mid A_{\bullet, \beta(2)} \mid \dots \mid A_{\bullet, \beta(r)})) \leq \text{Rg}(A)$$

2. Si  $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $\alpha \in \llbracket 1, r \rrbracket \longrightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$  est une application strictement croissante, alors

$$\text{Rg}((A_{\alpha(1), \bullet} \mid A_{\alpha(2), \bullet} \mid \dots \mid A_{\alpha(r), \bullet})) \leq \text{Rg}(A)$$

**PROPOSITION C24.65 (RANG D'UNE MATRICE EXTRAITE)**

Soient

- $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$
- $r \in \llbracket 0, \min\{n, p\} \rrbracket$
- $\alpha: \llbracket 1, r \rrbracket \longrightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$  est une application strictement croissante
- $\beta: \llbracket 1, r \rrbracket \longrightarrow \llbracket 1, p \rrbracket$  est une application strictement croissante

Alors

$$\operatorname{Rg}(A_{\alpha,\beta}) \leq \operatorname{Rg}(A)$$

**EXERCICE C24.66** — Soient

- $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$
- $r \in \llbracket 0, \min\{n, p\} \rrbracket$
- $\alpha: \llbracket 1, r \rrbracket \longrightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$  est une application strictement croissante
- $\beta: \llbracket 1, r \rrbracket \longrightarrow \llbracket 1, p \rrbracket$  est une application strictement croissante

On note

- $\mathcal{B}_p = (e_{p,1}, e_{p,2}, \dots, e_{p,p})$  la base canonique de  $\mathbf{K}^p$
- $\mathcal{B}_n = (e_{n,1}, e_{n,2}, \dots, e_{n,n})$  la base canonique de  $\mathbf{K}^n$
- $\mathcal{B}_r = (e_{r,1}, e_{r,2}, \dots, e_{r,r})$  la base canonique de  $\mathbf{K}^r$
- $\varphi_A \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$  l'application linéaire définie par  $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_n}(\varphi_A) = A$

Soient  $\iota \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^r, \mathbf{K}^p)$  définie par

$$\forall j \in \llbracket 1, r \rrbracket \quad \iota(e_{r,j}) = e_{p,\beta(j)}$$

et  $\pi \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^n, \mathbf{K}^p)$  définie par

$$\pi \left| \begin{array}{l} \mathbf{K}^n \longrightarrow \mathbf{K}^p \\ x = \sum_{k=1}^n x_k \cdot e_{n,k} \longmapsto \sum_{i=1}^r x_{\alpha(i)} \cdot e_{r,i} \end{array} \right.$$

1. Calculer  $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_r}(\pi \circ \varphi_A \circ \iota)$ .
2. En déduire le résultat de C24.65.

**THÉORÈME C24.67 (CARACTÉRISATION D'UNE MATRICE DE RANG PLUS PETIT QUE  $r$  PAR SES MATRICES EXTRAITES)**

Soient

- $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$
- $r \in \llbracket 0, \min\{n, p\} \rrbracket$

Alors

$$\operatorname{Rg}(A) < r \iff \text{toute matrice extraite de } A \text{ de format } (r, r) \text{ est non-inversible}$$

**COROLLAIRE C24.68 (CARACTÉRISATION DU RANG D'UNE MATRICE PAR SES MATRICES EXTRAITES)**

Soient

- $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$
- $r \in \llbracket 0, \min\{n, p\} \rrbracket$

Si  $r < \min\{n, p\}$ 

$$\operatorname{Rg}(A) = r \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{toute matrice extraite de } A \text{ de format } (r+1, r+1) \text{ est non-inversible} \\ \text{et} \\ \text{il existe une matrice extraite de } A \text{ de format } (r, r) \text{ qui est inversible} \end{array} \right.$$

et

$$\operatorname{Rg}(A) = \min\{n, p\} \iff \text{il existe une matrice extraite de } A \text{ de format } (\min\{n, p\}, \min\{n, p\}) \text{ qui est inversible}$$

## § 6. MATRICES SEMBLABLES ET TRACE

**NOTATION C24.69** — Dans cette partie,  $n$  désigne un entier naturel non nul.

**DÉFINITION C24.70 (MATRICES SEMBLABLES)**

Soit  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2$ . Les matrices  $A$  et  $B$  sont dites semblables si

$$\exists P \in \text{GL}_n(\mathbf{K}) \quad A = P^{-1} \times B \times P$$

Dans ce cas, on note  $A \sim B$ .

**EXERCICE C24.71** — Que dire d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  semblable à  $I_n$  ?

**PROPOSITION C24.72 (PROPRIÉTÉS DE LA RELATION  $\sim$  SUR  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ )**

La relation  $\sim$  est une relation d'équivalence sur  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ .

**PROPOSITION C24.73 (MATRICES ÉQUIVALENTES ET REPRÉSENTATION D'UN ENDOMORPHISME DANS DES BASES)**

Soit  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2$ . Les matrices  $A$  et  $B$  sont semblables si et seulement s'il existe

- $u \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^n)$
- $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$  deux bases de  $\mathbf{K}^n$

tels que  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u)$  et  $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(u)$ .

**EXERCICE C24.74** — Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  telle que  $A^2 = I_n$ ,  $A \neq I_n$  et  $A \neq -I_n$ . Démontrer qu'il existe  $r \in [1, n-1]$  tel que

$$A \sim \begin{pmatrix} I_r & 0_{\mathcal{M}_{r, n-r}(\mathbf{K})} \\ 0_{\mathcal{M}_{n-r, r}(\mathbf{K})} & -I_{n-r} \end{pmatrix}$$

**EXERCICE C24.75** — Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  telle que  $A^2 = A$ ,  $A \neq I_n$  et  $A \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})}$ . Démontrer qu'il existe  $r \in [1, n-1]$  tel que

$$A \sim \begin{pmatrix} I_r & 0_{\mathcal{M}_{r, n-r}(\mathbf{K})} \\ 0_{\mathcal{M}_{n-r, r}(\mathbf{K})} & 0_{\mathcal{M}_r(\mathbf{K})} \end{pmatrix}$$

**DÉFINITION C24.76 (TRACE D'UNE MATRICE CARRÉE)**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ . La trace de  $A$ , notée  $\text{Tr}(A)$ , est définie par

$$\text{Tr}(A) := \sum_{i=1}^n [A]_{i,i} \quad \left[ \text{somme des coefficients diagonaux de } A \right]$$

**PROPOSITION C24.77 (PROPRIÉTÉS DE LA TRACE D'UNE MATRICE CARRÉE)**

La trace d'une matrice carrée possède les trois propriétés fondamentales suivantes.

1. Linéarité

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2 \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2 \quad \text{Tr}(\lambda \cdot A + \mu \cdot B) = \lambda \cdot \text{Tr}(A) + \mu \cdot \text{Tr}(B)$$

2. Caractère central

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2 \quad \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$$

3. Invariance par similitude

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2 \quad A \sim B \implies \text{Tr}(A) = \text{Tr}(B)$$

**EXERCICE C24.78** — Les matrices  $A$  et  $B$  définies ci-dessous sont-elles semblables ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \\ -7 & -8 & -9 \end{pmatrix}$$

**EXERCICE C24.79** — Soit  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2$ . Justifier

$$A \sim B \implies A \equiv B$$

La réciproque est-elle vraie?

**EXERCICE C24.80** — Les matrices  $A$  et  $B$  définies ci-dessous sont-elles semblables?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

**PROPOSITION-DÉFINITION C24.81 (TRACE D'UN ENDOMORPHISME D'UN ESPACE VECTORIEL DE DIMENSION FINIE)**

Soient

- $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$
- $u \in \mathcal{L}(E)$

La trace de  $u$ , notée  $\text{Tr}(u)$ , est définie par

$$\text{Tr}(u) := \text{Tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u))$$

où  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ . Le nombre  $\text{Tr}(u)$  est indépendant de la base  $\mathcal{B}$  considérée.

**PROPOSITION C24.82 (PROPRIÉTÉS DE LA TRACE D'UN ENDOMORPHISME)**

Soit  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ .

1. Linéarité

$$\forall (u, v) \in \mathcal{L}(E)^2 \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2 \quad \text{Tr}(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) = \lambda \cdot \text{Tr}(u) + \mu \cdot \text{Tr}(v)$$

2. Caractère central

$$\forall (u, v) \in \mathcal{L}(E)^2 \quad \text{Tr}(u \circ v) = \text{Tr}(v \circ u)$$

**EXERCICE C24.83** — Soit  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle et  $p$  un projecteur de  $E$ . Démontrer que  $\text{Tr}(p) = \text{Rg}(p)$ .