CHAPITRE N°24
MATRICES

NOTATION C24.1 — Dans tout ce document, la lettre $\mathbf{K}$ désigne un corps qui peut être $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

§ 1. MATRICE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE DANS DES BASES

DÉFINITION C24.2 (MATRICE D'UN VECTEUR DANS UNE BASE)
Soient
- E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$
- $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E

Si $x \in E$, il existe un unique $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n$ tel que

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i \qquad \text{[l'existence (resp. l'unicité) vient du caractère générateur (resp. libre) de } \underline{e}\text{]}$$

La matrice du vecteur x dans $\underline{e}$, notée $\mathrm{Mat}_{\underline{e}}(x)$ est vecteur colonne défini par $\mathrm{Mat}_{\underline{e}}(x) := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

REMARQUE C24.3 — On garde les mêmes notations que celles de C24.2. L'application

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K}) & \longrightarrow & E \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i \end{array} \right.$$

est linéaire (exercice laissé au lecteur), injective ($\underline{e}$ est libre) et surjective ($\underline{e}$ est génératrice de E). Il s'agit donc d'un isomorphisme. Son application réciproque, qui est elle aussi un isomorphisme, est

$$\mathrm{Mat}_{\underline{e}} \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ x & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\underline{e}}(x) \end{array} \right.$$

EXERCICE C24.4 — On note $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
1. Déterminer la matrice de $u = (1, 2, 3)$ dans la base $\mathscr{B}_0$.
2. Déterminer le vecteur $v \in \mathbf{R}^3$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(v) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.
3. Justifier que la famille $\mathscr{B} := \big(f_1 = (0,1,1), f_2 = (1,0,1), f_3 = (1,1,0)\big)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
4. Déterminer la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$.
5. Déterminer le vecteur $w \in \mathbf{R}^3$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(w) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

EXERCICE C24.5 — Soient $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$ et $\mathscr{B}_0$ la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$.
1. Déterminer la matrice de $A = X^n - 2X + 3$ dans la base $\mathscr{B}_0$.
2. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on définit le polynôme P_k par $P_k := \sum_{i=1}^{k} X_i$. Démontrer que la famille $\mathscr{B} := (P_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.
3. Déterminer la matrice de X^n dans la base $\mathscr{B}_0$.

DÉFINITION C24.6 (MATRICE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE DANS UN COUPLE DE BASES)
Soient

- E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $p \geqslant 1$ muni d'une base $\underline{e} = (e_1, \dots, e_p)$
- F un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ muni d'une base $\underline{f} = (f_1, \dots, f_n)$
- $u \in \mathscr{L}(E, F)$

La matrice de l'application linéaire u dans le couple de bases $\left(\underline{e}, \underline{f}\right)$ est la matrice notée $\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}(u)$, dont la description en uplet de colonnes est donnée par

$$\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}(u) := \Big(\quad \mathrm{Mat}_{\underline{f}}(u(e_1)) \quad | \quad \mathrm{Mat}_{\underline{f}}(u(e_2)) \quad | \quad \dots \quad | \quad \mathrm{Mat}_{\underline{f}}(u(e_p)) \quad \Big) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$$

Ainsi, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$

$$\left[\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}(u)\right]_{i,j} := i\text{-ème coordonnée du vecteur } u(e_j) \in F \text{ dans la base } \underline{f}$$

EXERCICE C24.7 — On note $\mathscr{B}_2$ (resp. $\mathscr{B}_3$) la base canonique de $\mathbf{R}^2$ (resp. $\mathbf{R}^3$). Soit f l'application linéaire définie par

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x+y+z, 2x-3y+4z) \end{array} \right.$$

1. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_3,\mathscr{B}_2}(f)$.
2. Démontrer que $\mathscr{C}_3 := ((7,-2,-5), (1,1,1), (1,-1,1))$ est une base de $\mathbf{R}^3$ et justifier que $\mathscr{C}_2 := ((1,1), (1,-1))$ est une base de $\mathbf{R}^2$.
3. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}_3,\mathscr{C}_2}(f)$.

DÉFINITION C24.8 (MATRICE D'UN ENDOMORPHISME DANS UNE BASE)
Soient

- E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ muni d'une base $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$
- $u \in \mathscr{L}(E)$

La matrice de l'endomorphisme u dans la base $\underline{e}$ est la matrice notée $\mathrm{Mat}_{\underline{e}}(u) := \mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{e}}(u)$, dont la description en uplet de colonnes est donnée par

$$\mathrm{Mat}_{\underline{e}}(u) := \Big(\quad \mathrm{Mat}_{\underline{e}}(u(e_1)) \quad | \quad \mathrm{Mat}_{\underline{e}}(u(e_2)) \quad | \quad \dots \quad | \quad \mathrm{Mat}_{\underline{e}}(u(e_n)) \quad \Big) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$$

Ainsi, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$

$$\left[\mathrm{Mat}_{\underline{e}}(u)\right]_{i,j} := i\text{-ème coordonnée du vecteur } u(e_j) \in E \text{ dans la base } \underline{e}$$

EXERCICE C24.9 — On munit le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{C}$ de sa base canonique $\mathscr{B}_0 := (1, i)$ et on fixe un nombre complexe $a + ib$ où $(a, b) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Déterminer la matrice de l'application linéaire

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & (a+ib) \cdot z \end{array} \right. \qquad \left[\text{similitude de centre } O, \text{ de rapport } |a+ib| \text{ et d'angle } \arg(a+ib), \text{ cf. C3.171}\right]$$

dans la base $\mathscr{B}_0$.

EXERCICE C24.10 — Soient $F := \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ x + y + z = 0\right\}$ et $G = \{(a, a, a) \ : \ a \in \mathbf{R}\}$.

1. Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbf{R}^3$.
2. On note $\mathscr{B}_0$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$ et p la projection de $\mathbf{R}^3$ sur F parallèlement à G. Calculer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(p)$.
3. Calculer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(p)^2$.
4. Soit $\mathscr{B}$ une base de $\mathbf{R}^3$ adaptée à la décomposition $\mathbf{R}^3 = F \oplus G$. Que vaut $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p)$?

Proposition C24.11 (coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire)
Soient
- E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $p \geqslant 1$ muni d'une base $\underline{e} = (e_1, \ldots, e_p)$
- F un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ muni d'une base $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_n)$
- $u \in \mathscr{L}(E, F)$

Alors
$$\forall x \in E \quad \mathrm{Mat}_{\underline{f}}(u(x)) = \mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}(u) \times \mathrm{Mat}_{\underline{e}}(x)$$

Démonstration — Soit $x \in E$. Nous démontrons que les deux matrices $\mathrm{Mat}_{\underline{f}}(u(x))$ et $\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}(u) \times \mathrm{Mat}_{\underline{e}}(x)$, toutes deux de format $(n, 1)$, ont même coefficient d'adresse $(i, 1)$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

$$\begin{aligned}
u(x) &= u\left(\sum_{j=1}^{n} \left[\mathrm{Mat}_{\underline{e}}(x)\right]_{j,1} \cdot e_j\right) && \left[\text{définition de } \mathrm{Mat}_{\underline{e}}(x)\right] \\
&= \sum_{j=1}^{p} \left[\mathrm{Mat}_{\underline{e}}(x)\right]_{j,1} \cdot u\left(e_j\right) && [\text{linéarité de } u] \\
&= \sum_{j=1}^{p} \left[\mathrm{Mat}_{\underline{e}}(x)\right]_{j,1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left[\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}(u)\right]_{i,j} \cdot f_i && \left[\text{définition de } \mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}(u)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} \left[\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}(u)\right]_{i,j} \cdot \left[\mathrm{Mat}_{\underline{e}}(x)\right]_{j,1}\right) \cdot f_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}(u) \times \mathrm{Mat}_{\underline{e}}(x)\right]_{i,1} \cdot f_i && [\text{définition du produit matriciel}]
\end{aligned}$$

D'après la définition de la matrice $\mathrm{Mat}_{\underline{f}}(u(x))$, nous en déduisons que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

$$\left[\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}(u) \times \mathrm{Mat}_{\underline{e}}(x)\right]_{i,1} = \left[\mathrm{Mat}_{\underline{f}}(u(x))\right]_{i,1}$$

Théorème C24.12 (isomorphisme fondamental de $\mathscr{L}(E, F)$ sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ associé à un couple de bases)
Soient
- E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $p \geqslant 1$ muni d'une base $\underline{e} = (e_1, \ldots, e_p)$
- F un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ muni d'une base $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_n)$

L'application
$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} (\mathscr{L}(E, F), +, \cdot) & \longrightarrow & \left(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K}), +, \cdot\right) \\ u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}(u) \end{array}\right.$$
est un isomorphisme de $\mathbf{K}$-espaces vectoriels.

Démonstration — • Linéarité. Soient $(u, v) \in \mathscr{L}(E, F)$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$. Nous démontrons que les matrices $\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}(\lambda \cdot u + \mu \cdot v)$ et $\lambda \cdot \mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}(u) + \mu \cdot \mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}(v)$, toutes deux de format (n, p), ont même j-ième colonne, où $j \in [\![1, p]\!]$.

$$\begin{aligned}
(\lambda \cdot u + \mu \cdot v)(e_j) &:= \lambda \cdot u(e_j) + \mu \cdot v(e_j) \\
&= \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} \left[\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}(u)\right]_{i,j} \cdot f_i + \mu \cdot \sum_{i=1}^{n} \left[\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}(v)\right]_{i,j} \cdot f_i && \left[\text{définitions de } \mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}(u) \text{ et } \mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}(v)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda \cdot \left[\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}(u)\right]_{i,j} + \mu \cdot \left[\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}(v)\right]_{i,j}\right) \cdot f_i
\end{aligned}$$

D'après la définition de la matrice $\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}(\lambda \cdot u + \mu \cdot v)$, il vient, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

$$\left[\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}(\lambda \cdot u + \mu \cdot v)\right]_{i,j} = \lambda \cdot \left[\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}(u)\right]_{i,j} + \mu \cdot \left[\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}(v)\right]_{i,j} =: \left[\lambda \cdot \mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}(u) + \mu \cdot \mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}(v)\right]_{i,j}$$

• Bijectivité. Nous définissons pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, n]\!]$, $u_{i,j}$ comme étant l'unique application linéaire de E dans F

telle que

$$\forall\, k \in [\![1,p]\!] \quad u_{i,j}(e_k) = \begin{cases} f_j & \text{si } k = i \\ 0_F & \text{si } k \neq i \end{cases}$$

Nous savons que la famille $\left(u_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,n]\!]}$ est une base de $\mathscr{L}(E,F)$ (C20.74). Comme, pour tout $(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,n]\!]$

$$\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}\left(u_{i,j}\right) = E_{j,i} := \left(\delta_{k,j}\cdot\delta_{i,\ell}\right)_{(k,\ell)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$$

l'application linéaire φ envoie une base de $\mathscr{L}(E,F)$ sur une base de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Il s'agit donc d'un isomorphisme.

EXERCICE C24.13 — Soient $\mathscr{B} := (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbf{R}_2[X]$, $\mathscr{C} := (e_1,e_2,e_3,e_4)$ la base canonique de $\mathbf{R}^4$ et $f \in \mathscr{L}\left(\mathbf{R}_2[X],\mathbf{R}^4\right)$ telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,3}(\mathbf{K})$$

1. Expliciter l'application f.
2. Démontrer que l'application f est injective.
3. L'application f est-elle surjective ?
4. Donner une base de $\mathrm{Im}(f)$.

THÉORÈME C24.14 (COMPOSÉE D'APPLICATIONS LINÉAIRES VS. MULTIPLICATION DE MATRICES)

Soient
- E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $p \geqslant 1$ muni d'une base $\underline{e} = (e_1,\dots,e_p)$
- F un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ muni d'une base $\underline{f} = (f_1,\dots,f_n)$
- G un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $m \geqslant 1$ muni d'une base $\underline{g} = (g_1,\dots,g_m)$
- $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$

Alors

$$\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{g}}(v\circ u) = \mathrm{Mat}_{\underline{f},\underline{g}}(v)\times\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}(u)$$

Démonstration — Comme $\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{g}}(v\circ u)\in\mathscr{M}_{m,p}(\mathbf{K})$, $\mathrm{Mat}_{\underline{f},\underline{g}}(v)\in\mathscr{M}_{m,n}(\mathbf{K})$ et $\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}(u)\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, le produit matriciel $\mathrm{Mat}_{\underline{f},\underline{g}}(v)\times\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}(u)$ est bien défini et les matrices $\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{g}}(v\circ u)$ et $\mathrm{Mat}_{\underline{f},\underline{g}}(v)\times\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}(u)$ ont toutes deux le format (m,p). Nous démontrons qu'elles ont même j-ième colonne, où $j\in[\![1,p]\!]$.

$$\begin{aligned}
v(u(e_j)) &= v\left(\sum_{i=1}^{n}\left[\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}(u)\right]_{i,j}\cdot f_i\right) && \left[\text{définition de } \mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}(u)\right]\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}(u)\right]_{i,j}\cdot v(f_i) && [\text{linéarité de } v]\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}(u)\right]_{i,j}\cdot\sum_{k=1}^{m}\left[\mathrm{Mat}_{\underline{f},\underline{g}}(v)\right]_{k,i}\cdot g_k && \left[\text{définition de } \mathrm{Mat}_{\underline{f},\underline{g}}(v)\right]\\
&= \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}\left[\mathrm{Mat}_{\underline{f},\underline{g}}(v)\right]_{k,i}\cdot\left[\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}(u)\right]_{i,j}\right)\cdot g_k\\
&= \sum_{k=1}^{m}\left[\mathrm{Mat}_{\underline{f},\underline{g}}(v)\times\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}(u)\right]_{k,j}\cdot g_k && [\text{définition du produit matriciel}]
\end{aligned}$$

D'après la définition de la matrice $\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{g}}(v\circ u)$, il vient, pour tout $k\in[\![1,m]\!]$

$$\left[\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{g}}(v\circ u)\right]_{k,j} = \left[\mathrm{Mat}_{\underline{f},\underline{g}}(v)\times\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}(u)\right]_{k,j}$$

COROLLAIRE C24.15 (ISOMORPHISME FONDAMENTAL DE $\mathscr{L}(E)$ SUR $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ ASSOCIÉ À UNE BASE)
Soit
- E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ muni d'une base $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$

L'application

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} (\mathscr{L}(E), +, \circ, \cdot) & \longrightarrow & (\mathscr{M}_n(\mathbf{K}), +, \times, \cdot) \\ u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\underline{e}}(u) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme de $\mathbf{K}$-algèbres, i.e. un isomorphisme de $\mathbf{K}$-espaces vectoriel et un isomorphisme d'anneaux.

Démonstration — • D'après C24.12, l'application φ est un isomorphisme de $\mathbf{K}$-espaces vectoriels.
• D'après C24.14

$$\forall (u, v) \in \mathscr{L}(E)^2 \quad \varphi(v \circ u) := \mathrm{Mat}_{\underline{e}}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\underline{e}}(v) \times \mathrm{Mat}_{\underline{e}}(u) = \varphi(v) \times \varphi(u)$$

• Comme, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{id}_E(e_i) = e_i$, la matrice de id_E dans la base $\underline{e}$ est la matrice identité I_n, i.e. $\varphi(\mathrm{id}_E) = I_n$.

EXERCICE C24.16 — Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ muni d'une base $\mathscr{B}$ et s une symétrie vectorielle de E. Calculer les puissances de la matrice $A := \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

EXERCICE C24.17 — Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbf{K})$ la matrice définie par

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2 \quad [A]_{i,j} := \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } j = 1 \\ j \cdot \delta_{i,j-1} & \text{si } j \in [\![2, n]\!] \end{array} \right.$$

Démontrer que la matrice A^{n+1} est nulle.

COROLLAIRE C24.18 (LIEN ENTRE MATRICES INVERSIBLES ET ISOMORPHISMES)
Soient
- E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $p \geqslant 1$ muni d'une base $\underline{e} = (e_1, \dots, e_p)$
- F un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ muni d'une base $\underline{f} = (f_1, \dots, f_n)$
- $u \in \mathscr{L}(E, F)$

On dispose des deux résultats suivants.

1. L'application linéaire u est un isomorphisme si et seulement si $p = n$ et la matrice $\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}(u)$ est inversible.
2. Si l'application linéaire u est un isomorphisme, alors

$$\mathrm{Mat}_{\underline{f},\underline{e}}\left(u^{-1}\right) = \left(\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}(u)\right)^{-1}$$

Démonstration — $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que f est un isomorphisme. Alors E et F ont même dimension, i.e. $p = n$. L'existence de l'isomorphisme réciproque de u et C24.14 nous permettent d'écrire

$$\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}(u) \times \mathrm{Mat}_{\underline{f},\underline{e}}\left(u^{-1}\right) = \mathrm{Mat}_{\underline{f},\underline{f}}\left(u \circ u^{-1}\right) = \mathrm{Mat}_{\underline{f},\underline{f}}(\mathrm{id}_F) = I_n$$

et

$$\mathrm{Mat}_{\underline{f},\underline{e}}\left(u^{-1}\right) \times \mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}(u) = \mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{e}}\left(u^{-1} \circ u\right) = \mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{e}}(\mathrm{id}_E) = I_n$$

La matrice $\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}(u)$ est donc inversible et son inverse est la matrice $\mathrm{Mat}_{\underline{f},\underline{e}}\left(u^{-1}\right)$.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $p = n$ et $A := \mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}(u)$ inversible. D'après C24.12, il existe une unique application linéaire $v \in \mathscr{L}(F, E)$ telle que

$$\mathrm{Mat}_{\underline{f},\underline{e}}(v) = A^{-1} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$$

D'après C24.14

$$\mathrm{Mat}_{\underline{f},\underline{f}}(u \circ v) = \mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}(u) \times \mathrm{Mat}_{\underline{f},\underline{e}}(v) = A \times A^{-1} = I_n = \mathrm{Mat}_{\underline{f},\underline{f}}(\mathrm{id}_F)$$

et

$$\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{e}}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\underline{f},\underline{e}}(v) \times \mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{f}}(u) = A^{-1} \times A = I_n = \mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{e}}(\mathrm{id}_E)$$

D'après C24.12, il vient $u \circ v = \mathrm{id}_F$ et $v \circ u = \mathrm{id}_E$. Donc u est un isomorphisme.

EXERCICE C24.19 — Soient $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathscr{B} := (1, X, \ldots, X^n)$ la base canonique de $\mathbf{K}_n[X]$ et

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}_n[X] \\ P & \longmapsto & P + P' \end{array} \right.$$

1. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathbf{K}_n[X]$.
2. Calculer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.
3. En déduire que f est un automorphisme de $\mathbf{K}_n[X]$.

§ 2. APPLICATION LINÉAIRE CANONIQUEMENT ASSOCIÉE À UNE MATRICE

NOTATION C24.20 — Dans cette partie
- pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $X_{n,i}$ est le vecteur de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la ligne i qui vaut 1 ;
- pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathscr{B}_n = \left(X_{n,1}, X_{n,2}, \ldots, X_{n,n}\right)$ désigne la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$;
- les lettres n et p désignent des entiers naturels non nuls.

DÉFINITION C24.21 (APPLICATION LINÉRAIRE CANONIQUEMENT ASSOCIÉE À UNE MATRICE)
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. L'application linéaire canoniquement associée à A, notée φ_A, est définie par

$$\varphi_A \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right.$$

Elle est caractérisée par $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_p, \mathscr{B}_n}\left(\varphi_A\right) = A$.

PROPOSITION C24.22 (NOYAU D'UNE MATRICE)
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Le noyau de A, défini par $\mathrm{Ker}\,(A) := \left\{X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{K}) \;:\; AX = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})}\right\}$, vérifie

$$\mathrm{Ker}\,(A) = \mathrm{Ker}\left(\varphi_A\right) \qquad \left[\text{sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{K})\right]$$

Il s'agit de l'ensemble solution du système linéaire homogène associé à la matrice A.

PROPOSITION C24.23 (IMAGE D'UNE MATRICE)
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. L'image de A, défini par $\mathrm{Im}\,(A) := \left\{AX \;:\; X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{K})\right\}$, vérifie

$$\mathrm{Im}\,(A) = \mathrm{Im}\left(\varphi_A\right) \qquad \left[\text{sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})\right]$$

Si $C_1, C_2, \ldots, C_p$ désignent les vecteurs colonnes de A, alors

$$\mathrm{Im}\,(A) = \mathrm{Vect}\left(C_1, C_2, \ldots, C_p\right) \qquad \left[\text{les vecteurs colonnes de } A \text{ engendrent son image}\right]$$

PROPOSITION C24.24 (RANG D'UNE MATRICE)
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Le rang de A, défini par $\mathrm{Rg}\,(A) := \dim\,(\mathrm{Im}\,(A))$, vérifie

$$\mathrm{Rg}\,(A) = \mathrm{Rg}\left(\varphi_A\right)$$

Il possède les deux propriétés suivantes

$$\mathrm{Rg}\,(A) + \dim\,(\mathrm{Ker}\,(A)) = p \quad \text{ et } \quad \mathrm{Rg}\,(A) \leqslant \min\left\{n, p\right\}$$

RAPPEL C24.25 — Soient E, F, G des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$. Nous savons (C20.35) que si v est un isomorphisme, alors $\mathrm{Rg}\,(v \circ u) = \mathrm{Rg}\,(u)$ et si u est un isomorphisme, alors $\mathrm{Rg}\,(v \circ u) = \mathrm{Rg}\,(v)$.

PROPOSITION C24.26 (INVARIANCE DU RANG D'UNE MATRICE PAR MULTIPLICATION PAR UNE MATRICE INVERSIBLE)
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

1. Si $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ alors $\mathrm{Rg}(PA) = \mathrm{Rg}(A)$.
2. Si $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbf{K})$ alors $\mathrm{Rg}(AQ) = \mathrm{Rg}(A)$.

THÉORÈME C24.27 (CALCUL DU RANG D'UNE MATRICE PAR L'ALGORITHME DU PIVOT DE GAUSS)
Soit

- $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$
- $E \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ une matrice échelonnée obtenue en appliquant l'algorithme du pivot de Gauß à A
- r le nombre de pivots de E

Alors
$$\mathrm{Rg}(A) = r$$

EXERCICE C24.28 — Calculer le rang et une base de l'image de la matrice
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EXERCICE C24.29 — Calculer le rang et une base de l'image de la matrice
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

THÉORÈME C24.30 (CRITÈRES D'INVERSIBILITÉ D'UNE MATRICE)
Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ dont les colonnes sont notées $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. A est inversible.
2. $\mathrm{Ker}(A) = \left\{0_{\mathscr{M}_n(\mathbf{K})}\right\}$
3. $\mathrm{Vect}(C_1, C_2, \ldots, C_n) = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$
4. $\mathrm{Rg}(A) = n$

EXERCICE C24.31 — Soit $N \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice nilpotente. Démontrer que la matrice $I_n + N$ est inversible.

EXERCICE C24.32 — Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. On suppose qu'il existe un polynôme $P \in \mathbf{K}[X]$ tel que
$$\sum_{k=0}^{+\infty} [P]_k \cdot A^k = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbf{K})}$$
Démontrer que A est inversible si et seulement si $\widetilde{P}(0) \neq 0$.

EXERCICE C24.33 — Soit la matrice
$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3\mathbf{R}$$

1. Déterminer la spectre de A défini par $\mathrm{Spec}_{\mathbf{R}}(A) := \{\lambda \in \mathbf{R} \,:\, A - \lambda \cdot I_3 \notin \mathrm{GL}_3(\mathbf{R})\}$.
2. Déterminer, pour tout $\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbf{R}}(A)$, une base de $E_\lambda(A) := \mathrm{Ker}(A - \lambda \cdot I_3)$.

THÉORÈME C24.34 (INVERSIBILITÉ À GAUCHE, INVERSIBILITÉ À DROITE ET INVERSIBILITÉ D'UNE MATRICE)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

1. S'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $AB = I_n$ alors A est inversible et $A^{-1} = B$.
2. S'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $BA = I_n$ alors A est inversible et $A^{-1} = B$.

§ 3. Systèmes linéaires

Proposition C24.35 (solutions d'un système linéaire homogène)
Soient
- $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$
- (SH) le système linéaire homogène $AX = 0$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$
- $\mathrm{Sol}(SH) := \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K}) \,:\, AX = 0\}$ l'ensemble solution de (SH)

$\mathrm{Sol}(SH)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ dont la dimension est $p - \mathrm{Rg}(A)$.

Proposition C24.36 (solutions d'un système linéaire)
Soient
- $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$
- $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$
- (S) le système linéaire $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$
- (SH) le système linéaire homogène $AX = 0$ associé à (S) d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$
- $\mathrm{Sol}(S) := \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K}) \,:\, AX = B\}$ l'ensemble solution de (S)
- $\mathrm{Sol}(SH) := \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K}) \,:\, AX = 0\}$ l'ensemble solution de (SH)

Alors
1. (S) est compatible si et seulement si $B \in \mathrm{Im}(A)$
2. si (S) est compatible et X_p est une solution « particulière » de (S)

$$\mathrm{Sol}(S) = \{X_p + X \,:\, X \in \mathrm{Sol}(SH)\} \qquad [\text{sous-espace affine de } \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K}) \text{ de dimension } p - \mathrm{Rg}(A)]$$

Proposition C24.37 (système de Cramer)
Soient
- $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$
- $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$
- (S) le système linéaire $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$

Si $n = p$ et si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ alors le système (S) est dit de Cramer et il possède une unique solution donnée par $X = A^{-1}B$.

Exercice C24.38 — Étudier, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} -\lambda \cdot x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & \lambda y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & - & \lambda z & = & 1 \end{array}\right.$$

d'inconnue $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$.

§ 4. Changements de bases

Définition C24.39 (matrice de passage d'une base à une autre)
Soient
- E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$
- $\underline{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E
- $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de E

La matrice de passage de la base $\underline{e}$ à la base $\underline{f}$ est la matrice notée $P_{\underline{e} \to \underline{f}}$ définie par

$$P_{\underline{e} \to \underline{f}} := \mathrm{Mat}_{\underline{f}, \underline{e}}(\mathrm{id}_E) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$$

Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, la j-ème colonne de la matrice $P_{\underline{e} \to \underline{f}}$ est formée des coordonnées du vecteurs f_j dans la base $\underline{e}$.

Exemple C24.40 — Soient $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$ et

$$\underline{f} := \big(f_1 = (1,1,-1)\,,\, f_2 = (1,2,1)\,,\, f_3 = (1,-1,2)\big)$$

Démontrer que $\underline{f}$ est une base de $\mathbf{R}^3$, puis calculer les matrices $P_{\underline{e}\to\underline{f}}$ et $P_{\underline{f}\to\underline{e}}$.

Proposition C24.41 (Inversibilité et inverse d'une matrice de passage)
Soient
- E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$
- $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E
- $\underline{f} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de E

La matrice $P_{\underline{e}\to\underline{f}}$ est inversible et

$$\left(P_{\underline{e}\to\underline{f}}\right)^{-1} = P_{\underline{f}\to\underline{e}}$$

Exercice C24.42 — Justifier que la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$$

est inversible et donner son inverse.

Proposition C24.43 (Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur)
Soient
- E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$
- $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E
- $\underline{f} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de E

Alors

$$\forall\, x \in E \quad \mathrm{Mat}_{\underline{e}}(x) = P_{\underline{e}\to\underline{f}} \times \mathrm{Mat}_{\underline{f}}(x)$$

Théorème C24.44 (Effet d'un changement du couple de bases sur la matrice d'une application linéaire)
Soient
- E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $p \geqslant 1$
- $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bases de E
- F un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$
- $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ deux bases de F

Alors

$$\forall\, u \in \mathscr{L}(E,F) \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2,\mathscr{C}_2}(u) = \left(P_{\mathscr{C}_1\to\mathscr{C}_2}\right)^{-1} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{C}_1}(u) \times P_{\mathscr{B}_1\to\mathscr{B}_2}$$

Corollaire C24.45 (Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme)
Soient
- E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$
- $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bases de E

Alors

$$\forall\, u \in \mathscr{L}(E) \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(u) = \left(P_{\mathscr{B}_1\to\mathscr{B}_2}\right)^{-1} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(u) \times P_{\mathscr{B}_1\to\mathscr{B}_2}$$

Exercice C24.46 — Soit f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ canoniquement associé à la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$$

1. Déterminer la spectre de f défini par

$$\mathrm{Spec}(f) := \left\{\lambda \in \mathbf{R} \,:\, f - \lambda \cdot \mathrm{id} \text{ n'est pas un automorphisme de } \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})\right\}$$

Indication : Notons la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ est notée $\mathscr{B}_3$ et fixons $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$\begin{array}{rcll} f - \lambda \cdot \mathrm{id} \text{ n'est pas un automorphisme de } \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) & \iff & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_3}\left(f - \lambda \cdot \mathrm{id}\right) \notin \mathrm{GL}_3(\mathbf{R}) & [\text{C24.18}] \\ & \iff & \mathrm{Rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_3}\left(f - \lambda \cdot \mathrm{id}\right)\right) < 3 & [\text{C24.30}] \end{array}$$

On procède alors au calcul du rang de

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_3}\left(f - \lambda \cdot \mathrm{id}\right) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_3}(f) - \lambda \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_3}(\mathrm{id}) = A - \lambda \cdot I_3$$

en appliquant l'algorithme du pivot de Gauß.

2. On note $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$ les éléments de $\mathrm{Spec}_{\mathbf{R}}(f)$. Déterminer, pour tout $i \in \{0,1,2\}$, un vecteur de base u_i de $E_{\lambda_i}(f) := \mathrm{Ker}\left(f - \lambda_i \cdot \mathrm{id}\right)$.

Indication : Fixons $i \in \{0,1,2\}$ et $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$. D'après la question 1, nous savons que $\mathrm{Ker}\left(f - \lambda_i \cdot \mathrm{id}\right) \neq \{0\}$.

$$\begin{array}{rcll} X \in \mathrm{Ker}\left(f - \lambda_i \cdot \mathrm{id}\right) & \iff & (f - \lambda_i \cdot \mathrm{id})(X) = 0 & \\ & \iff & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_3}\left((f - \lambda_i \cdot \mathrm{id})(X)\right) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_3}(0) & \\ & \iff & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_3}(f - \lambda_i \cdot \mathrm{id}) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_3}(X) = 0 & [\text{C24.11}] \\ & \iff & (A - \lambda_i \cdot I_3) \times X = 0 & \left[\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_3}(X) = X\right] \end{array}$$

On résout alors le système linéaire homogène $(A - \lambda_i \cdot I_3) \times X = 0$, d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$, en appliquant l'algorithme du pivot de Gauß.

3. Démontrer que $\mathscr{B} := (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.

Indication : On démontre la liberté de la famille (u_1, u_2, u_3), en introduisant un système linéaire homogène que l'on résout avec l'algorithme du pivot de Gauß. On conclut avec un argument de cardinalité-dimension.

4. Calculer la matrice D de f dans la base $\mathscr{B}$.

Indication : On s'appuie sur la définition et on observe que, par construction, pour tout $i \in \{0,1,2\}$, $f(u_i) = \lambda_i \cdot u_i$.

5. Déterminer une matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbf{R})$ telle que

$$A = P \times D \times P^{-1}$$

Indication : Il s'agit d'un point essentiel. Le théorème de changement de base, appliqué avec rigueur et précision, est la clé.

6. En déduire les puissances de A.

Indication : Démontrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}$

$$A^k = P \times D^k \times P^{-1}$$

Les puissances d'une matrice diagonale sont aisées à calculer. Il reste à déterminer P^{-1} et à calculer deux produits matriciels.

Exercice C24.47 — Adapter la démarche de l'exercice C24.46 pour déterminer une matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbf{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ telles que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = P \times D \times P^{-1}$$

§ 5. Matrices équivalentes et rang

Notation C24.48 — Dans cette partie, les entiers n et p désignent des entiers naturels non nuls.

Rappel C24.49 — Pour tout $r \in [\![0, \min\{n, p\}]\!]$, on note $J_{n,p}(r)$ la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ définie par

$$J_{n,p}(r) = \begin{cases} 0_{\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})} & \text{si } r = 0 \\ \sum_{i=1}^{r} E_{i,i} & \text{si } r \geqslant 1 \end{cases} \qquad \text{[matrice de Jordan]}$$

Exemple C24.50 — $J_{3,4}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J_{5,6}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Théorème C24.51 (représentation d'une application linéaire par une matrice de Jordan)
Soient
- E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie p
- F un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n
- $u \in \mathscr{L}(E, F)$
- $r := \mathrm{Rg}(f)$

Il existe une base $\mathscr{B}$ de E et une base $\mathscr{C}$ de F telles que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = J_{n,p}(r)$$

Exercice C24.52 — Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^4, \mathbf{R}^3)$ l'application définie par

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^4 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) & \longmapsto & (x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4, x_3 + x_4) \end{array} \right.$$

Déterminer une base $\mathscr{B}$ de $\mathbf{R}^4$ et une base $\mathscr{C}$ de $\mathbf{R}^3$ telles que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = J_{3,4}(2)$$

Définition C24.53 (matrices équivalentes)
Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})^2$. Les matrices A et B sont dites équivalentes si

$$\exists (P, Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K}) \times \mathrm{GL}_p(\mathbf{K}) \quad A = P^{-1} \times B \times Q$$

Dans ce cas, on note $A \equiv B$.

Proposition C24.54 (propriétés de la relation $\equiv$ sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$)
La relation $\equiv$ est une relation d'équivalence sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

Proposition C24.55 (matrices équivalentes et représentation d'une app. lin. dans des couples de bases)
Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})^2$. Les matrices A et B sont équivalentes si et seulement s'il existe
- $u \in \mathscr{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$
- $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$ deux bases de $\mathbf{K}^p$
- $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$ deux bases de $\mathbf{K}^n$

tels que $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{C}_1}(u)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2,\mathscr{C}_2}(u)$.

Théorème C24.56 (Matrices de rang r vs. matrices équivalentes à $J_{n,p}(r)$)
Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $r \in [\![0, \min\{n,p\}]\!]$.

$$\mathrm{Rg}(A) = r \quad \Longleftrightarrow \quad A \equiv J_{n,p}(r)$$

Corollaire C24.57 (Caractérisation des matrices équivalentes par le rang)
Deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ sont équivalentes si et seulement si elles possèdent le même rang.

Remarque C24.58 — Les matrices $J_{n,p}(r)$, où $r \in [\![0, \min\{n,p\}]\!]$, forment une liste exhaustive et sans répétition des classes d'équivalences de la relation $\equiv$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

Exercice C24.59 — Les matrices A et B définies ci-dessous sont-elles équivalentes?

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & 5 & 7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbf{K}) \quad \text{et} \quad B := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbf{K})$$

Proposition C24.60 (Rang de la transposée d'une matrice)
Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$

$$\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}\left(A^\top\right)$$

Définition C24.61 (Matrice extraite d'une matrice)
Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $r \in [\![0, \min\{n,p\}]\!]$. On appelle matrice extraite de A de format (r,r) toute matrice de la forme

$$A_{\alpha,\beta} := \left([A]_{\alpha(i),\beta(j)}\right)_{(i,j)\in[\![1,r]\!]^2} \in \mathcal{M}_r(\mathbf{K})$$

où
- $\alpha \colon [\![1,r]\!] \hookrightarrow [\![1,n]\!]$ est une application strictement croissante
- $\beta \colon [\![1,r]\!] \hookrightarrow [\![1,p]\!]$ est une application strictement croissante

La matrice $A_{\alpha,\beta}$ est obtenue en supprimant les lignes d'indices autres que $\alpha(1), \ldots, \alpha(r)$ et les colonnes d'indices autres que $\beta(1), \ldots, \beta(r)$.

Exercice C24.62 — Donner toutes les matrices extraites de format $(2,2)$ de la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & -1 \\ 5 & -3 & 4 & 6 \\ 9 & 0 & -2 & 8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbf{K})$$

Notation C24.63 — Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$
- $A_{\bullet,j}$ désigne la j-ème colonne de A
- $A_{i,\bullet}$ désigne la i-ième ligne de A

Lemme C24.64 (Rang d'une matrice et suppression de colonnes/lignes)
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

1. Si $r \in [\![1,p]\!]$ et $\beta \in [\![1,r]\!] \longrightarrow [\![1,p]\!]$ est une application strictement croissante, alors

$$\mathrm{Rg}\left(\left(A_{\bullet,\beta(1)} \,|\, A_{\bullet,\beta(2)} \,|\, \ldots \,|\, A_{\bullet,\beta(r)}\right)\right) \leqslant \mathrm{Rg}(A)$$

2. Si $r \in [\![1,n]\!]$ et $\alpha \in [\![1,r]\!] \longrightarrow [\![1,n]\!]$ est une application strictement croissante, alors

$$\mathrm{Rg}\left(\left(A_{\alpha(1),\bullet} \,|\, A_{\alpha(2),\bullet} \,|\, \ldots \,|\, A_{\alpha(r),\bullet}\right)\right) \leqslant \mathrm{Rg}(A)$$

PROPOSITION C24.65 (RANG D'UNE MATRICE EXTRAITE)
Soient
- $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$
- $r \in [\![0, \min\{n,p\}]\!]$
- $\alpha \colon [\![1,r]\!] \longrightarrow [\![1,n]\!]$ est une application strictement croissante
- $\beta \colon [\![1,r]\!] \longrightarrow [\![1,p]\!]$ est une application strictement croissante

Alors
$$\mathrm{Rg}\left(A_{\alpha,\beta}\right) \leqslant \mathrm{Rg}(A)$$

EXERCICE C24.66 — Soient
- $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$
- $r \in [\![0, \min\{n,p\}]\!]$
- $\alpha \colon [\![1,r]\!] \longrightarrow [\![1,n]\!]$ est une application strictement croissante
- $\beta \colon [\![1,r]\!] \longrightarrow [\![1,p]\!]$ est une application strictement croissante

On note
- $\mathscr{B}_p = (e_{p,1}, e_{p,2}, \dots, e_{p,p})$ la base canonique de $\mathbf{K}^p$
- $\mathscr{B}_n = (e_{n,1}, e_{n,2} \dots, e_{n,n})$ la base de canonique de $\mathbf{K}^n$
- $\mathscr{B}_r = (e_{r,1}, e_{r,2}, \dots, e_{r,r})$ la base canonique de $\mathbf{K}^r$
- $\varphi_A \in \mathscr{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$ l'application linéaire définie par $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_p,\mathscr{B}_n}(\varphi_A) = A$

Soient $\iota \in \mathscr{L}(\mathbf{K}^r, \mathbf{K}^p)$ définie par
$$\forall j \in [\![1,r]\!] \quad \iota(e_{r,j}) = e_{p,\beta(j)}$$
et $\pi \in \mathscr{L}(\mathbf{K}^n, \mathbf{K}^p)$ définie par
$$\pi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^n & \longrightarrow & \mathbf{K}^r \\ x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot e_{n,k} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{r} x_{\alpha(i)} \cdot e_{r,i} \end{array} \right.$$

1. Calculer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_r}\left(\pi \circ \varphi_A \circ \iota\right)$.
2. En déduire le résultat de C24.65.

THÉORÈME C24.67 (CARACTÉRISATION DES MATRICES DE RANG PLUS PETIT QUE r PAR SES MATRICES EXTRAITES)
Soient
- $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$
- $r \in [\![0, \min\{n,p\}]\!]$

Alors
$$\mathrm{Rg}(A) < r \iff \text{toute matrice extraite de } A \text{ de format } (r,r) \text{ est non-inversible}$$

COROLLAIRE C24.68 (CARACTÉRISATION DU RANG D'UNE MATRICE PAR SES MATRICES EXTRAITES)
Soient
- $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$
- $r \in [\![0, \min\{n,p\}]\!]$

Si $r < \min\{n,p\}$
$$\mathrm{Rg}(A) = r \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{toute matrice extraite de } A \text{ de format } (r+1, r+1) \text{ est non-inversible} \\ \text{et} \\ \text{il existe une matrice extraite de } A \text{ de format } (r,r) \text{ qui est inversible} \end{array} \right.$$
et
$$\mathrm{Rg}(A) = \min\{n,p\} \iff \text{il existe une matrice extraite de } A \text{ de format } \left(\min\{n,p\}, \min\{n,p\}\right) \text{ qui est inversible}$$

§ 6. Matrices semblables et trace

Notation C24.69 — Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

Définition C24.70 (matrices semblables)
Soit $(A,B)\in\mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2$. Les matrices A et B sont dites semblables si

$$\exists P\in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})\quad A=P^{-1}\times B\times P$$

Dans ce cas, on note $A\sim B$.

Exercice C24.71 — Que dire d'une matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ semblable à I_n ?

Proposition C24.72 (propriétés de la relation $\sim$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$)
La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Proposition C24.73 (matrices équivalentes et représentation d'un endomorphisme dans des bases)
Soit $(A,B)\in\mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2$. Les matrices A et B sont semblables si et seulement s'il existe
- $u\in\mathcal{L}(\mathbf{K}^n)$
- $\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2$ deux bases de $\mathbf{K}^n$

tels que $A=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(u)$ et $B=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(u)$.

Exercice C24.74 — Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $A^2=I_n$, $A\neq I_n$ et $A\neq -I_n$. Démontrer qu'il existe $r\in[\![1,n-1]\!]$ tel que

$$A\sim\begin{pmatrix} I_r & 0_{\mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbf{K})}\\ 0_{\mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbf{K})} & -I_{n-r}\end{pmatrix}$$

Exercice C24.75 — Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $A^2=A$, $A\neq I_n$ et $A\neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})}$. Démontrer qu'il existe $r\in[\![1,n-1]\!]$ tel que

$$A\sim\begin{pmatrix} I_r & 0_{\mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbf{K})}\\ 0_{\mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbf{K})} & 0_{\mathcal{M}_r(\mathbf{K})}\end{pmatrix}$$

Définition C24.76 (trace d'une matrice carrée)
Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. La trace de A, notée $\mathrm{Tr}(A)$, est définie par

$$\mathrm{Tr}(A):=\sum_{i=1}^{n}[A]_{i,i}\qquad\text{[somme des coefficients diagonaux de } A]$$

Proposition C24.77 (propriétés de la trace d'une matrice carrée)
La trace d'une matrice carrée possède les trois propriétés fondamentales suivantes.

1. Linéarité
$$\forall (A,B)\in\mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2\quad\forall(\lambda,\mu)\in\mathbf{K}^2\quad \mathrm{Tr}\left(\lambda\cdot A+\mu\cdot B\right)=\lambda\cdot\mathrm{Tr}(A)+\mu\cdot\mathrm{Tr}(B)$$
2. Caractère central
$$\forall (A,B)\in\mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2\quad \mathrm{Tr}(AB)=\mathrm{Tr}(BA)$$
3. Invariance par similitude
$$\forall (A,B)\in\mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2\quad A\sim B\implies \mathrm{Tr}(A)=\mathrm{Tr}(B)$$

Exercice C24.78 — Les matrices A et B définies ci-dessous sont-elles semblables ?

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad B=\begin{pmatrix}-1&-2&-3\\-4&-5&-6\\-7&-8&-9\end{pmatrix}$$

EXERCICE C24.79 — Soit $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})^2$. Justifier

$$A \sim B \implies A \equiv B$$

La réciproque est-telle vraie ?

EXERCICE C24.80 — Les matrices A et B définies ci-dessous sont-elles semblables ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

PROPOSITION-DÉFINITION C24.81 (TRACE D'UN ENDOMORPHISME D'UN ESPACE VECTORIEL DE DIMENSION FINIE)

Soient

- E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n
- $u \in \mathscr{L}(E)$

La trace de u, notée $\mathrm{Tr}(u)$, est définie par

$$\mathrm{Tr}(u) := \mathrm{Tr}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u))$$

où $\mathscr{B}$ est une base de E. Le nombre $\mathrm{Tr}(u)$ est indépendant de la base $\mathscr{B}$ considérée.

PROPOSITION C24.82 (PROPRIÉTÉS DE LA TRACE D'UN ENDOMORPHISME)

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

1. Linéarité
$$\forall (u,v) \in \mathscr{L}(E)^2 \quad \forall (\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2 \quad \mathrm{Tr}\big(\lambda \cdot u + \mu \cdot v\big) = \lambda \cdot \mathrm{Tr}(u) + \mu \cdot \mathrm{Tr}(v)$$

2. Caractère central
$$\forall (u,v) \in \mathscr{L}(E)^2 \quad \mathrm{Tr}(u \circ v) = \mathrm{Tr}(v \circ u)$$

EXERCICE C24.83 — Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et p un projecteur de E. Démontrer que $\mathrm{Tr}\big(p\big) = \mathrm{Rg}\big(p\big)$.