CHAPITRE N°23
PROBABILITÉS

§ 1. UNIVERS, ÉVÉNEMENTS, VARIABLES ALÉATOIRES

DÉFINITION C23.1 (VOCABULAIRE DES PROBABILITÉS)

Terminologie générale	Exemple
Une <u>expérience aléatoire</u> est une expérience dépendant du hasard dont le nombre de résultats est fini.	On lance un dé cubique à 6 faces, numérotées de 1 à 6
L'<u>univers</u> Ω est l'ensemble de tous les résultats.	$\Omega = [\![1,6]\!]$
Un <u>événement</u> est un ensemble de résultats de l'expérience aléatoire, i.e. un événement est une partie de Ω.	A =« le dé a amené un chiffre pair » $= \{2,4,6\}$
Un <u>événement élémentaire</u> est un événement qui contient un unique résultat, i.e. un événement élémentaire est un singleton $\{\omega\}$, où $\omega \in \Omega$.	« le dé a amené le chiffre 3 » $= \{3\}$
L'<u>événement contraire</u> d'un événement A est $\overline{A}$.	$\overline{\text{« le dé un multiple de 3 »}} = \{1,2,4,5\}$
L'<u>événement impossible</u> est l'événement $\varnothing$ et l'<u>événement certain</u> est l'événement Ω.	
Deux événements A et B sont dits <u>incompatibles</u> (ou disjoints) si $A \cap B = \varnothing$.	Les événements A =« le dé a amené un nombre premier » $= \{2,3,5\}$ et B =« le dé a amené 1 ou 6 » $= \{1,6\}$ sont incompatibles.
Un <u>système complet d'événements</u> est une famille $(A_1,\ldots,A_n)$ d'événements deux-à-deux incompatibles et dont la réunion égale l'univers Ω, i.e. telle que $\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.	(« le dé a amené un chiffre pair » $= \{2,4,6\}$, « le dé a amené un chiffre impair » $= \{1,3,5\}$) est un système complet d'événements.
Une <u>variable aléatoire</u> est une application $X : \Omega \to E$, où E est un ensemble quelconque.	$X \left\vert \begin{array}{rcl} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \omega & \longmapsto & \cos\left(\frac{\omega \cdot \pi}{2}\right) \end{array} \right.$
Si $x \in E$, alors <u>$(X = x)$</u> $:= X^{-1}(\{x\}) := \{\omega \in \Omega \,:\, X(\omega) = x\}$.	$(X = 0) = \{1,3,5\}$
Si $A \subset E$, alors <u>$(X \in A)$</u> $:= X^{-1}(A) := \{\omega \in \Omega \,:\, X(\omega) \in A\}$.	$(X \in \{-1,1\}) = \{2,4,6\}$

Exercice C23.2 — Soient Ω l'univers associé à une expérience aléatoire à nombre de résultats fini, E un ensemble et $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire. Démontrer que

$$((X \in x))_{x \in X(\Omega)}$$

est un système complet d'événements.

§ 2. Espaces probabilisés finis

Définition C23.3 (probabilité sur un ensemble fini et espace probabilisé fini)
Soit Ω un ensemble fini non vide. Une probabilité sur Ω est une application

$$P \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & P(A) \end{array} \right.$$

telle que

(A1) $P(\Omega) = 1$

(A2) $\forall (A_1, A_2) \in \mathscr{P}(\Omega)^2 \quad A_1 \cap A_2 = \varnothing \Longrightarrow P(A_1 \sqcup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$ [additivité de P]

Un espace probabilisé fini est un couple (Ω, P), où Ω est un ensemble fini non vide et $\mathscr{P}$ est une probabilité sur Ω.

Proposition-Définition C23.4 (probabilité uniforme sur un ensemble fini non vide)
Soit Ω un ensemble fini non vide. L'application

$$P \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{Card}\,(A)}{\mathrm{Card}\,(E)} \end{array} \right.$$

est une probabilité sur Ω, appelé probabilité uniforme sur Ω.

Proposition C23.5 (propriétés immédiates d'un espace probabilisé fini)
Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.

1. $P(\varnothing) = 0$
2. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, pour toute famille $(A_, \ldots, A_n)$ d'événements deux-à-deux incompatibles
$$P(\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$
3. Pour tout événement A
$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$$
La probabilité d'un événement est donc la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

Définition C23.6 (distribution de probabilité sur un ensemble fini)
Soit Ω un ensemble fini non vide. Une distribution de probabilité sur Ω est une famille $(p_\omega)_{\omega \in \Omega} \in (\mathbf{R}_+)^\Omega$ telle que

$$\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$$

Exemple C23.7 — Soit Ω un ensemble fini non vide de cardinal n. Alors la famille $\left(p_\omega := \dfrac{1}{n}\right)_{\omega \in \Omega}$ est une distribution de probabilités sur Ω.

THÉORÈME C23.8 (PROBABILITÉ VERSUS DISTRIBUTION DE PROBABILITÉ SUR UN ENSEMBLE FINI)
Soit Ω un ensemble fini non vide.

1. Si P est une probabilité sur Ω alors
$$\left(p_\omega := P(\{\omega\})\right)_{\omega\in\Omega}$$
est une distribution de probabilité sur Ω.
2. Soit $\left(p_\omega\right)_{\omega\in\Omega}$ une distribution de probabilité sur Ω. Alors l'application
$$P \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \displaystyle\sum_{\omega\in A} p_\omega \end{array} \right.$$
est l'unique probabilité sur Ω telle que
$$\forall\,\omega\in\Omega \quad P(\{\omega\}) = p_\omega$$
3. Une probabilité sur Ω est déterminée par la distribution de probabilité associée (celle contruite en 1).

EXERCICE C23.9 — Soient $n\in\mathbf{N}^*$ et pour tout $k\in[\![1,n-1]\!]$
$$p_k := \frac{1}{2^k}$$

1. Quelle valeur faut-il attribuer à p_n pour que la famille $\left(p_n\right)_{k\in[\![1,n]\!]}$ soit une distribution de probabilité sur $[\![1,n]\!]$?
2. On note P la probabilité sur $[\![1,n]\!]$ canoniquement associée à la distribution de probabilité $\left(p_n\right)_{k\in[\![1,n]\!]}$. Calculer la probabilité de l'événement
$$A_n := \left\{k\in[\![1,n]\!]\ :\ k \text{ est pair}\right\}$$
3. Étudier la limite éventuelle de $P(A_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$?

THÉORÈME C23.10 (PROPRIÉTÉS D'UNE PROBABILITÉS)
Soit (Ω,P) un espace probabilisé fini.

1. $\forall\,(A,B)\in\mathscr{P}(\Omega)^2 \quad P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ $\quad$ [probabilité d'un réunion]
2. $\forall\,(A,B)\in\mathscr{P}(\Omega)^2 \quad A\subset B \Longrightarrow P(B\setminus A) = P(B)-P(A)$ $\quad$ [probabilité d'une différence]
3. $\forall\,A\in P(\Omega) \quad P\left(\overline{A}\right) = 1-P(A)$ $\quad$ [probabilité de l'événement contraire]
4. $\forall\,(A,B)\in\mathscr{P}(\Omega)^2 \quad A\subset B \Longrightarrow P(A)\leqslant P(B)$ $\quad$ [croissance de la probabilité]

EXERCICE C23.11 — Soient (Ω,P) un espace probabilisé fini, $p\geqslant 2$ et $A_1,\ldots,A_p$ des événements. Démontrer
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{p} A_i\right) = \sum_{k=1}^{p} (-1)^k\cdot \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} P\left(\bigcap_{\ell=1}^{k} A_{i_\ell}\right) \qquad \text{[formule du crible de Poincaré]}$$

EXERCICE C23.12 — Soit un entier $n\geqslant 3$. Dans une urne, on place n boules numérotées de 1 à n. On tire successivement, sans remise, au hasard, trois boules dans l'urne. Quelle est la probabilité que les trois nombres obtenus soient dans l'ordre croissant ?

§ 3. PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

DÉFINITION C23.13 (PROBABILITÉ CONDITIONNNELLE)
Soient (Ω,P) un espace probabilisé fini, B un événement tel que $P(B)>0$ et A un événement quelconque. La probabilité conditionnelle de A sachant B notée $P(A|B)$ ou $P_B(A)$ est définie par
$$P(A|B) := \frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

Exercice C23.14 — On lancé un dé non truqué à 6 faces numérotées de 1 à 6. On note A l'événement « le dé a amené le chiffre 6 ».

1. Que vaut $P(A)$?
2. On suppose désormais que l'événement $B :=$ « le dé a amené un nombre pair » est réalisé. En quoi cette information modifie-t-elle la probabilité de l'événement A ?
3. Justifier, sur cet exemple, la définition C23.13 de probabilité conditionnelle.

Proposition C23.15 (une probabilité conditionnelle est une probabilité)
Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini et B un événement tel que $P(B) > 0$. Alors l'application

$$P_B \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & P_B(A) \end{array} \right.$$

est une probabilité sur l'espace Ω.

Convention C23.16 — Si (Ω, P) est un espace probabilisé fini, B est un événement tel que $P(B) = 0$ et A est un événement alors on pose

$$P(A \mid B) \cdot P(B) := 0$$

Théorème C23.17 (formule des probabilités composées)
Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.

1. Soient A, B des événements. Alors
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$$
2. Soient $n \geqslant 2$ et $A_1, \ldots, A_n$ des événements. Alors
$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdot \ \ldots \ \cdot P(A_{n-1} \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{n-2}) \cdot P(A_n \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Exercice C23.18 — Une urne contient une boule rouge et une boule noire. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne, en ajoutant une boule de la même couleur. On poursuit indéfiniment le procédé. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note

$$A_n := \text{« la boule rouge n'est pas apparue lors des } n \text{ premiers tirages »}$$

1. Calculer, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $P(A_n)$.
2. Étudier le comportement asymptotique de la suite $(P(A_n))_{n \in \mathbf{N}^*}$.

Théorème C23.19 (formule des probabilités totales)
Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini et $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements. Pour tout événement B

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i) \cdot P(A_i)$$

Exercice C23.20 — Dans une urne U_1 on a placé 4 boules rouges et 3 boules noires et, dans une urne U_2, 2 boules rouges et 5 boules noires. On lance une pièce équilibrée. Si on obtient Pile on tire une boule dans l'urne U_1, sinon on tire une boule dans l'urne U_2. Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ?

Exercice C23.21 — On lance un dé non truqué à 6 faces numérotées de 1 à 6. Si le dé a amené le chiffre k, alors on lance k fois une pièce équilibrée. Quelle la probabilité d'obtenir au moins une fois Pile ?

PROPOSITION C23.22 (FORMULES DE BAYES)
Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.

1. Si A et B sont deux événements tels que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$ alors
$$P(A \mid B) = P(B \mid A) \cdot \frac{P(A)}{P(B)}$$
2. Soient $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ un système complet d'événements et B un événement tel que $P(B) > 0$. Alors
$$\forall\, i \in [\![1, n]\!] \qquad P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i) \cdot P(A_i)}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} P\left(B \mid A_j\right) \cdot P(A_j)}$$

EXERCICE C23.23 — Vous êtes directeur de cabinet du Ministre de la santé. Une maladie est présente dans la population, dans la proportion d'une personne malade sur 10000. Un responsable d'un grand laboratoire pharmaceutique vient vous vanter son nouveau test de dépistage : si une personne est malade, le test est positif à 99%. Si une personne n'est pas malade, le test est positif à 0,1%. Calculer la probabilité qu'une personne soit malade si elle a une réponse positive au test et commenter.

§ 4. LOI D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE

PROPOSITION-DÉFINITION C23.24 (LOI D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE)
Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini, E un ensemble et $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire.

1. L'application
$$P_X \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & P_X(A) := P(X \in A) \end{array} \right.$$
est une probabilité sur $X(\Omega)$, appelée loi de X.
2. La famille $((X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements, appelé système complet d'événements canoniquement associé à X.
3. La probabilité P_X est entièrement déterminée par la distribution de probabilité $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ sur $X(\Omega)$.

MÉTHODE C23.25 — Pour déterminer la loi d'une variable aléatoire X, on procède en deux temps.

1. On détermine d'abord l'ensemble $X(\Omega)$ de ses valeurs.
2. Ensuite, on calcule sa loi en déterminant, pour tout $x \in X(\Omega)$, $P(X = x)$.

EXERCICE C23.26 — On lance un dé non truqué à 4 faces numérotées de 1 à 4. Soit D_1 (resp. D_2) la variable aléatoire égale au résultat obtenu lors du premier (resp. deuxième) lancer.

1. Déterminer les lois des variables aléatoires D_1 et D_2.
2. Soit $(i, j) \in D_1(\Omega) \times D_2(\Omega)$. Que vaut la probabilité $P((D_1 = i) \cap (D_2 = j))$?
3. Déterminer la loi de la variable aléatoire $S := D_1 + D_2$.
4. Déterminer la loi de la variable aléatoire $M := \max(D_1, D_2)$.

DÉFINITION C23.27 (ÉGALITÉ EN LOI DE DEUX VARIABLES ALÉATOIRES)
Soient $(\Omega, P), \left(\Omega', P'\right)$ deux espaces probabilisés finis, E, E' deux ensembles et $X : \Omega \longrightarrow E$, $X' : \Omega' \longrightarrow E'$ deux variables aléatoires. On dit que X et X' sont égales en loi et on note $X \sim X'$, si

(a) $X(\Omega) = X'\left(\Omega'\right)$
(b) les probabilités P_X et $P'_{X'}$ sur $X(\Omega) = X'\left(\Omega'\right)$ sont égales.

Deux variables aléatoires peuvent être égales en loi sans être égales, comme l'illustre C23.28.

Exercice C23.28 — On lance une pièce équilibrée. Soit X la variable aléatoire qui vaut 1 si la pièce a amené Pile et qui vaut 0 si la pièce a amené Face. On pose $Y = 1 - X$. Démonter que $X \sim Y$ et justifier $X \neq Y$.

Proposition C23.29 (Image d'une variable aléatoire)
Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini, E, F des ensembles, $X\colon \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire et $f\colon X(\Omega) \longrightarrow F$ une application. La loi de la variable aléatoire $f \circ X$, usuellement notée $f(X)$, est entièrement déterminée par la loi de X, précisément

$$\forall A \in \mathscr{P}(f(X(\Omega))), \quad P_{f(X)}(A) = P_X\left(f^{-1}(A)\right).$$

Corollaire C23.30 (Égalité en loi des images de deux variables aléatoires égales en loi)
Soient $(\Omega, P), \left(\Omega', P'\right)$ deux espaces probabilisés finis, E, E', F des ensembles, $X\colon \Omega \longrightarrow E$, $X'\colon \Omega' \longrightarrow E'$ deux variables aléatoires telles que $X \sim X'$ et $f\colon X(\Omega) = X'\left(\Omega'\right) \longrightarrow F$ une application. Alors

$$f(X) \sim f\left(X'\right)$$

Définition C23.31 (Loi conditionnelle d'une variable aléatoire sachant un événement)
Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini, B un événement tel que $P(B) > 0$, E un ensemble et $X\colon \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire. La <u>loi conditionnelle de X sachant B</u> est

$$P_{X/B} \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & P_B(X \in A) \end{array} \right.$$

qui est une probabilité sur Ω, entièrement déterminée par la distribution de probabilité $(P_B(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ sur $X(\Omega)$.

§ 5. Loi uniforme sur un ensemble fini non vide

Définition C23.32 (Loi uniforme sur un ensemble fini non vide)
Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini, E un ensemble et $X\colon \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire. On dit que <u>X suit la loi uniforme sur $X(\Omega)$</u> et on note $X \sim \mathscr{U}(X(\Omega))$, si toutes les probabilités $P(X = x)$, où $x \in X(\Omega)$, sont égales ou, ce qui revient au même, si

$$\forall x \in X(\Omega) \quad P(X = x) = \frac{1}{\operatorname{Card}(X(\Omega))}$$

Exemple C23.33 — On lance un dé équilibré, à 6 faces numérotées de 1 à 6, et on note X_1 la variable aléatoire égale au chiffre obtenu. Alors $X_1(\Omega) = [\![1,6]\!]$ et, comme le dé est équilibré, toutes les valeurs de X_1 ont la même probabilité d'apparaître. Donc $X_1 \sim \mathscr{U}([\![1,6]\!])$ et

$$\forall x \in [\![1,6]\!] \quad P(X_1 = x) = \frac{1}{6}$$

Exemple C23.34 — On dispose 100 boules numérotées de 0 à 99, indiscernables au toucher dans une urne. On en tire une et on note N le chiffre obtenu. Alors $N(\Omega) = [\![0,99]\!]$ et, comme les boules sont indiscernables au toucher, toutes les valeurs de N ont la même probabilité d'apparaître. Donc $N \sim \mathscr{U}([\![0,99]\!])$. On a donc

$$\forall x \in [\![0,99]\!] \quad P(N = x) = \frac{1}{100}$$

§ 6. Loi de Bernoulli

Définition C23.35 (loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$)
Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini, $p \in [0,1]$, E un ensemble, $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire. On dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p et on note $X \sim \mathscr{B}(p)$, si

$$X(\Omega) = \{0, 1\} \quad \text{et} \quad P(X = 1) = p$$

Définition C23.36 (terminologie liée à une loi de Bernoulli)
Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini, $p \in [0,1]$, E un ensemble, $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire telle que $X \sim \mathscr{B}(p)$.

1. L'événement $(X = 1)$ est appelé « succès » et l'événement $(X = 0)$ est appelé « échec ».
2. Le paramètre p de la loi de X est donc la probabilité d'avoir un succès.

Situation de reconnaissance de loi C23.37 — Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini, $p \in [0,1]$, E un ensemble, $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire. La variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli si et seulement si $X(\Omega) = \{0, 1\}$. Si tel est le cas, alors $X \sim \mathscr{B}(p)$ où $p := P(X = 1)$.

Proposition C23.38 (probabilité de l'échec pour une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli)
Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini, $p \in [0,1]$, E un ensemble, $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire telle que $X \sim \mathscr{B}(p)$. Alors

$$P(X = 0) = 1 - p$$

Exemple C23.39 — On lance une pièce qui donne deux fois plus de Pile que de Face. On note X la variable aléatoire qui vaut 1 si l'on obtient Face et 0 sinon. Alors X suite une loi de Bernoulli, puisqu'elle a pour valeurs 0 et 1. Son paramètre est

$$p = P(X = 1) = P(\text{« on a obtenu Face »}) = \frac{1}{3}.$$

Exemple C23.40 — On lance un dé équilibré, dont les 6 faces sont numérotées de 1 à 6. On note X la variable aléatoire qui vaut 1 si l'on obtient un chiffre multiple de 3 et 0 sinon. Alors X suite une loi de Bernoulli, puisqu'elle a pour valeurs 0 et 1. Son paramètre est

$$p = P(X = 1) = P(\{3, 6\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Exercice C23.41 — Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini et A un événement. Que dire de l'indicatrice $\mathbb{1}_A$ de A, en termes probabilistes ?

§ 7. Événements indépendants

Définition C23.42 (indépendance de deux événements)
Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Deux événements A, B sont dits <u>indépendants</u> si

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Remarque C23.43 — Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini et A, B deux événements. Si $P(B) > 0$ alors

$$A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \quad \Longleftrightarrow \quad P(A \mid B) = P(A)$$

Proposition C23.44 (indépendance de deux événements et événements contraires)
Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini et A, B deux événements.

$$A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \quad \Longrightarrow \quad A \text{ et } \overline{B} \text{ sont indépendants}$$

Définition C23.45 (famille finie d'événements indépendants)
Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini et $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie d'événements. On dit que <u>les événements A_i $(i \in I)$sont indépendants</u> si

$$\forall J \in \mathscr{P}(I) \quad P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j)$$

L'indépendance deux-à-deux n'implique pas l'indépendance, comme l'illustre C23.46.

Exercice C23.46 — On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer deux fois un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et les événements A, B, C définis respectivement par

$A :=$ « le premier chiffre est pair » $\quad B :=$ « le deuxiéme chiffre est impair » $\quad C :=$ « la somme des chiffres est paire » .

Démontrer que les événements A, B, C sont deux-à-deux indépendants, mais pas indépendants.

Proposition C23.47 (famille finie d'événements indépendants et événements contraires)
Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini et $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie d'événements indépendants. Pour tout $i \in I$, posons

$$A_{i,0} := A_i \quad \text{et} \quad A_{i,1} := \overline{A_i}$$

Pour toute famille $(\varepsilon_i)_{i \in I} \in \{0,1\}^I$, la famille $\left(A_{i,\varepsilon_i}\right)_{i \in I}$ est une famille d'événements indépendants.

Remarque C23.48 — La proposition C23.47 se reformule comme suit. Si dans une famille d'événements mutuellement indépendants, on remplace certains des événements par leurs événements contraires alors l'indépendance est préservée.

Exercice C23.49 — On considère une pièce qui donne Pile avec probabilité $p \in]0,1[$. On lance 10 fois cette pièce. Calculer la probabilité d'obtenir 4 Pile.

§ 8. Loi binomiale

Exercice C23.50 — On considère une expérience de Bernoulli, i.e. une expérience aléatoire qui ne possède que deux issues : 0 (échec) et 1 (succès). La probabilité de succès est notée p. On fixe $n \in \mathbf{N}^*$ et on répète n fois cette expérience de Bernoulli de manière indépendante. Déterminer la loi de la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès.

Définition C23.51 (loi binomiale de paramètre $(n,p) \in \mathbf{N}^* \times [0,1]$)
Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini, $(n,p) \in \mathbf{N}^* \times [0,1]$, E un ensemble, $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire. On dit que <u>X suit la loi binomiale de paramètre (n,p)</u> et on note $X \sim \mathscr{B}(n,p)$, si

$$X(\Omega) = [\![0,n]\!] \quad \text{et} \quad \forall\, k \in [\![0,n]\!] \quad P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Remarque C23.52 — Si $p \in [0,1]$, alors la loi binomiale $\mathscr{B}(1,p)$ coïncide avec la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$.

Situation de reconnaissance de loi C23.53 — Si l'on répète n fois ($n \in \mathbf{N}^*$) une expérience de Bernoulli (i.e. une expérience aléatoire ayant deux issues : 0 et 1) de manière indépendante et si X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès (i.e. de 1) obtenus, alors $X \sim \mathscr{B}(n,p)$ où p est la probabilité de succès lors d'une réalisation de l'expérience de Bernoulli (cf. C23.50).

Exemple C23.54 — On lance une pièce équilibrée 100 fois et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de Face obtenus. Alors $X \sim \mathscr{B}\left(100, \frac{1}{2}\right)$ car X compte le nombre de succès dans 100 répétitions d'une expérience de Bernoulli de manière indépendante. L'expérience de Bernoulli consiste en un lancer de la pièce (qui est équilibrée) avec comme résultat 1 si la pièce donne Face et 0 sinon.

$$\forall\, k \in [\![0,100]\!] \quad P(X=k) = \binom{100}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{100-k} = \binom{100}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{100}$$

Exemple C23.55 — Dans une urne, on place une boule rouge et cinq boules noires. On effectue une suite de 10 tirages avec remise et on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues. On répète donc 10 fois, de manière indépendante (car la boule tirée est remise), une expérience de Bernoulli. Celle-ci consiste à tirer une boule dans l'urne et à prendre comme issue 1 si la boule tirée est rouge et 0 sinon. La variable X compte le nombre de succès. Les boules ayant toutes la même probabilité d'être tirées (hypothèse additionnelle), la probabilité d'avoir un succès lors d'un tirage est $\frac{1}{6}$. La variable X suit donc la loi $\mathscr{B}\left(10, \frac{1}{6}\right)$ et on a

$$\forall\, k \in [\![0,10]\!] \quad P(X=k) = \binom{10}{k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}$$

Exercice C23.56 — Soient $(n,p,q) \in \mathbf{N}^* \times]0,1[\times]0,1[$ et X, Y des variables aléatoires telles que

1. $X \sim \mathscr{B}(n,p)$
2. $Y(\Omega) = [\![0,n]\!]$
3. pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $Y/(X=i) \sim \mathscr{B}(i,q)$.

Déterminer la loi de Y.

§ 9. Couples de variables aléatoires, loi conjointe, lois marginales

Définition C23.57 (loi conjointe, loi marginale)
Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini, E, F deux ensembles, $X\colon \Omega \longrightarrow E$, $Y\colon \Omega \longrightarrow F$ deux variables aléatoires.

1. La loi de la variable aléatoire
$$Z := (X, Y) \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E \times F \\ \omega & \longmapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array} \right.$$
est appelée <u>loi conjointe</u> de X et Y.
2. Les lois de X et Y sont appelées <u>lois marginales</u> de Z.

Méthode C23.58 — Pour déterminer la loi d'un couple $Z = (X, Y)$ de variables aléatoires, on calcule, pour tout $(x, y) \in Z(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$
$$P(X = x, Y = y) := P((X = x) \cap (Y = y))$$

Exercice C23.59 — On lance un dé non truqué à 4 faces numérotées de 1 à 4. Soit D_1 (resp. D_2) la variable aléatoire égale au résultat obtenu lors du premier (resp. deuxième) lancer. On définit deux nouvelles variables aléatoires en posant $S := D_1 + D_2$ et $M := \max(D_1, D_2)$. On souhaite calculer la loi du couple (M, S) et observer un éventuel lien entre la loi de ce couple et ses lois marginales (i.e. les lois de M et S). Dans l'exercice C23.26, nous avons établi

(a) $D_1 \sim \mathscr{U}(\llbracket 1, 6 \rrbracket)$ et $D_2 \sim \mathscr{U}(\llbracket 1, 6 \rrbracket)$;
(b) pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$, les événements $(D_1 = i)$ et $(D_2 = j)$ sont indépendants ;
(c) $S(\Omega) = \llbracket 2, 8 \rrbracket$;
(d) $M(\Omega) = \llbracket 1, 4 \rrbracket$.

La variable aléatoire (M, S) prend ses valeurs dans $\llbracket 1, 4 \rrbracket \times \llbracket 2, 8 \rrbracket$. Calculer, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, 4 \rrbracket \times \llbracket 2, 8 \rrbracket$, $P((M, S) = (i, j))$ <u>en utilisant uniquement les lois de D_1 et D_2</u>, puis reporter les valeurs obtenues dans le tableau ci-dessous.

i \ j	2	3	4	5	6	7	8	somme des valeurs sur les lignes
1								
2								
3								
4								
somme des valeurs sur les colonnes								

Qu'observe-t-on dans la dernière ligne (resp. colonne) ?

Proposition C23.60 (la loi conjointe détermine les lois marginales)
Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini, E, F deux ensembles, $X\colon \Omega \longrightarrow E$, $Y\colon \Omega \longrightarrow F$ deux variables aléatoires. Posons $Z = (X, Y)$.
$$\forall\, x \in X(\Omega) \quad P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(Z = (x, y)) \qquad \text{et} \qquad \forall\, y \in Y(\Omega) \quad P(Y = j) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(Z = (i, j))$$
La loi de Z détermine donc entièrement les lois de X et Y.

Les lois marginales ne déterminent pas nécessairement la loi conjointe.

DÉFINITION C23.61 (LOI CONJOINTE DE n VARIABLES ALÉATOIRES)
Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini, $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$, $E_1, \dots, E_n$ des ensembles et

$$X_1 : \Omega \longrightarrow E_1, \dots, X_n : \Omega \longrightarrow E_n$$

des variables aléatoires.

1. La loi de la variable aléatoire discrète $Z := (X_1, ..., X_n)$ est appelée <u>loi conjointe des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$</u>.
2. Les lois des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont appelées <u>lois marginales de Z</u>.

REMARQUE C23.62 — On considère le contexte introduit en C23.61. Les lois marginales sont déterminées par la loi conjointe, mais la loi conjointe n'est pas nécessairement déterminée par les lois marginales.

§ 10. INDÉPENDANCE DE VARIABLES ALÉATOIRES

DÉFINITION C23.63 (INDÉPENDANCE DE DEUX VARIABLES ALÉATOIRES)
Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini, E, F deux ensembles, $X : \Omega \longrightarrow E$, $Y : \Omega \longrightarrow F$ deux variables aléatoires. On dit que X et Y sont <u>indépendantes</u> si

$$\forall\, (A, B) \in \mathscr{P}(X(\Omega)) \times \mathscr{P}(Y(\Omega)) \quad \text{les événements } (X \in A) \text{ et } (X \in B) \text{ sont indépendants}$$

Dans ce cas, on note $X \perp\!\!\!\perp Y$.

PROPOSITION C23.64 (CRITÈRE POUR L'INDÉPENDANCE DE DEUX VARIABLES ALÉATOIRES)
Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini, E, F deux ensembles et $X : \Omega \longrightarrow E$, $Y : \Omega \longrightarrow F$ deux variables aléatoires.

$$X \perp\!\!\!\perp Y \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \quad P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$$

DÉFINITION C23.65 (INDÉPENDANCE ET IMAGE DE DEUX VARIABLES ALÉATOIRES)
Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini, E, F, E', F' des ensembles, $X : \Omega \longrightarrow E$, $Y : \Omega \longrightarrow F$ deux variables aléatoires et $f : X(\Omega) \longrightarrow E'$, $g : Y(\Omega) \longrightarrow F'$ des applications.

$$X \perp\!\!\!\perp Y \quad \Longrightarrow \quad f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$$

DÉFINITION C23.66 (INDÉPENDANCE D'UNE FAMILLE FINIE DE VARIABLES ALÉATOIRES)
Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini, $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$, $E_1, \dots, E_n$ des ensembles et

$$X_1 : \Omega \longrightarrow E_1 \quad , \quad X_2 : \Omega \longrightarrow E_2 \quad , \quad \dots \quad , \quad X_n : \Omega \longrightarrow E_n$$

des variables aléatoires. On dit que les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont <u>indépendantes</u> si

$$\forall\, (A_1, \dots, A_n) \in \mathscr{P}(X_1(\Omega)) \times \dots \times \mathscr{P}(X_n(\Omega)) \quad ((X_1 \in A_1), \dots, (X_n \in A_n)) \text{ est une famille d'événements indépendants}$$

PROPOSITION C23.67 (CRITÈRE POUR L'INDÉPENDANCE D'UNE FAMILLE FINIE DE VARIABLES ALÉATOIRES)
Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini, $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$, $E_1, \dots, E_n$ des ensembles et

$$X_1 : \Omega \longrightarrow E_1 \quad , \quad X_2 : \Omega \longrightarrow E_2 \quad , \quad \dots \quad , \quad X_n : \Omega \longrightarrow E_n$$

des variables aléatoires. Les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes si et seulement si

$$\forall\, (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega) \quad P(X_1 = x_1\,, X_2 = x_2\,, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \cdot P(X_2 = x_2) \cdot \dots \cdot P(X_n = x_n)$$

PROPOSITION C23.68 (SOMME D'UN NOMBRE FINI DE VARIABLES INDÉPENDANTES DE LOI $\mathscr{B}(p)$ OÙ $p \in]0,1[$)
Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini, $p \in]0,1[$, $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$,

$$X_1 : \Omega \longrightarrow \{0,1\} \quad , \quad X_2 : \Omega \longrightarrow \{0,1\} \quad , \quad \ldots \quad , \quad X_n : \Omega \longrightarrow \{0,1\}$$

des variables aléatoires indépendantes et de loi $\mathscr{B}(p)$.

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n \sim \mathscr{B}(n,p)$$

LEMME C23.69 (DES COALITIONS)
Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini, $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$, $m \in [\![1, n-1]\!]$, $E_1, \ldots, E_n, E', F'$ des ensembles,

$$X_1 : \Omega \longrightarrow E_1 \quad , \quad X_2 : \Omega \longrightarrow E_2 \quad , \quad \ldots \quad , \quad X_n : \Omega \longrightarrow E_n$$

des variables aléatoires indépendantes et

$$f : X_1(\Omega) \times \ldots \times X_m(\Omega) \longrightarrow E' \quad \text{et} \quad g : X_{m+1}(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega) \longrightarrow F'$$

deux applications. Alors les deux variables aléatoires

$$f(X_1, \ldots, X_m) \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E' \\ \omega & \longmapsto & f(X_1(\omega), \ldots, X_m(\omega)) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad g(X_{m+1}, \ldots, X_n) \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & F' \\ \omega & \longmapsto & g(X_{m+1}(\omega), \ldots, X_n(\omega)) \end{array} \right.$$

sont indépendantes.

§ 11. ESPÉRANCE D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE RÉELLE OU COMPLEXE

DÉFINITION C23.70 (ESPÉRANCE D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE FINIE)
Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini et $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ une variable aléatoire. L'espérance de X est le nombre $E(X)$ défini par

$$E(X) := \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot P(X = x) \in \mathbf{C} \qquad [\text{moyenne des valeurs de } X \text{ pondérées par leurs probabilités}]$$

PROPOSITION C23.71 (EXPRESSION DE L'ESPÉRANCE À L'AIDE DE LA PROBABILITÉ DE L'UNIVERS FINI)
Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini et $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ une variable aléatoire.

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\{\omega\})$$

DÉFINITION C23.72 (VARIABLE ALÉATOIRE CENTRÉE)
Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini et $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ une variable aléatoire. La variable aléatoire X est dite <u>centrée</u> si $E(X) = 0$.

EXERCICE C23.73 — Soient des entiers a et b tels que $a < b$ et X une variable aléatoire de loi $\mathscr{U}([\![a,b]\!])$. Calculer $E(X)$.

PROPOSITION C23.74 (ESPÉRANCE D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE FINI SUIVANT UNE LOI USUELLE)
Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire définie sur Ω.

1. Si a est un réel, que l'on confond avec l'application constante sur Ω prenant la valeur a, alors $E(a) = a$.
2. Si $p \in]0,1[$ et $X \sim \mathscr{B}(p)$ alors $E(X) = p$.
3. Si $(n,p) \in \mathbf{N} \times]0,1[$ et $X \sim \mathscr{B}(n,p)$ alors $E(X) = n \cdot p$.

EXERCICE C23.75 — Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini et A un événement. Que vaut l'espérance de $\mathbb{1}_A$?

EXERCICE C23.76 — Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0,n]\!]$. Démontrer

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k)$$

PROPOSITION C23.77 (PROPRIÉTÉS DE L'ESPÉRANCE)
Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.

1. Si $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$, $Y : \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ sont des variables aléatoires et λ, μ sont des complexes, alors
$$E(\lambda \cdot X + \mu \cdot Y) = \lambda \cdot E(X) + \mu \cdot E(Y) \qquad \text{[linéarité de l'espérance]}$$
2. Si $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ est une variable aléatoire, alors
$$X \geqslant 0 \implies E(X) \geqslant 0 \qquad \text{[positivité de l'espérance]}$$
3. Si $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$, $Y : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ sont des variables aléatoires, alors
$$X \leqslant Y \implies E(X) \leqslant E(Y) \qquad \text{[croissance de l'espérance]}$$
4. Si $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ est une variable aléatoire, alors
$$|E(X)| \leqslant E(|X|) \qquad \text{[linéarité de l'espérance]}$$

REMARQUE C23.78 — Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini et $X : \Omega \longrightarrow \mathscr{E}$ une variable aléatoire. Si $X \geqslant 0$ et $E(X) = 0$ alors l'événement $(X = 0)$ est presque sûr, i.e.

$$P(X = 0) = 1$$

THÉORÈME C23.79 (FORMULE DE TRANSFERT)
Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini, E un ensemble, $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire et $f : X(\Omega) \longrightarrow \mathbf{C}$ une application.

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \cdot P(X = x) \qquad \text{[formule de transfert]}$$

EXEMPLE C23.80 — Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini et $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$, $Y : \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ deux variables aléatoires. On pose

$$Z := (X,Y) \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{C}^2 \\ \omega & \longmapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C}^2 & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ (x,y) & \longmapsto & x \cdot y \end{array} \right.$$

Alors

$$\begin{aligned} E(XY) &= E(f(Z)) \\ &= \sum_{z \in Z(\Omega)} f(z) \cdot P(Z = z) \qquad \text{[transfert]} \\ &= \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} f(x,y) \cdot P(Z = (x,y)) \qquad [Z(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)] \\ &= \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} x \cdot y \cdot P((X = x) \cap (Y = y)) \qquad \text{[cf. définition de } f\text{]} \end{aligned}$$

Ainsi

$$E(XY) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} x \cdot y \cdot P((X = x) \cap (Y = y))$$

<u>Si $X \perp\!\!\!\perp Y$</u>, alors

$$E(XY) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} x \cdot y \cdot P(X = x) \cdot P(Y = y) = \left(\sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot P(X = x) \right) \cdot \left(\sum_{y \in Y(\Omega)} y \cdot P(Y = y) \right) = E(X) \cdot E(Y)$$

COROLLAIRE C23.81 (ESPÉRANCE DE L'IMAGE D'UN UPLET DE VARIABLES ALÉATOIRES)
Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini, $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$,

$$X_1 : \Omega \longrightarrow \mathbf{C} \quad , \quad X_2 : \Omega \longrightarrow \mathbf{C} \quad , \quad \dots \quad , \quad X_n : \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$$

des variables aléatoires et

$$f : X_1(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega) \longrightarrow \mathbf{C}$$

une application. Alors l'espérance de la variable aléatoire

$$f(X_1, \ldots, X_n) \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ \omega & \longmapsto & f(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)) \end{array} \right.$$

est donnée par

$$f(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{(x_1,\ldots,x_n) \in X_1(\Omega) \times \ldots X_n(\Omega)} f(x_1, \ldots, x_n) \cdot P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$$

THÉORÈME C23.82 (ESPÉRANCE D'UN PRODUIT DE VARIABLES ALÉATOIRES INDÉPENDANTES)
Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini, $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$,

$$X_1 : \Omega \longrightarrow \mathbf{C} \quad , \quad X_2 : \Omega \longrightarrow \mathbf{C} \quad , \quad \dots \quad , \quad X_n : \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$$

des variables aléatoires. Si $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est une famille de variables aléatoites indépendantes, alors

$$E(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n) = E(X_1) \cdot E(X_2) \cdot \ldots \cdot E(X_n)$$

La réciproque de C23.82 est fausse, comme l'illustre C23.83

EXERCICE C23.83 — Soit X une variable aléatoire telle que $X \sim \mathscr{U}(\{-1, 0, 1\})$ et $Y = X^2$.

1. Démonter $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$.
2. Justifier que les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

EXERCICE C23.84 — Soient $(p, q) \in]0, 1[^2$, X et Y des variables aléatoires telles que $X \sim \mathscr{B}(p)$, $Y \sim \mathscr{B}(q)$. Démontrer que, sans cette situation particulière, $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$ entraîne $X \perp\!\!\!\perp Y$.

§ 12. VARIANCE D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE RÉELLE, COVARIANCE

DÉFINITION C23.85 (VARIANCE ET ÉCART TYPE D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE RÉELLE)
Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini et $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une variable aléatoire.

1. La variable de X, notée $V(X)$, est définie par

$$V(X) := E\left((X - E(X))^2\right) \geqslant 0$$

2. L'écart type de X, noté $\sigma(X)$, est défini par

$$\sigma(X) := \sqrt{V(X)}$$

REMARQUE C23.86 — Variance et écart type d'une variable aléatoire réelle X mesurent la dispersion des valeurs de X par rapport à la valeur moyenne $E(X)$.

EXERCICE C23.87 — Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini et $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une variable aléatoire. Démontrer si $V(X) = 0$ alors l'événement $(X = E(X))$ est presque sûr, i.e. $P(X = E(X)) = 1$.

Définition C23.88 (variable réduite)
Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini et $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une variable aléatoire. La variable aléatoire X est dite réduite si $V(X) = 1$.

Définition C23.89 (effet d'une transformation affine sur la variance)
Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini et $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une variable aléatoire. Pour tout $(a,b) \in \mathbf{R}^2$

$$V(aX+b) = a^2 \cdot V(X)$$

Exercice C23.90 — Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini et $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une variable aléatoire telle que $\sigma(X) > 0$. Que dire de la variable aléatoire $\dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$?

Proposition C23.91 (formule de Koenig-Huygens pour la variance)
Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini et $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$. Alors

$$V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 \qquad \text{[formule de Koenig-Huygens pour la variance]}$$

Proposition C23.92 (variance d'une variable aléatoire fini suivant une loi usuelle)
Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire définie sur Ω.

1. Si a est un réel, que l'on confond avec l'application constante sur Ω prenant la valeur a, alors $V(a) = 0$.
2. Si $p \in]0,1[$ et $X \sim \mathscr{B}(p)$ alors $V(X) = p \cdot (1-p)$.
3. Si $(n,p) \in \mathbf{N} \times]0,1[$ et $X \sim \mathscr{B}(n,p)$ alors $V(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$.

Définition C23.93 (covariance de deux variables aléatoires réelles)
Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini et $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$, $Y : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ deux variables aléatoires. La covariance de X et Y, notée $Cov(X,Y)$, est définie par

$$Cov(X,Y) := E((X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))$$

de sorte que $Cov(X,X) = V(X)$.

Proposition C23.94 (propriétés de covariance)
Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini. La covariance

$$Cov \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^\Omega \times \mathbf{R}^\Omega & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (X,Y) & \longmapsto & Cov(X,Y) = E((X-E(X)) \cdot (Y - E(Y)) \end{array} \right.$$

est une forme bilinéaire, symétrique et positive sur l'ensemble $\mathbf{R}^\Omega$ des variables aléatoires réelles définies sur Ω, i.e.

1. $\forall (X_1, X_2, Y) \in \left(\mathbf{R}^\Omega\right)^3 \quad \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{R}^2 \quad Cov(\lambda_1 \cdot X_1 + \lambda_2 \cdot X_2, Y) = \lambda_1 \cdot Cov(X_1, Y) + \lambda_2 \cdot Cov(X_2, Y)$
2. $\forall (X, Y_1, Y_2) \in \left(\mathbf{R}^\Omega\right)^3 \quad \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{R}^2 \quad Cov(X, \lambda_1 \cdot Y_1 + \lambda_2 \cdot Y_2) = \lambda_1 \cdot Cov(X, Y_1) + \lambda_2 \cdot Cov(X, Y_2)$
3. $\forall (X,Y) \in \left(\mathbf{R}^\Omega\right)^2 \quad Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$
4. $\forall X \in \mathbf{R}^\Omega \quad Cov(X,X) \geqslant 0$

Exercice C23.95 — Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini et $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$, $Y : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ deux variables aléatoires. En considérant la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \lambda & \longmapsto & V(X + \lambda \cdot Y) \end{array} \right.$$

démontrer que

$$|Cov(X,Y)| \leqslant \sigma(X) \cdot \sigma(Y) \qquad \text{[inégalité de Cauchy-Schwarz]}$$

Définition C23.96 (variables décorrélées)
Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini et $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$, $Y : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ deux variables aléatoires. On dit que X et Y sont décorrélées si $Cov(X,Y) = 0$.

Proposition C23.97 (formule de Koenig-Huygens pour la covariance)
Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini et $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$, $Y : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ deux variables aléatoires. Alors

$$Cov(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) \qquad \text{[formule de Koenig-Huygens pour la covariance]}$$

Proposition C23.98 (l'indépendance entraîne la décorrélation)
Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini et $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$, $Y : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ deux variables aléatoires. Alors

$$X \perp\!\!\!\perp Y \quad \Longrightarrow \quad X \text{ et } Y \text{ sont décorrélées}$$

La réciproque de C23.98 est fausse, comme l'illustre C23.83.

Proposition C23.99 (variance d'une somme de variables aléatoires)
Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini, $n \geqslant 2$ et $(X_i : \Omega \longrightarrow \mathbf{R})_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille de variables aléatoires.

1. $V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) + 2 \cdot Cov(X_1, X_2)$
2. Si X_1 et X_2 sont décorrélées alors $V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2)$.
3. $V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \cdot \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} Cov(X_i, Y_j)$
4. Si $X_1, \dots, X_n$ sont deux-à-deux décorrélées alors $V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$.

Exercice C23.100 — Soit $(n,p) \in \mathbf{N}^* \times]0,1[$. Comment retrouver formule de la variance d'une variable aléatoire de loi $\mathscr{B}(n,p)$ à partir de la formule de la variance pour une variable de loi $\mathscr{B}(p)$ et de C23.99 ?

§ 13. Inégalités probabilistes

Théorème C23.101 (inégalité de Markov)
Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini, $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une variable aléatoire telle que $X \geqslant 0$ et $a \geqslant 0$. Alors

$$a \cdot P(X \geqslant a) \leqslant E(X) \qquad \text{[inégalité de Markov]}$$

où $(X \geqslant a) := X^{-1}([a, +\infty[) := \{\omega \in \Omega \,:\, X(\omega) \geqslant a\}$.

Démonstration — Démontrons tout d'abord que

$$X \geqslant a \cdot \mathbb{1}_{(X \geqslant a)}$$

en raisonnant par disjonction de cas.

- Si $\omega \in (X \geqslant a)$ alors
$$X(\omega) \geqslant a = a \cdot 1 = a \cdot \mathbb{1}_{(X \geqslant a)}(a)$$
- Si $\omega \in \Omega \setminus (X \geqslant a)$ alors, comme $X \geqslant 0$
$$X(\omega) \geqslant 0 = a \cdot 0 = a \cdot \mathbb{1}_{(X \geqslant a)}(a)$$

Par croissance et linéarité de l'espérance, il vient

$$(\star) \qquad E(X) \geqslant E\left(a \cdot \mathbb{1}_{(X \geqslant a)}\right) = a \cdot E\left(\mathbb{1}_{(X \geqslant a)}\right)$$

Comme $\mathbb{1}_{(X \geqslant a)} \sim \mathscr{B}(P(X \geqslant a))$, $E\left(\mathbb{1}_{(X \geqslant a)}\right) = P(X \geqslant a)$ et donc $(\star)$ livre

$$E(X) \geqslant a \cdot P(X \geqslant a)$$

EXERCICE C23.102 — Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini, $X\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ et $\varepsilon > 0$. Démontrer les trois inégalités suivantes.

1. $P(|X| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{E(|X|)}{\varepsilon}$
2. $P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{E(|X - E(X)|)}{\varepsilon}$
3. $P(|X| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{E\left(\left|X^2\right|\right)}{\varepsilon^2}$

THÉORÈME C23.103 (INÉGALITÉ DE BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV)
Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini, $X\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une variable aléatoire et $\varepsilon > 0$. Alors

$$P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2} \qquad \text{[inégalité de Bienaymé-Tchebychev]}$$

EXERCICE C23.104 — Soient $p \in \mathbf{N}^*$ et $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes, suivant toutes la loi $\mathscr{B}(p)$. On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k$. Démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$$

REMARQUE C23.105 — Le résultat établi en C23.61 est un cas particulier de la loi faible des grands nombres, qui possède l'interprétation fréquentiste suivante : si l'on répète un « très grand nombre de fois » une même expérience de Bernoulli de manière indépendante, on s'attend à ce que le résultat moyen de ces expériences soit proche de l'espérance du résultat de chaque expérience. Par exemple, après un « très grand nombre » de lancers d'une pièce équilibrée, on s'attend à avoir presque autant de piles que de faces.

EXERCICE C23.106 — Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

1. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires finies, indépendantes et de même loi. On pose $X = X_1 + \ldots + X_n$. Démontrer que
$$\forall a > 0 \quad P\left(\left|\frac{X}{n} - E(X_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \frac{V(X_1)}{n \cdot a^2}$$
2. On effectue n tirages successifs et mutuellement indépendants d'une boule, avec remise, dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. Donner une valeur de n à partir de laquelle la proportion de boules rouges obtenues est comprise, avec une probabilité de 95%, entre 0.35 et 0.45 ?