Chapitre n°22
Dénombrement

§ 1. Cardinal d'un ensemble fini

Théorème C22.1 (existence d'applications injectives/surjectives/bijectives de $[\![1,n]\!]$ vers $[\![1,m]\!]$)
Soit $(n,m) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$.

1. Il existe une application injective $f : [\![1,n]\!] \hookrightarrow [\![1,m]\!]$ si et seulement si $n \leqslant m$.
2. Il existe une application surjective $f : [\![1,n]\!] \twoheadrightarrow [\![1,m]\!]$ si et seulement si $n \geqslant m$.
3. Il existe une application bijective $f : [\![1,n]\!] \xrightarrow{\sim} [\![1,m]\!]$ si et seulement si $n = m$.

Éléments de démonstration —

1. $\boxed{\Longleftarrow}$ Si $n \leqslant m$ alors l'application

$$i \left| \begin{array}{ccc} [\![1,n]\!] & \longrightarrow & [\![1,m]\!] \\ k & \longmapsto & k \end{array} \right.$$

est bien définie et injective.

$\boxed{\Longrightarrow}$ On démontre que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$

$$\mathscr{P}(n) : \text{« } \forall\, m \in \mathbf{N}^* \quad \left(\exists\, f : [\![1,n]\!] \hookrightarrow [\![1,m]\!]\right) \Longrightarrow n \leqslant m \text{ »}$$

2. Conséquence de 1 car il existe une application surjective $f : [\![1,n]\!] \twoheadrightarrow [\![1,m]\!]$ si et seulement s'il existe une application injective $g : [\![1,m]\!] \hookrightarrow [\![1,n]\!]$
3. Conséquence de 1 et 2.

Remarque C22.2 — Ce théorème joue un rôle clé ne serait-ce que pour bien définir la notion de cardinal d'un ensemble fini.

Définition C22.3 (ensemble fini et cardinal d'un tel)
Soit E un ensemble.

1. E est dit fini s'il est vide ou s'il existe un entier $n \in \mathbf{N}^*$ et une bijection $f : E \xrightarrow{\sim} [\![1,n]\!]$.
2. (a) Si $E = \varnothing$, son cardinal, noté $\mathrm{Card}(\varnothing)$ ou $|\varnothing|$, est défini par $\mathrm{Card}(\varnothing) := 0$.
   (b) Si E est fini non vide, alors il existe une bijection E dans $[\![1,n]\!]$, pour un unique entier n (l'unicité découle de C22.1). On appelle cardinal de E, et on note $\mathrm{Card}(E)$ ou $|E|$, le nombre défini par $\mathrm{Card}(E) := n$.

Remarque C22.4 — Soit E un ensemble fini non vide de cardinal $n \in \mathbf{N}^*$ et soit une bijection $f : [\![1,n]\!] \xrightarrow{\sim} E$. On pose, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $x_i := f(i)$. Alors on peut écrire

$$E = \{x_1, \dots, x_n\} \qquad \text{avec } x_1, \dots, x_n \text{ deux-à-deux distincts} \qquad \left[\text{caractère exhaustif et sans répétition}\right]$$

On dit que l'on a énuméré les éléments de E.

Exercice C22.5 — Soit $(a,b) \in \mathbf{Z}^2$ tel que $a \leqslant b$. Jusfifier que $[\![a,b]\!]$ est fini et que

$$\mathrm{Card}\left([\![a,b]\!]\right) = b - a + 1$$

Définition C22.6 (ensembles équipotents)
Deux ensembles E et F sont dits équipotents s'il existe une bijection $f\colon E \xrightarrow{\sim} F$ ou, de manière équivalente, s'il existe une bijection $g\colon F \xrightarrow{\sim} E$.

Remarque C22.7 — Pour étudier la finitude et le cardinal éventuel d'un ensemble, on peut le remplacer par un ensemble équipotent. Cf. proposition C22.8.

Proposition C22.8 (Finitude et cardinal de deux ensembles équipotents)
Soient E et F deux ensembles non vides et équipotents.

1. L'ensemble E est fini si et seulement l'ensemble F l'est.
2. Si E et F sont finis, alors $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$.

Proposition C22.9 (existence d'applications injectives/surjectives/bijectives entre deux ensembles finis)

Soient E et F des ensembles finis non vides.

1. Il existe une injection $f\colon E \hookrightarrow F$ si et seulement si $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$.
2. Il existe une surjection de $f\colon E \twoheadrightarrow F$ si et seulement si $\mathrm{Card}(F) \leqslant \mathrm{Card}(E)$.
3. Il existe une bijection de $f\colon E \xrightarrow{\sim} F$ si et seulement si $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$.

Démonstration — Posons $n := \mathrm{Card}(E) \in \mathbf{N}^*$ et $m := \mathrm{Card}(F) \in \mathbf{N}^*$.

1. D'après la définition du cardinal d'un ensemble fini non vide il existe des bijections

$$g\colon [\![1,n]\!] \xrightarrow{\sim} E \quad \text{et} \quad h\colon [\![1,m]\!] \xrightarrow{\sim} F$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons qu'il existe une injection $f\colon E \hookrightarrow F$. Alors l'application

$$h^{-1}\circ f \circ g\colon [\![1,n]\!] \hookrightarrow [\![1,m]\!]$$

est injective. D'après C22.1, $\mathrm{Card}(E) = n \leqslant m = \mathrm{Card}(F)$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $\mathrm{Card}(E) = n \leqslant m = \mathrm{Card}(F)$. Comme l'application

$$i \left| \begin{array}{ccc} [\![1,n]\!] & \longrightarrow & [\![1,m]\!] \\ k & \longmapsto & k \end{array} \right.$$

est bien définie et injective, l'application

$$h\circ i\circ g^{-1}\colon E \hookrightarrow F$$

est injective.

2. Conséquence de 1 car il existe une application surjective $f\colon E \twoheadrightarrow F$ si et seulement s'il existe une application injective $g\colon F \hookrightarrow E$
3. Conséquence de 1 et 2.

Exercice C22.10 — Soient E un ensemble fini non vide, F un ensemble non vide et $f\colon E \longrightarrow F$ une application. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $(T_1, \dots, T_n)$ une partition de F, i.e.

(a) pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, T_i est une partie de F
(b) pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, $T_i \cap T_j = \emptyset$
(c) $\displaystyle\bigsqcup_{i=1}^{n} T_i = F$

Justifier que si $\mathrm{Card}(E) \geqslant n = 1$ alors

$$\exists (i,x,y) \in [\![1,n]\!] \times E \times E \quad x \neq y \quad \text{et} \quad (f(x), f(y)) \in T_i^2 \qquad [\text{principe des tiroirs}]$$

En déduire que, si $x \in \mathbf{R}$ et $N \in \mathbf{N}^*$ alors

$$\exists (p,q) \in \mathbf{Z} \times [\![1,N]\!] \qquad \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{qN}$$

Indication : on pourra considérer, pour tout $k \in [\![0,N]\!]$, $x_k := kx - \lfloor kx \rfloor$ et, pour tout $r \in [\![0,N-1]\!]$, $T_r := \left[\frac{r}{N}, \frac{r+1}{N}\right[$.

Théorème C22.11 (finitude et cardinal d'une partie de $[\![1,n]\!]$)
Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et A une partie de $[\![1,n]\!]$.

1. L'ensemble A est fini et $\mathrm{Card}(A) \leqslant n$.
2. Si $\mathrm{Card}(A) = n$ alors $A = [\![1,n]\!]$.

Éléments de démonstration —

1. On démontre que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$

$$\mathscr{P}(n) : \text{« } \forall A \in \mathscr{P}([\![1,n]\!]) \quad A \text{ est fini et } \mathrm{Card}(A) \leqslant n \text{ »}$$

2. L'assertion est claire si $n = 1$ car $\{1\}$ est la seule partie non vide de $\{1\}$. On suppose $n \geqslant 2$ et $\mathrm{Card}(A) = n$. Nous raisonnons par l'absurde et supposons de plus que $A \neq [\![1,n]\!]$. Alors l'injection canonique

$$i \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & [\![1,n]\!] \\ a & \longmapsto & a \end{array} \right.$$

n'est pas surjective. Donc il existe $k \in [\![1,n]\!]$ qui n'a pas d'antécédent par i. Donc n n'a pas d'antécédent par l'injection

$$j := \tau_{k,n} \circ i$$

Alors la corestriction de j

$$j^{|[\![1,n-1]\!]} \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & [\![1,n-1]\!] \\ a & \longmapsto & a \end{array} \right.$$

est bien définie et injective. D'après C22.9

$$n = \mathrm{Card}(A) \leqslant n-1 \qquad [\text{contradiction}]$$

Exercice C22.12 — Soient E et F des ensembles non vides, $f : E \longrightarrow F$ une application injective et $A \in \mathscr{P}(E)$. Démontrer que $f^{-1}(f(A)) = A$.

Corollaire C22.13 (finitude et cardinal d'une partie d'un ensemble fini non vide)
Soient E un ensemble fini non vide et A une partie de E.

1. L'ensemble A est fini et $\mathrm{Card}(A) \leqslant \mathrm{Card}(E)$.
2. Si $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(E)$ alors $A = E$.

Démonstration — Posons $n := \mathrm{Card}(E) \in \mathbf{N}^*$. D'après la définition du cardinal d'un ensemble fini non vide il existe une bijection

$$f : E \xrightarrow{\sim} [\![1,n]\!]$$

Nous supposons $A \neq \emptyset$ et observons que l'application

$$f_{|A}^{|f(A)} \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & f(A) \\ a & \longmapsto & f(a) \end{array} \right.$$

est bien définie et bijective.

1. Comme $f(A)$ est une partie de $[\![1,n]\!]$, $f(A)$ est fini et vérifie $\mathrm{Card}\big(f(A)\big) \leqslant n$ (C22.11). Comme $f(A)$ et A sont équipotents, A est fini et

$$\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}\big(f(A)\big) \leqslant n = \mathrm{Card}(E) \qquad [\text{C22.8}]$$

2. Supposons $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(E) = n$. Comme $f(A)$ et A sont équipotents, la partie $f(A)$ de $[\![1,n]\!]$ a pour cardinal n.

Donc $f(A) = [\![1,n]\!]$ (C22.11). Comme f est injective

$$A = f^{-1}(f(A)) = f^{-1}([\![1,n]\!]) = E$$

Théorème C22.14 (caractérisation des bijections entre deux ensembles finis de même cardinal)
Soient E et F deux ensembles finis non vides de même cardinal et $f\colon E \longrightarrow F$ une application. Alors

$$f \text{ est injective} \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ est surjective}$$

Démonstration —

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons f injective. Alors l'application

$$f^{|f(E)} \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & f(E) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

est bien définie et bijective. Donc $f(E)$ est fini et de même cardinal que E (C22.8). Comme $f(E)$ est une partie de l'ensemble fini F et

$$\mathrm{Card}\big(f(E)\big) = \mathrm{Card}\,(E) = \mathrm{Card}\,(F)$$

il vient $f(E) = F$ C22.13. L'application f est donc surjective.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons f surjective. Alors

$$\exists g\colon F \hookrightarrow E \qquad f \circ g = \mathrm{id}_F$$

D'après le sens direct, g est bijective et $f = g^{-1}$ l'est également.

Exercice C22.15 — Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Que dire d'une application injective de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$?

Proposition C22.16 (cardinal d'une réunion disjointe de parties d'un ensemble fini)
Soient E un ensemble fini.

1. Si A et B sont des parties de E qui sont disjointes ($A \cap B = \emptyset$) alors

$$\mathrm{Card}\,(A \sqcup B) = \mathrm{Card}\,(A) + \mathrm{Card}\,(B)$$

2. Plus généralement, si $p \geqslant 2$, $A_1, \ldots, A_p$ sont des parties de E qui sont deux-à-deux disjointes (pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$ tel que $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$) alors

$$\mathrm{Card}\left(\bigsqcup_{i=1}^{p} A_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{Card}\,(A_i)$$

Éléments de démonstration —

1. Si $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$ alors l'assertion est claire. Supposons donc $A \neq \emptyset$ et $B \neq \emptyset$ et posons $n := \mathrm{Card}\,(A) \in \mathbf{N}^*$ et $m := \mathrm{Card}\,(B) \in \mathbf{N}^*$. D'après la définition du cardinal d'un ensemble fini non vide il existe des bijections

$$f\colon [\![1,n]\!] \xrightarrow{\sim} A \quad \text{et} \quad g\colon [\![1,m]\!] \xrightarrow{\sim} B$$

On vérifie que l'application

$$h \left| \begin{array}{ccc} [\![1,n+m]\!] & \longrightarrow & A \sqcup B \\ k & \longmapsto & \begin{cases} f(k) & \text{si } k \in [\![1,n]\!] \\ g(k-n) & \text{si } k \in [\![n+1,m]\!] \end{cases} \end{array} \right.$$

est bien définie et bijective.

2. Se déduit de 1 à l'aide d'un raisonnement par récurrence sur $p \geqslant 2$.

Exercice C22.17 — Soient E un ensemble fini non vide, F un ensemble non vide et $f\colon E \twoheadrightarrow F$ une application surjective telle que toutes les fibres $f^{-1}(\{y\})$ $(y \in F)$ aient même cardinal $p \in \mathbf{N}^*$. Démontrer que F est fini et que le cardinal de F divise le cardinal de E.

Exercice C22.18 — Soit $(G, *)$ un groupe fini et H un sous-groupe de G. Pour tout $g \in G$, on pose

$$g * H := \{g * h \,:\, h \in H\}$$

1. Justifier que la relation $\sim$ sur G définie par
$$\forall\,(g_1, g_2) \in G \quad g_1 \sim g_2 :\Longleftrightarrow g_1 * H = g_2 * H$$
est une relation d'équivalence.
2. Soit $g \in G$. Déterminer la classe d'équivalence $\overline{g}$ de g pour la relation $\sim$ définie par
$$\overline{g} := \{g' \in H \,:\, g' \sim g\} \subset G$$
3. Soit $(g_1, g_2) \in G^2$. Démontrer que les ensembles $g_1 * H$ et $g_2 * H$ sont équipotents.
4. Soit $G/\sim$ l'ensemble des classes d'équivalences de $\sim$ défini par
$$G/\sim := \{\overline{g} \,:\, g \in G\}$$
Justifier que $G/\sim$ est un ensemble fini.
5. En déduire que
$$\mathrm{Card}\,(H) \text{ divise } \mathrm{Card}\,(G) \qquad [\text{théorème de Lagrange}]$$
6. Que dire des sous-groupes d'un groupe fini de cardinal un nombre premier ?

Proposition C22.19 (cardinal du complémentaire d'une partie d'un ensemble fini)
Soient E un ensemble fini et $A \in \mathscr{P}(E)$. Alors

$$\mathrm{Card}\,(E \setminus A) = \mathrm{Card}\,(E) - \mathrm{Card}\,(A)$$

Éléments de démonstration — Le résultat découle de la décomposition ensembliste

$$E = A \sqcup (E \setminus A)$$

et de C22.16.

Proposition C22.20 (cardinal d'une différence de deux parties d'un ensemble fini)
Soient E un ensemble fini et A, B des parties de E telles que $A \subset B$. Alors

$$\mathrm{Card}\,(B \setminus A) = \mathrm{Card}\,(B) - \mathrm{Card}\,(A)$$

Éléments de démonstration — Le résultat découle de la décomposition ensembliste

$$B = A \sqcup (B \setminus A)$$

et de C22.16.

Proposition C22.21 (cardinal d'une réunion de deux parties d'un ensemble fini)
Soient E un ensemble fini et $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$. Alors

$$\mathrm{Card}\,(A \cup B) = \mathrm{Card}\,(A) + \mathrm{Card}\,(B) - \mathrm{Card}\,(A \cap B)$$

Éléments de démonstration — Le résultat découle des décompositions ensemblistes

$$A \cup B = (A \cap B) \sqcup (A \setminus A \cap B) \sqcup (B \setminus A \cap B) \quad , \quad A = (A \cap B) \sqcup (A \setminus A \cap B) \quad , \quad B = (A \cap B) \sqcup (B \setminus A \cap B)$$

de C22.16 et de C22.20.

EXERCICE C22.22 — Soient E un ensemble fini, $p \geqslant 2$ et $A_1, \ldots, A_p$ des parties de E. Démontrer

$$\text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{p} A_i\right) = \sum_{k=1}^{p} (-1)^k \cdot \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \text{Card}\left(\bigcap_{\ell=1}^{k} A_{i_\ell}\right) \qquad \text{[formule du crible de Poincaré]}$$

PROPOSITION C22.23 (FINITUDE ET CARDINAL DU PRODUIT CARTÉSIEN D'UN NOMBRE FINI D'ENSEMBLES FINIS)

1. Soient E et F deux ensembles finis non vides. Alors $E \times F$ est un ensemble fini et
$$\text{Card}\,(E \times F) = \text{Card}\,(E) \cdot \text{Card}\,(F)$$
2. Soient $p \geqslant 2$ et $E_1, \ldots, E_p$ des ensembles finis non vides. Alors $\prod_{k=1}^{p} E_k$ est un ensemble fini et
$$\text{Card}\left(\prod_{k=1}^{p} E_k\right) = \prod_{k=1}^{p} \text{Card}\,(E_k)$$

Éléments de démonstration —

1. Posons $n := \text{Card}\,(E) \in \mathbf{N}^*$ et $m := \text{Card}\,(F) \in \mathbf{N}^*$. D'après la définition du cardinal d'un ensemble fini non vide il existe des bijections
$$f : [\![1, n]\!] \xrightarrow{\sim} E \quad \text{et} \quad g : [\![1, m]\!] \xrightarrow{\sim} F$$
On vérifie que l'application
$$h \left| \begin{array}{ccc} [\![1, nm]\!] & \longrightarrow & E \times F \\ k & \longmapsto & (f(r+1), g(q+1)) \text{ où } q \text{ est le quotient et } r \text{ est le reste de la division euclidienne de } k-1 \text{ par } n \end{array} \right.$$
est bien définie et bijective.
2. Se déduit de 1 à l'aide d'un raisonnement par récurrence sur $p \geqslant 2$.

PROPOSITION C22.24 (FINITUDE ET CARDINAL DE L'ENSEMBLE DES APPLICATIONS D'UN ENSEMBLE FINI DANS UN AUTRE)

Soient E et F deux ensembles finis non vides. Alors l'ensemble F^E des applications de E dans F est fini et
$$\text{Card}\left(F^E\right) = \text{Card}\,(F)^{\text{Card}(E)}$$

Éléments de démonstration — Posons $n := \text{Card}\,(E) \in \mathbf{N}^*$. D'après la définition du cardinal d'un ensemble fini non vide il existe une bijection
$$f : [\![1, n]\!] \xrightarrow{\sim} E$$
On vérifie que l'application
$$g \left| \begin{array}{ccc} F^E & \longrightarrow & F^n \\ \varphi & \longmapsto & \big(\varphi(f(1)), \varphi(f(2)), \ldots, \varphi(f(n))\big) \end{array} \right.$$
est bien définie et bijective. On conclut alors avec C22.8 et C22.23.

PROPOSITION C22.25 (FINITUDE ET CARDINAL DE L'ENSEMBLE DES PARTIES D'UN ENSEMBLE FINI)

Soit E un ensemble fini. Alors l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties de E est fini et
$$\text{Card}\,(\mathscr{P}(E)) = 2^{\text{Card}(E)}$$

Éléments de démonstration — Si A est une partie de E alors l'indicatrice de la partie A de E est l'application notée $\mathbb{1}_A$ définie par
$$\mathbb{1}_A \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \{0, 1\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{array} \right.$$

On vérifie que l'application

$$f \;\Bigg|\; \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \{0,1\}^E \\ A & \longmapsto & \mathbb{1}_A \end{array}$$

est bien définie et bijective. On conclut alors avec C22.8 et C22.24.

§ 2. UPLETS/LISTES ET COMBINAISONS

THÉORÈME C22.26 (NOMBRE DE p-UPLETS SANS RÉPÉTITION)
Soient E un ensemble fini non vide de cardinal n et $p \in \mathbf{N}^*$. Le nombre de p-uplets d'éléments de E sans répétition est

$$\begin{cases} 0 & \text{si } p > n \\ \dfrac{n!}{(n-p)!} & \text{si } p \leqslant n \end{cases}$$

Éléments de démonstration — Nous avons à calculer le cardinal de

$$\mathscr{A}_E^p := \left\{(x_1, \dots, x_p) \in E^p \;:\; x_1, \dots, x_p \text{ sont deux-à-deux distincts}\right\}$$

Cet ensemble est vide si $p > n$ et a pour cardinal $n = \dfrac{n!}{(n-1)!}$ si $p = 1$. Pour $p \in [\![1, n]\!]$, on démontre le résultat par récurrence fini en remarquant

$$\forall\, p \in [\![1, n-1]\!] \quad \mathscr{A}_E^{p+1} = \bigsqcup_{(x_1,\dots,x_p)\in\mathscr{A}_E^p} \;\; \bigsqcup_{y\in E\setminus\{x_1,\dots,x_p\}} \left\{(x_1, \dots, x_p, y)\right\}$$

COROLLAIRE C22.27 (NOMBRE D'INJECTIONS D'UN ENSEMBLE FINI DANS UN AUTRE)
Soient E un ensemble fini non vide de cardinal p et F un ensemble fini non vide de cardinal n. Le nombre d'applications injectives de E dans F est

$$\begin{cases} 0 & \text{si } p > n \\ \dfrac{n!}{(n-p)!} & \text{si } p \leqslant n \end{cases}$$

Éléments de démonstration — D'après C22.9, le résultat est connu dans le cas où $p > n$. Supposons désormais que $p \leqslant n$. On note

$$\mathrm{Inj}(E,F) := \left\{f \in F^E \;:\; f \text{ est injective}\right\}$$

l'ensemble dont nous voulons déterminer le cardinal et

$$\mathscr{A}_F^p := \left\{(x_1, \dots, x_p) \in F^p \;:\; x_1, \dots, x_p \text{ sont deux-à-deux distincts}\right\}$$

ensemble de cardinal $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ d'après C22.26. Si $f : [\![1, p]\!] \xrightarrow{\sim} E$ une bijection alors l'application

$$\varphi \;\Bigg|\; \begin{array}{ccc} \mathrm{Inj}(E,F) & \longrightarrow & \mathscr{A}_F^p \\ \varphi & \longmapsto & \big(\varphi(f(1)), \varphi(f(2)), \dots, \varphi(f(p))\big) \end{array}$$

est bien définie et bijective.

COROLLAIRE C22.28 (NOMBRE DE PERMUTATIONS D'UN ENSEMBLE FINI)
Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n dont l'ensemble des permutations est noté $S(E)$. Alors

$$\mathrm{Card}\,(S(E)) = n!$$

Éléments de démonstration — D'après C22.14, $\mathrm{Inj}(E,E) = S(E)$. On conclut alors avec C22.27.

Exercice C22.29 — Soient $n \in N^*$. Combien y a-t-il de surjections de $[\![1, n+1]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$?

Définition C22.30 (p-combinaison)
Soient E un ensemble et $p \in \mathbf{N}^*$. Une p-combinaison d'éléments de E est une partie de E à p-éléments.

Théorème C22.31 (nombre de p-combinaisons)
Soient E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbf{N}^*$ et $p \in \mathbf{N}^*$. Le nombre de p-combinaisons d'éléments de E est

$$\binom{n}{p} := \begin{cases} 0 & \text{si } p > n \\ \dfrac{n!}{p! \cdot (n-p)!} & \text{si } p \leqslant n \end{cases}$$

Éléments de démonstration — D'après C22.13, l'assertion est claire si $p > n$. Supposons désormais $p \leqslant n$ et notons

$$\mathscr{P}_p(E) : \{A \in \mathscr{P}(E) : \mathrm{Card}(A) = p\}$$

l'ensemble dont nous voulons déterminer le cardinal. L'application

$$\pi \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{A}_E^p & \longrightarrow & \mathscr{P}_p(E) \\ (x_1, x_2, \ldots, x_p) & \longmapsto & \{x_1, x_2, \ldots, x_p\} \end{array} \right.$$

est surjective avec des fibres toute de cardinal $p!$, i.e.

$$\forall\, A \in \mathscr{P}_p(E) \quad \mathrm{Card}\left(\pi^{-1}(A)\right) = p!$$

Avec C22.26 nous en déduisons l'assertion.

Le résultat peut également être démontré par récurrence sur $\mathrm{Card}(E)$, en remarquant que

- $\mathscr{P}_1(E)$ est équipotent à E et donc possède $n = \binom{n}{1}$ éléments
- si e est un élément fixé de E, pour tout $p \in [\![1, n-1]\!]$

$$\mathscr{P}_{p+1}(E) = \left(\bigsqcup_{\substack{A \in \mathscr{P}_{p+1}(E) \\ e \in A}} \right) \{A\} \sqcup \left(\bigsqcup_{\substack{A \in \mathscr{P}_{p+1}(E) \\ e \notin A}} \right) \{A\}$$

et $\left(\bigsqcup_{\substack{A \in \mathscr{P}_{p+1}(E) \\ e \in A}} \right) \{A\}$ est équipotent à $\mathscr{P}_p(E \setminus \{e\})$ et $\left(\bigsqcup_{\substack{A \in \mathscr{P}_{p+1}(E) \\ e \notin A}} \right) \{A\}$ est équipotent à $\mathscr{P}_{p+1}(E \setminus \{e\})$.

Exercice C22.32 — Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Donner une preuve combinatoire de l'identité $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Théorème C22.33 (formule du binôme de Newton)
Soient $(A, +, \times)$ un anneau, $(a, b) \in A^2$ tel que $ab = ba$, $n \in \mathbf{N}$.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}$$

Démonstration — Nous avons déjà donné une démonstration par récurrence de ce résultat. Ici, nous en proposons une preuve combinatoire. Si $n \in \{0, 1\}$, l'assertion est triviale. Nous supposons donc $n \geqslant 2$ dans la suite.
Nous observons que

$$(a+b)^n = \overbrace{(a+b) \cdot (a+b) \cdot \ldots \cdot (a+b)}^{n \text{ facteurs}}$$

En notant $\displaystyle\sum_{x_1\in\{a,b\}} x_1$ le premier facteur, $\displaystyle\sum_{x_2\in\{a,b\}} x_2$ le deuxième facteur, ..., $\displaystyle\sum_{x_n\in\{a,b\}} x_n$ le n-ième facteur il vient

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \left(\sum_{x_1\in\{a,b\}} x_1\right)\cdot\left(\sum_{x_2\in\{a,b\}} x_2\right)\cdot \ldots \cdot\left(\sum_{x_n\in\{a,b\}} x_n\right)\\ &\underset{(1)}{=} \sum_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\{a,b\}^n} x_1\cdot x_2\cdot \ldots \cdot x_n\end{aligned}$$

Nous posons, pour tout $k\in[\![0,n]\!]$

$$E_k := \underbrace{\left\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\{a,b\}^n \;:\; \mathrm{Card}\left(\{i\in[\![0,n]\!] \;:\; x_i=a\}\right)=k\right\}}_{\text{ensemble des } (x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\{a,b\}^n \text{ tels que } k \text{ des } x_1,x_2,\ldots,x_n \text{ égalent } a}$$

de sorte que

$$\{a,b\}^n \underset{(2)}{=} \bigsqcup_{k=0}^{n} E_k$$

De (1) et (2) nous déduisons

$$(a+b)^n \underset{(3)}{=} \sum_{k=0}^{n} \sum_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in E_k} x_1\cdot x_2\cdot \ldots \cdot x_n$$

Comme les éléments a et b commutent

$$(4) \qquad \forall\, k\in[\![0,n]\!] \quad \forall\,(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in E_k \quad x_1\cdot x_2\cdot \ldots \cdot x_n = a^k\cdot b^{n-k}$$

D'après (3) et (4), il vient

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in E_k} a^k\cdot b^{n-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n} a^k\cdot b^{n-k}\cdot \underbrace{\sum_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in E_k} 1}_{\mathrm{Card}(E_k)}\\ &\underset{(5)}{=} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Card}\,(E_k)\cdot a^k\cdot b^{n-k}\end{aligned}$$

Fixons $k\in[\![0,n]\!]$ et notons $\mathscr{P}_k([\![1,n]\!])$ l'ensemble des parties de $[\![0,n]\!]$ à k éléments. Comme l'application

$$\varphi_k \left| \begin{array}{ccc} E_k & \longrightarrow & \mathscr{P}_k([\![1,n]\!]) \\ (x_1,x_2,\ldots,x_n) & \longmapsto & \{i\in[\![1,n]\!] \;:\; x_i=a\} \end{array}\right.$$

est bien définie (si $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in E_k$ alors précisément k des $x_1,x_2,\ldots,x_n$ égalent a) et bijective (à rédiger)

$$(6) \qquad \mathrm{Card}\,(E_k) = \mathrm{Card}\,(\mathscr{P}_k([\![1,n]\!])) = \binom{n}{k} \qquad \text{[cf. C22.31]}$$

De (5) et (6), nous déduisons finalement

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\cdot a^k\cdot b^{n-k}$$