Chapitre n°21
Intégration

§ 1. Fonctions en escalier

Notation C21.1 — Dans cette partie, a et b désignent des nombres réels tels que $a < b$.

Définition C21.2 (subdivision d'un segment, intervalles et pas d'une telle)
(1) Une subdivision de $[a,b]$ est un uplet strictement croissant d'éléments de $[a,b]$ dont le premier terme est a et le dernier b. Une subdivision σ de $[a,b]$ peut donc s'écrire

$$\sigma = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \quad \text{où} \quad n \in \mathbf{N}^* \quad , \quad (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in [a,b]^{n+1} \quad , \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

(2) Si

$$\sigma = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \quad \text{où} \quad n \in \mathbf{N}^* \quad , \quad (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in [a,b]^{n+1} \quad , \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

est une subdivision de $[a,b]$, les intervalles de cette subdivision sont les

$$[x_i, x_{i+1}] \quad \text{où} \quad i \in [\![0, n-1]\!]$$

et le pas de la subdivision σ est

$$h := \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} (x_{i+1} - x_i)$$

Notation C21.3 — L'ensemble des subdivisions de $[a,b]$ est noté $\mathfrak{S}([a,b])$, i.e.

$$\mathfrak{S}([a,b]) := \bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} \left\{ (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in [a,b]^{n+1} \; : \; a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \right\}$$

Exemple C21.4 — Soit $n \in \mathbf{N}^*$. La subdivision régulière de $[a,b]$ à n pas est

$$\left(a + k \cdot \frac{(b-a)}{n} \right)_{k \in [\![0,n]\!]}$$

Ses intervalles sont

$$\left[a, a + \frac{b-a}{n} \right] \quad , \quad \left[a + \frac{b-a}{n}, a + 2 \cdot \frac{b-a}{n} \right] \quad , \quad \ldots \quad , \quad \left[a + (n-2) \cdot \frac{b-a}{n}, a + (n-1) \cdot \frac{b-a}{n} \right] \quad , \quad \left[a + (n-1) \cdot \frac{b-a}{n}, \frac{b-a}{n} \right]$$

Comme ils ont tous longueur $\dfrac{b-a}{n}$, le pas de σ est $h = \dfrac{b-a}{n}$.

Définition C21.5 (ensemble des points d'une subdivision de $[a,b]$)
À chaque subdivision

$$\sigma = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \quad \text{où} \quad n \in \mathbf{N}^* \quad , \quad (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in [a,b]^{n+1} \quad , \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

de $[a,b]$ on associe l'ensemble

$$\mathrm{Ens}(\sigma) := \{ x_i \; : \; i \in [\![0, n]\!] \} \supset \{a, b\}$$

des points de la subdivision σ.

Exemple C21.6 — Pour la subdivision $\sigma = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, 1\right)$ du segment $[0,1]$ on a $\mathrm{Ens}(\sigma) := \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, 1\right\} \supset \{0,1\}$.

DÉFINITION C21.7 (SUBDIVISION DE $[a,b]$ ASSOCIÉE À UNE PARTIE FINIE DE $[a,b]$ CONTENANT a,b)
Soit E une partie finie de $[a,b]$ contenant a,b, de cardinal $n \geqslant 2$. On définit le n-uplet $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ par

$$x_0 := \min(E) = a$$

et pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$

$$x_k := \min\left(E \setminus \{x_0, \dots, x_{k-1}\}\right)$$

Alors par construction $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} = b$ et donc

$$\mathrm{Sub}(E) := (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \qquad [\text{uplet des points de } E \text{ rangés dans l'ordre strictement croissant}]$$

est une subdivision de $[a,b]$.

EXEMPLE C21.8 — Si $E = \left\{0, 1, \frac{1}{5}, \frac{7}{8}, \frac{2}{3}\right\}$ alors $\mathrm{Sub}(E) = \left(0, \frac{1}{5}, \frac{2}{3}, \frac{7}{8}, 1\right)$.

REMARQUE C21.9 — Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}([a,b])$

$$\mathrm{Sub}\left(\mathrm{Ens}(\sigma)\right) = \sigma$$

et, pour toute partie finie E de $[a,b]$ contenant a,b

$$\mathrm{Ens}\left(\mathrm{Sub}(E)\right) = E$$

DÉFINITION C21.10 (RELATION D'ORDRE PARTIEL SUR L'ENSEMBLE DES SUBDIVISIONS DE $[a,b]$)
Pour tout $(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathfrak{S}([a,b])^2$ on dit que σ_1 est plus fine que σ_2, et on note $\sigma_1 \prec \sigma_2$, si

$$\mathrm{Ens}(\sigma_2) \subset \mathrm{Ens}(\sigma_1)$$

On définition ainsi une relation $\prec$ sur $\mathfrak{S}([a,b])$ qui est une relation d'ordre partiel.

PROPOSITION C21.11 (EXISTENCE D'UNE SUBDIVISION PLUS FINE QUE DEUX DONNÉES)

$$\forall\, (\sigma_1, \sigma_2) \in \mathfrak{S}([a,b])^2 \quad \exists \sigma_3 \in \mathfrak{S}([a,b]) \quad \sigma_3 \prec \sigma_1 \text{ et } \sigma_3 \prec \sigma_2$$

Démonstration — Soit $(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathfrak{S}([a,b])^2$. Alors si on pose

$$\sigma_3 := \mathrm{Sub}\left(\mathrm{Ens}(\sigma_1) \cup \mathrm{Ens}(\sigma_2)\right)$$

est une subdivision de $[a,b]$ telle que $\sigma_3 \prec \sigma_1$ et $\sigma_3 \prec \sigma_2$. En effet

$$\mathrm{Ens}(\sigma_3) = \mathrm{Ens}\left(\mathrm{Sub}\left(\mathrm{Ens}(\sigma_1) \cup \mathrm{Ens}(\sigma_2)\right)\right) = \mathrm{Ens}(\sigma_1) \cup \mathrm{Ens}(\sigma_2)$$

contient $\mathrm{Ens}(\sigma_1)$ et $\mathrm{Ens}(\sigma_2)$.

DÉFINITION C21.12 (FONCTIONS EN ESCALIER)
Une fonction $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ est dite en escalier s'il existe une subdivision

$$\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n) \quad \text{où} \quad n \in \mathbf{N}^* \quad , \quad (x_0, x_1, \dots, x_n) \in [a,b]^{n+1} \quad , \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

de $[a,b]$ tel que

$$\forall\, i \in [\![0, n-1]\!] \quad \underbrace{\exists c_i \in \mathbf{R} \quad \forall\, x \in \,]\, x_i\,,\, x_{i+1}\,[\quad f(x) = c_i}_{f \text{ est constante sur l'ouvert }]\, x_i\,,\, x_{i+1}\,[}$$

Si tel est le cas, une telle subdivision σ est dite adaptée à f.

Remarque C21.13 — Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction en escalier et σ est une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f, alors toute subdivision σ' de $[a,b]$ plus fine que σ est également adaptée à f.

Remarque C21.14 — Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction en escalier alors f ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

Exemple C21.15 — La restriction de la fonction partie entière au segment $[a,b]$

$$\left|\begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \lfloor x \rfloor \end{array}\right.$$

est une fonction en escalier sur $[a,b]$.

Proposition C21.16 (restriction d'une fonction en escalier)
Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction en escalier et $[c,d] \subset [a,b]$ alors $f_{|[c,d]}$ est une fonction en escalier sur $[c,d]$.

Proposition C21.17 (valeur absolue d'une fonction en escalier)
Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction en escalier alors

$$|f| \left|\begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & |f(x)| \end{array}\right.$$

est une fonction en escalier sur $[a,b]$.

Notation C21.18 — On note $\mathscr{E}([a,b],\mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions en escaliers de $[a,b]$.

Proposition C21.19 (structure de $\mathscr{E}([a,b],\mathbf{R})$)
L'ensemble $\mathscr{E}([a,b],\mathbf{R})$ est une sous-$\mathbf{R}$-algèbre de $(\mathscr{F}([a,b],\mathbf{R}),+,\times,\cdot)$, i.e.

1. $\mathscr{E}([a,b],\mathbf{R})$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{F}([a,b],\mathbf{R}),+,\cdot)$
2. $\mathscr{E}([a,b],\mathbf{R})$ est une partie de $\mathscr{F}([a,b],\mathbf{R})$ stable par la multiplication interne $\times$
3. $\mathscr{E}([a,b],\mathbf{R})$ contient la fonction

$$1_{\mathscr{F}([a,b],\mathbf{R})} \left|\begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 1 \end{array}\right.$$

Exercice C21.20 — Soient $f \in \mathscr{E}([a,b],\mathbf{R})$, A une partie de $\mathbf{R}$ et $g \in \mathscr{F}(A,\mathbf{R})$ tel que $f([a,b]) \subset A$. Justifier que la fonction

$$g \circ f \left|\begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}\right.$$

est en escalier.

§ 2. Intégration des fonctions en escalier sur un segment

Définition C21.21 (intégrale d'une fonction en escalier relativement à une subdivision)
Soient $f \in \mathscr{E}([a,b],\mathbf{R})$ et

$$\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n) \quad \text{où} \quad n \in \mathbf{N}^* \quad , \quad (x_0, x_1, \dots, x_n) \in [a,b]^{n+1} \quad , \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f, i.e. telle que

$$\forall\, i \in [\![0, n-1]\!] \quad \exists\, c_i \in \mathbf{R} \quad \forall\, x \in\,]\, x_i\,,\, x_{i+1}\,[\quad f(x) = c_i$$

On appelle intégrale de f relativement à la subdivision adaptée σ le nombre $I(f,\sigma)$ défini par

$$I(f,\sigma) := \sum_{i=0}^{n-1} c_i \cdot (x_{i+1} - x_i) \qquad \big[\text{indépendant des valeurs prises par } f \text{ aux points de la subdivision } \sigma\big]$$

Proposition C21.22 (indépendance de l'intégrale d'une fonction en escalier vis-à-vis de la subdivision)
Soient $f \in \mathscr{E}([a,b],\mathbf{R})$ et σ_1, σ_2 deux subdivisions adaptées à f. Alors

$$I(f,\sigma_1) = I(f,\sigma_2)$$

Démonstration — (a) Il existe $\sigma_3 \in \mathfrak{S}([a,b])$ telle que $\sigma_3 \prec \sigma_1$ et $\sigma_3 \prec \sigma_2$. Comme σ_3 est plus fine qu'une subdivision adaptée à f, elle est elle-même adaptée à f et on peut considérer $I(f,\sigma_3)$. Si l'on prouve

$$I(f,\sigma_1) = I(f,\sigma_3) \quad \text{et} \quad I(f,\sigma_2) = I(f,\sigma_3)$$

nous en déduirons l'assertion. Par symétrie des rôles joués par σ_1 et σ_2, il suffit d'établir $I(f,\sigma_1) = I(f,\sigma_3)$.
(b) Notons $\sigma_1 = (a = x_0, x_1, \dots, x_n = b)$. Puisque σ_1 est adaptée à la fonction en escalier f

$$\forall\, i \in [\![0, n-1]\!] \quad \exists\, c_i \in \mathbf{R} \quad \forall\, x \in\,]\, x_i\,,\, x_{i+1}\,[\quad f(x) = c_i$$

et

$$I(f,\sigma_1) := \sum_{i=0}^{n-1} c_i \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

(c) Considérons le cas (particulier mais éclairant) où σ_3 est une subdivision de $[a,b]$ plus fine que σ_1 et telle que

$$\mathrm{Card}\,(\mathrm{Ens}(\sigma_3)) = \mathrm{Card}\,(\mathrm{Ens}(\sigma_1)) + 1$$

Il existe donc un unique $y \in \mathrm{Ens}(\sigma_3)$ tel que $y \neq x_0, y \neq x_1, \dots, y \neq x_n$. Puisque σ_1 est une subdivision de $[a,b]$ il existe un unique $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $y \in\,]x_k, x_{k+1}[$. Ainsi

$$\sigma_3 = \big(a = x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, y, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n = b\big)$$

Comme

$$\left\{\begin{array}{cc}
\forall\, x \in\,]x_0, x_1[& f(x) = c_0 \\
\vdots & \vdots \\
\forall\, x \in\,]x_{k-1}, x_k[& f(x) = c_{k-1} \\
\forall\, x \in\,]x_k, y[\, \subset\,]x_k, x_{k+1}[& f(x) = c_k \\
\forall\, x \in\,]y, x_{k+1}[\, \subset\,]x_k, x_{k+1}[& f(x) = c_k \\
\forall\, x \in\,]x_{k+1}, x_{k+2}[& f(x) = c_{k+1} \\
\vdots & \vdots \\
\forall\, x \in\,]x_{n-1}, x_n[& f(x) = c_{n-1}
\end{array}\right.$$

il vient

$$I(f,\sigma_3) := \left(\sum_{i=0}^{k-1} c_i \cdot (x_{i+1} - x_i)\right) + \underbrace{(y - x_k)\cdot c_k + (x_{k+1} - y)\cdot c_k}_{c_k \cdot (x_{k+1} - x_k)} + \left(\sum_{i=k+1}^{n-1} c_i \cdot (x_{i+1} - x_i)\right) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \cdot (x_{i+1} - x_i) =: I(f,\sigma_1)$$

(d) Pour achever la démonstration, nous démontrons par récurrence que, pour tout $m \in \mathbf{N}$

$$\mathscr{P}(m) \quad : \quad « \forall \sigma_3 \in \mathfrak{S}([a,b]) \quad (\sigma_3 \prec \sigma_1 \text{ et } \mathrm{Card}\,(\mathrm{Ens}(\sigma_3)) = \mathrm{Card}\,(\mathrm{Ens}(\sigma_1)) + m) \implies I(f,\sigma_3) = I(f,\sigma_1) »$$

• Initialisation à $m = 0$. Soit $\sigma_3 \in \mathfrak{S}([a,b])$ telle que $\sigma_3 \prec \sigma_1$ et $\mathrm{Card}\,(\mathrm{Ens}(\sigma_3)) = \mathrm{Card}\,(\mathrm{Ens}(\sigma_1))$. Alors $\mathrm{Ens}(\sigma_3) = \mathrm{Ens}(\sigma_3)$ et donc

$$\sigma_3 = \mathrm{Sub}\,(\mathrm{Ens}(\sigma_3)) = \mathrm{Sub}\,(\mathrm{Ens}(\sigma_1)) = \sigma_1$$

Par suite $I(f,\sigma_3) = I(f,\sigma_1)$.

• Hérédité. Soit $m \in \mathbf{N}$ tel que $\mathscr{P}(m)$ est vraie. Soit $\sigma_3 \in \mathfrak{S}([a,b])$ telle que $\sigma_3 \prec \sigma_1$ et $\mathrm{Card}\,(\mathrm{Ens}(\sigma_3)) = \mathrm{Card}\,(\mathrm{Ens}(\sigma_1)) + m + 1$. Fixons un point

$$y \in \underbrace{\mathrm{Ens}(\sigma_3) \setminus \mathrm{Ens}(\sigma_1)}_{\text{non vide}}$$

et considérons

$$\sigma_3' := \mathrm{Sub}\left(\mathrm{Ens}(\sigma_3) \setminus \{y\}\right) \qquad [\text{subdivision de } [a,b] \text{ obtenue en supprimant le point } y \text{ de la subdivision } \sigma_3]$$

qui est une subdivision de $[a,b]$, plus fine que σ_1 et telle que $\mathrm{Card}\left(\mathrm{Ens}\left(\sigma_3'\right)\right) = \mathrm{Card}\,(\mathrm{Ens}(\sigma_1)) + m$. D'après l'hypothèse de récurrence

$$(\star) \qquad I\left(f,\sigma_3'\right) = I(f,\sigma_1)$$

La subdivision σ_3 est plus fine que la subdivision σ_3' et, par construction de σ_3', $\mathrm{Card}\,(\mathrm{Ens}\,(\sigma_3)) = \mathrm{Card}\left(\mathrm{Ens}\left(\sigma_3'\right)\right) + 1$. En spécialisant le résultat obtenu en (b) à $\sigma_3 \leftarrow \sigma_3$ et $\sigma_1 \leftarrow \sigma_3'$, il vient

$$(\star\star) \qquad I\left(f,\sigma_3'\right) = I(f,\sigma_3)$$

De $(\star)$ et $(\star\star)$ on déduit $I\left(f,\sigma_3\right) = I(f,\sigma_1)$.

Définition C21.23 (intégrale d'une fonction en escalier)

Pour tout $f \in \mathscr{E}([a,b],\mathbf{R})$ l'intégrale de f est le nombre noté $\displaystyle\int_a^b f$ défini par

$$\int_a^b f := I(f,\sigma) \quad \text{où} \quad \sigma \text{ est une subdivision de } [a,b] \text{ adaptée à } f$$

Exemple C21.24 — La fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 1 \end{array} \right.$$

est en escalier et $\displaystyle\int_a^b f = b - a$.

Exemple C21.25 — Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ est nulle, sauf en un nombre fini de points, alors f est en escalier et $\displaystyle\int_a^b f = 0$.

Exercice C21.26 — Que dire d'une fonction $f \in \mathscr{E}([a,b],\mathbf{R})$ telle que $\displaystyle\int_a^b f = 0$?

Exemple C21.27 — Soit

$$f \left| \begin{array}{ccc} [0,3] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{rll} 4 & \text{si} & x = 0 \\ -1 & \text{si} & 0 < x \leqslant 1/2 \\ 7 & \text{si} & 1/2 < x < 2 \\ 0 & \text{si} & x = 2 \\ 5 & \text{si} & 2 < x < 3 \\ -2 & \text{si} & x = 3 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Démontrer que la fonction f est en escalier sur $[0,3]$ et calculer $\displaystyle\int_0^3 f$.

RAPPEL C21.28 — On dispose d'une relation d'ordre partielle sur $\mathscr{F}([a,b],\mathbf{R})$ définie par, pour tout $(f,g)\in\mathscr{F}([a,b],\mathbf{R})^2$

$$f\leqslant g \quad :\Longleftrightarrow \quad \big(\forall\, x\in[a,b] \quad f(x)\leqslant g(x)\big)$$

PROPOSITION C21.29 (PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DE L'INTÉGRALE DES FONCTIONS EN ESCALIER)

1. **Relation de Chasles**

$$\forall\, f\in\mathscr{E}([a,b],\mathbf{R}) \quad \forall\, c\in[a,b] \quad \int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$$

2. **Linéarité**

$$\forall\,(\lambda,\mu)\in\mathbf{R}^2 \quad \forall\,(f,g)\in\mathscr{E}([a,b],\mathbf{R})^2 \quad \int_a^b(\lambda\cdot f+\mu\cdot g)=\lambda\cdot\int_a^b f+\mu\cdot\int_a^b g$$

3. **Positivité**

$$\forall\, f\in\mathscr{E}([a,b],\mathbf{R}) \quad f\geqslant 0\Longrightarrow\int_a^b f\geqslant 0$$

4. **Croissance**

$$\forall\,(f,g)\in\mathscr{E}([a,b],\mathbf{R})^2 \quad f\leqslant g\Longrightarrow\int_a^b f\leqslant\int_a^b g$$

5. **Inégalité triangulaire**

$$\forall\, f\in\mathscr{E}([a,b],\mathbf{R}) \quad \left|\int_a^b f\right|\leqslant\int_a^b|f|$$

§ 3. CONTINUITÉ UNIFORME D'UNE FONCTION

DÉFINITION C21.30 (CONTINUITÉ UNIFORME D'UNE FONCTION)
Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $f\in\mathscr{F}(I,\mathbf{R})$. La fonction f est uniformément continue sur I si

$$\forall\,\varepsilon>0 \quad \exists\,\delta(\varepsilon)>0 \quad \forall\,(x,y)\in I^2 \quad |x-y|\leqslant\delta(\varepsilon)\Longrightarrow|f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon$$

REMARQUE C21.31 — Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $f\in\mathscr{F}(I,\mathbf{R})$. Comparer les quatre assertions suivantes et commenter.

(A1) $\forall\, x\in I \quad \forall\,\varepsilon>0 \quad \exists\,\delta(x,\varepsilon)>0 \quad \forall\, y\in I \quad |x-y|\leqslant\delta(x,\varepsilon)\Longrightarrow|f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon$
(A2) $\forall\,\varepsilon>0 \quad \forall\, x\in I \quad \exists\,\delta(\varepsilon,x)>0 \quad \forall\, y\in I \quad |x-y|\leqslant\delta(\varepsilon,x)\Longrightarrow|f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon$
(A3) $\forall\,\varepsilon>0 \quad \exists\,\delta(\varepsilon)>0 \quad \forall\, x\in I \quad \forall\, y\in I \quad |x-y|\leqslant\delta(\varepsilon)\Longrightarrow|f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon$
(A4) $\forall\,\varepsilon>0 \quad \exists\,\delta(\varepsilon)>0 \quad \forall\,(x,y)\in I^2 \quad |x-y|\leqslant\delta(\varepsilon)\Longrightarrow|f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon$

PROPOSITION C21.32 (CONTINUITÉ UNIFORME VS. CONTINUITÉ)
Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $f\in\mathscr{F}(I,\mathbf{R})$.

$$f \text{ est uniformément continue sur } I \quad\Longrightarrow\quad f \text{ est continue sur } I$$

EXERCICE C21.33 — Démontrer que la fonction carré

$$f\left|\begin{array}{ccc}\mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}\\ x & \longmapsto & x^2\end{array}\right.$$

est continue sur $\mathbf{R}$ mais non uniformément continue sur $\mathbf{R}$.

RAPPEL C21.34 — Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $f\in\mathscr{F}(I,\mathbf{R})$. La fonction f est dite lipschitzienne sur I si

$$\exists\, k\geqslant 0 \quad \underbrace{\forall\,(x,y)\in I^2 \quad |f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|}_{f \text{ est } k\text{-lipschitzienne}}$$

PROPOSITION C21.35 (CONTINUITÉ UNIFORME VS. CARACTÈRE LIPSCHITZIEN)
Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $f \in \mathscr{F}(I,\mathbf{R})$.

$$f \text{ est lipschitzienne sur } I \quad \Longrightarrow \quad f \text{ est uniformément continue sur } I$$

EXERCICE C21.36 — Soit la fonction racine carrée

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$$

1. Démontrer que
$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \quad \left|\sqrt{y}-\sqrt{x}\right| \leqslant \sqrt{|y-x|}$$
2. En déduire que la fonction f est uniformément continue sur $\mathbf{R}_+$.
3. Démontrer que la fonction f n'est pas lipschitzienne sur $\mathbf{R}_+$.

EXERCICE C21.37 — Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $f \in \mathscr{F}(I,\mathbf{R})$ une fonction dérivable dont la dérivée est bornée sur I. Justifier que f est uniformément continue sur I.

LEMME C21.38 (UN RAFFINEMENT DU THÉORÈME DE BOLZANO-WEIERSTRASS)
Soient $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de nombres réels bornées. Alors il existe une application $\varphi \colon \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante et des réels L_x et L_y tels que

$$x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} L_x \quad \text{et} \quad y_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} L_y$$

THÉORÈME C21.39 (HEINE)
Soient a,b des réels tels que $a<b$. Toute fonction continue sur le segment $[a,b]$ est uniformément continue sur $[a,b]$.

§ 4. INTÉGRATION DES FONCTIONS CONTINUES SUR UN SEGMENT

NOTATION C21.40 — Dans cette partie, a et b désignent des nombres réels tels que $a<b$.

NOTATION C21.41 — Pour toute fonction $f \in \mathscr{F}([a,b],\mathbf{R})$ on pose

$$\mathscr{E}^-(f) := \left\{\varphi \in \mathscr{E}([a,b],\mathbf{R}) \;:\; \varphi \leqslant f\right\} \qquad \left[\text{ensemble des fonctions en escalier dominée par } f\right]$$

et

$$\mathscr{E}^+(f) := \left\{\psi \in \mathscr{E}([a,b],\mathbf{R}) \;:\; f \leqslant \psi\right\} \qquad \left[\text{ensemble des fonctions en escalier qui dominent } f\right]$$

PROPOSITION-DÉFINITION C21.42 (INTÉGRALE INFÉRIEURE ET INTÉGRALE SUPÉRIEURE D'UNE FONCTION BORNÉE)
Soit $f \in \mathscr{F}([a,b],\mathbf{R})$ une fonction bornée sur $[a,b]$. Les nombres réels

$$I^-(f) = \sup_{\varphi\in\mathscr{E}^-(f)} \int_a^b \varphi \quad \text{et} \quad I^+(f) = \inf_{\psi\in\mathscr{E}^+(f)} \int_a^b \psi$$

sont bien définis. On les appelle respectivement intégrale inférieure de f et intégrale supérieure de f. Ils vérifient

$$I^-(f) \leqslant I^+(f)$$

DÉFINITION C21.43 (FONCTION RIEMANN-INTÉGRABLE ET INTÉGRALE D'UNE TELLE)
Soit $f \in \mathscr{F}([a,b],\mathbf{R})$ une fonction bornée sur $[a,b]$.

1. La fonction f est dite Riemann-intégrable si son intégrale inférieure égale son intégrale supérieure, i.e. si

$$\underbrace{\sup_{\varphi \in \mathscr{E}^-(f)} \int_a^b \varphi}_{I^-(f)} = \underbrace{\inf_{\psi \in \mathscr{E}^+(f)} \int_a^b \psi}_{I^+(f)}$$

2. Si f est Riemann-intégrable alors son intégrale notée $\displaystyle\int_a^b f$ est définie par

$$\int_a^b f := I^-(f) = I^+(f)$$

REMARQUE C21.44 — Si $f \in \mathscr{E}([a,b],\mathbf{R})$ alors

$$I^-(f) = \int_a^b f = I^+(f)$$

donc f est Riemann-intégrable et les définitions de $\displaystyle\int_a^b f$ données en C21.23 et C21.43 coïncident.

THÉORÈME C21.45 (D'APPROXIMATION UNIFORME DES FONCTIONS CONTINUES PAR DES FONCTIONS EN ESCALIER)
Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbf{R})$.

1. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \left(\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon\right) \in \mathscr{E}([a,b],\mathbf{R})^2 \quad \forall x \in [a,b] \quad \left(\varphi_\varepsilon(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi_\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \psi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(x) \leqslant \varepsilon\right)$
2. $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \exists \left(\varphi_n, \psi_n\right) \in \mathscr{E}([a,b],\mathbf{R})^2 \quad \forall x \in [a,b] \quad \left(\varphi_n(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi_n(x) \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \psi_n(x) - \varphi_n(x) \leqslant \dfrac{1}{n}\right)$

LEMME C21.46 (CRITÈRE DE NULLITÉ POUR UN NOMBRE RÉEL)
Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$(\forall \varepsilon > 0 \quad |x| \leqslant \varepsilon) \implies x = 0$$

THÉORÈME C21.47 (RIEMANN-INTÉGRABILITÉ D'UNE FONCTION CONTINUE)
Toute fonction continue sur $[a,b]$ est Riemann-intégrable.

EXERCICE C21.48 — Soit la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbf{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \in [0,1] \setminus \mathbf{Q} \end{cases} \end{array} \right.$$

Démontrer $I^-(f) = 0$ et $I^+(f) = 1$. Qu'en déduire ?

EXERCICE C21.49 — Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose

$$g_n \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{k}{n} & \text{si } \exists k \in [\![0,n-1]\!] \quad x \in \left[\dfrac{k}{n}, \dfrac{k+1}{n}\right[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{array} \right. \qquad h_n \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{k+1}{n} & \text{si } \exists k \in [\![0,n-1]\!] \quad x \in \left[\dfrac{k}{n}, \dfrac{k+1}{n}\right[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{array} \right.$$

1. Calculer la valeur de $\displaystyle\int_0^1 x \,\mathrm{d}x$, à l'aide des fonctions g_n et h_n $(n \geqslant 2)$
2. Adapter la démarche pour calculer $\displaystyle\int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^1 x^3 \,\mathrm{d}x$.

PROPOSITION C21.50 (PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DE L'INTÉGRALE DES FONCTIONS CONTINUES SUR $[a,b]$)

1. **Relation de Chasles**
$$\forall f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbf{R}) \quad \forall c \in [a,b] \quad \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$
2. **Linéarité**
$$\forall (\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2 \quad \forall (f,g) \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbf{R})^2 \quad \int_a^b (\lambda\cdot f + \mu\cdot g) = \lambda\cdot\int_a^b f + \mu\cdot\int_a^b g$$
3. **Positivité**
$$\forall f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbf{R}) \quad f \geqslant 0 \Longrightarrow \int_a^b f \geqslant 0$$
4. **Croissance**
$$\forall (f,g) \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbf{R})^2 \quad f \leqslant g \Longrightarrow \int_a^b f \leqslant \int_a^b g$$
5. **Inégalité triangulaire**
$$\forall f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbf{R}) \quad \left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$$

THÉORÈME C21.51 (SÉPARATION DE L'INTÉGRALE DES FONCTIONS CONTINUES)
Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbf{R})$.
$$\left(f \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \int_a^b f = 0 \right) \quad \Longrightarrow \quad f = 0$$

EXERCICE C21.52 — Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbf{R})$. Démontrer
$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \quad \Longleftrightarrow \quad \left(f \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad f \leqslant 0 \right)$$

DÉFINITION C21.53 (EXTENSION DE LA DÉFINITION D'INTÉGRALE POUR LES FONCTIONS CONTINUES)
Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$, $(a,b) \in I^2$ tel que $a \geqslant b$ et $f \in \mathscr{C}^0(I,\mathbf{R})$. On pose
$$\int_a^b f := \begin{cases} 0 & \text{si } a = b \\ -\displaystyle\int_b^a f & \text{si } a > b \end{cases}$$

PROPOSITION C21.54 (PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE ENTRE DEUX POINTS)
Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$.

1. **Relation de Chasles**
$$\forall f \in \mathscr{C}^0(I,\mathbf{R}) \quad \forall (a,b,c) \in I^3 \quad \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$
2. **Linéarité**
$$\forall (\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2 \quad \forall (f,g) \in \mathscr{C}^0(I,\mathbf{R})^2 \quad \forall (a,b) \in I^2 \quad \int_a^b (\lambda\cdot f + \mu\cdot g) = \lambda\cdot\int_a^b f + \mu\cdot\int_a^b g$$

EXERCICE C21.55 — Justifier que la fonction
$$f \left| \begin{array}{ccc}]0,1[\cup]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$
est bien définie et déterminer son signe.

EXERCICE C21.56 — Justifier que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $W_n := \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\ \mathrm{d}t > 0$.

§ 5. SOMMES DE RIEMANN

THÉORÈME C21.57 (SOMMES DE RIEMANN)
Soient a, b des réels tels que $a < b$ et $f \in \mathscr{C}^0([a,b], \mathbf{R})$.

$$\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f \quad \text{et} \quad \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f$$

EXERCICE C21.58 — Étudier le comportement asymptotique de la suite $\left(u_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}\right)_{n \in \mathbf{N}^*}$.

EXERCICE C21.59 — Étudier le comportement asymptotique de la suite $\left(u_n := \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{\sqrt{4n^2 - k^2}}\right)_{n \in \mathbf{N}^*}$.

EXERCICE C21.60 — Donner un équivalent de $u_n := \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

§ 6. LIEN ENTRE INTÉGRALE ET PRIMITIVE

THÉORÈME C21.61 (FONDAMENTAL DE L'ANALYSE)
Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}$ et $f \in \mathscr{C}^0(I, \mathbf{R})$. La fonction

$$F_a \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est l'unique primitive de f sur I nulle en a.

COROLLAIRE C21.62 (CS D'EXISTENCE DE PRIMITIVES)
Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives.

PROPOSITION-DÉFINITION C21.63 (VALEUR MOYENNE D'UNE INTÉGRALE DE FONCTION CONTINUE SUR UN SEGMENT)
Soient a, b des réels tels que $a < b$ et $f \in \mathscr{C}^0([a,b], \mathbf{R})$.

1. La valeur moyenne de la fonction f sur $[a,b]$ notée $\underset{[a,b]}{\mathrm{moy}}(f)$, est définie par
$$\underset{[a,b]}{\mathrm{moy}}(f) := \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$$
2. $\min\limits_{[a,b]}(f) \leqslant \underset{[a,b]}{\mathrm{moy}}(f) \leqslant \max\limits_{[a,b]}(f)$
3. $\exists c \in [a,b] \quad f(c) = \underset{[a,b]}{\mathrm{moy}}(f)$ $\quad$ [la valeur moyenne de la fonction f est une valeur de f]

EXERCICE C21.64 — Soient a, b des réels tels que $a < b$, $(f, g) \in \mathscr{C}^0([a,b], \mathbf{R})^2$. Si $g \geqslant 0$ alors

$$\exists c \in]a,b[\quad \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\cdot\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

THÉORÈME C21.65 (LIEN ENTRE PRIMITIVE ET INTÉGRALE)
Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $f \in \mathscr{C}^0(I, \mathbf{R})$. Si F est une primitive de f sur I alors

$$\forall (a,b) \in I^2 \quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

REMARQUE C21.66 — Le théorème C21.65 nous permet de calculer des intégrales au moyen de primitives. Il est d'un intérêt pratique majeur et ouvre la voie à deux techniques calculatoires précieuses, rappelées ci-dessous.

PROPOSITION C21.67 (INTÉGRATION PAR PARTIES)
Soient $u\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ et $v\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$.

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

PROPOSITION C21.68 (CHANGEMENT DE VARIABLES)
Soient I un intervalle, $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue et $\varphi\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $\varphi([a,b]) \subset I$.

$$\int_a^b f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

EXERCICE C21.69 — Démontrer

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\sqrt{n}$$

EXERCICE C21.70 — Étudier la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_x^{2x} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

PROPOSITION C21.71 (INTÉGRATION ET PARITÉ)
Soient a un réel strictement positif et $f \in \mathscr{C}^0([-a,a], \mathbf{R})$.

1. Si f est paire alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t = 2\cdot\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$
2. Si f est impaire alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$

PROPOSITION C21.72 (INTÉGRATION ET PÉRIODICITÉ)
Soient $T > 0$, $f \in \mathscr{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ une fonction T-périodique et $a \in \mathbf{R}$.

$$\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$$

EXERCICE C21.73 — Pour tout $A \in \mathbf{R}_+$, on pose

$$I(A) := \int_{-A}^A \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$$

Justifier que, pour tout $A \in \mathbf{R}_+$, $I(A)$ est bien définie, puis étudier la limite éventuelle de $I(A)$ lorsque A tend vers $+\infty$.

§ 7. Formules de Taylor globales

Remarque C21.74 — Si $n \in \mathbf{N}$, I un intervalle de $\mathbf{R}$, $a \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction n fois dérivable, alors on pose

$$T(f,n,a) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (X-a)^k \in \mathbf{R}_n[X] \qquad [\text{polynôme de Taylor d'ordre } n \text{ de } f \text{ en } a]$$

et on note

$$R(f,n,a) \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - T(f,n,a)(x) = f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k \end{array} \right.$$

la fonction appelée reste de Taylor d'ordre n de f en a. Nous avons déjà rencontré deux formules de Taylor.

1. D'après la formule de Taylor exacte dans $\mathbf{R}[X]$

$$f \text{ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à } n \implies R(f,n,a) = 0 \qquad [\text{énoncé polynomial}]$$

2. D'après la formule de Taylor-Young

$$f \in \mathscr{C}^n(I,\mathbf{R}) \implies R(f,n,a) \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}\left(x^n\right) \qquad [\text{énoncé local}]$$

Théorème C21.75 (formule de Taylor avec reste intégral)
Soit $n \in \mathbf{N}$, I un intervalle de $\mathbf{R}$, $a \in I$ et $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I,\mathbf{R})$.

$$\forall x \in I \quad f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k}_{\text{polynôme de Taylor d'ordre } n \text{ de } f \text{ en } a} + \underbrace{\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} \cdot f^{(n+1)}(t)\, \mathrm{d}t}_{\text{reste intégral d'ordre } n \text{ de } f \text{ en } a} \qquad [\text{énoncé global}]$$

Exercice C21.76 — Démontrer

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x$$

et en déduire le comportement asymptotique de la suite $\left(u_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)\right)_{n \in \mathbf{N}^*}$

Théorème C21.77 (inégalité de Taylor-Lagrange)
Soit $n \in \mathbf{N}$, I un intervalle de $\mathbf{R}$, $a \in I$ et $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I,\mathbf{R})$. On suppose que

$$\exists M \in \mathbf{R}_+ \quad \forall x \in I \quad \left|f^{(n+1)}(x)\right| \leqslant M$$

Alors

$$\forall x \in I \quad \left| \underbrace{f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k}_{\text{reste de Taylor d'ordre } n \text{ de } f \text{ en } a} \right| \leqslant \frac{M \cdot |x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Exercice C21.78 — Soit $x \in \mathbf{R}$. On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$S_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

Démontrer que $S_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \exp(x)$.

§ 8. Fonctions continues par morceaux sur un segment

Notation C21.79 — Dans cette partie, a et b désignent des réels tels que $a < b$.

Définition C21.80 (fonction continue par morceaux)
Soit $f \in \mathscr{F}([a,b], \mathbf{R})$. On dit que f est continue par morceaux sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision

$$\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n) \quad \text{où} \quad n \in \mathbf{N}^* \quad , \quad (x_0, x_1, \dots, x_n) \in [a,b]^{n+1} \quad , \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

de $[a,b]$ tel que

$$\text{pour tout } i \in [\![0, n-1]\!], \quad \text{la fonction } f_{|\,]x_i, x_{i+1}[} \text{ est continue et } \underbrace{\text{prolongeable par continuité en } x_i \text{ et en } x_{i+1}}_{\lim\limits_{\substack{x \to x_i \\ x > x_i}} f \text{ et } \lim\limits_{\substack{x \to x_{i+1} \\ x < x_{i+1}}} f(x) \text{ existent dans } \mathbf{R}}$$

Si tel est le cas, une telle subdivision σ est dite adaptée à f.

Remarque C21.81 — Si σ est une subdivision de $[a,b]$ adaptée à une fonction continue par morceaux $f \in \mathscr{F}([a,b], \mathbf{R})$, alors toute subdivision de $[a,b]$ plus fine que σ est également adaptée à f.

Exemple C21.82 — La fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x = -1 \\ x & \text{si } -1 < x < 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \\ \sin(x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ -1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{array} \right.$$

est continue par morceaux sur $[-1,1]$.

Exemple C21.83 — La fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} e^x & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 1/x & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \end{cases} \end{array} \right.$$

n'est pas continue par morceaux sur $[-1,1]$.

Proposition C21.84 (caractérisation des fonctions continues par morceaux)
Une fonction $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ est continue par morceaux si et seulement s'il existe une partie finie D de $[a,b]$ telle que
- (P1) f est continue en tout point de $[a,b] \setminus D$
- (P2) f possède des limites finies à droite en tout point de D distinct de b
- (P3) f possède des limites finies à gauche en tout point de D distinct de a.

Proposition C21.85 (restriction d'une fonction continue par morceaux)
Si $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction continue par morceaux et $[c,d] \subset [a,b]$ alors $f_{|[c,d]}$ est une fonction continue par morceaux sur $[c,d]$.

Proposition C21.86 (valeur absolue d'une fonction continue par morceaux)
Si $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction continue par morceaux alors

$$|f| \left| \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & |f(x)| \end{array} \right.$$

est une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$.

Notation C21.87 — On note $\mathscr{CM}([a,b],\mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$, qui sont continues par morceaux sur $[a,b]$, i.e.

$$\mathscr{CM}([a,b],\mathbf{R}) := \left\{f \in \mathscr{F}([a,b],\mathbf{R}) \;:\; f \text{ est continue par morceaux sur } [a,b]\right\}$$

Remarque C21.88 — On a les inclusions suivantes $\mathscr{E}([a,b],\mathbf{R}) \subset \mathscr{CM}([a,b],\mathbf{R})$ et $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbf{R}) \subset \mathscr{CM}([a,b],\mathbf{R})$.

Proposition C21.89 (structure de $\mathscr{CM}([a,b],\mathbf{R})$)
L'ensemble $\mathscr{CM}([a,b],\mathbf{R})$ est une sous-$\mathbf{R}$-algèbre de $(\mathscr{F}([a,b],\mathbf{R}),+,\times,\cdot)$, i.e.

1. $\mathscr{CM}([a,b],\mathbf{R})$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{F}([a,b],\mathbf{R}),+,\cdot)$
2. $\mathscr{CM}([a,b],\mathbf{R})$ est une partie de $\mathscr{F}([a,b],\mathbf{R})$ stable par la multiplication interne $\times$
3. $\mathscr{CM}([a,b],\mathbf{R})$ contient la fonction

$$1_{\mathscr{F}([a,b],\mathbf{R})} \left| \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 1 \end{array} \right.$$

Exercice C21.90 — Soient les fonctions

$$f \left| \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad g \left| \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \lfloor x \rfloor \end{array} \right.$$

1. Justifier que f est continue sur $[-1,1]$ et que g est continue par morceaux sur $[-1,1]$.
2. Démontrer que $f([-1,1]) \subset [-1,1]$.
3. Démontrer que la fonction $g \circ f$ ne possède pas de limite en 0 à droite.

En conséquence, une composée de fonctions continues par morceaux n'est pas nécessairement continue par morceaux.

§ 9. Intégration des fonctions continues par morceaux sur un segment

Proposition C21.91 (Riemann-intégrabilité d'une fonction continue par morceaux)
Soit $f \in \mathscr{CM}([a,b],\mathbf{R})$ et une subdivision

$$\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n) \quad \text{où} \quad n \in \mathbf{N}^* \quad , \quad (x_0, x_1, \dots, x_n) \in [a,b]^{n+1} \quad , \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

de $[a,b]$ adaptée à la fonction f. Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, on note $\overline{f_{|\,]x_i,x_{i+1}[}}$ le prolongement par continuité de la fonction la fonction $f_{|\,]x_i,x_{i+1}[}$ au segment $[x_i, x_{i+1}]$, i.e.

$$\overline{f_{|\,]x_i,x_{i+1}[}} \left| \begin{array}{ccc} [x_i,x_{i+1}] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x_i < x < x_{i+1} \\ \lim\limits_{\substack{x \to x_i \\ x > x_i}} & \text{si } x = x_i \\ \lim\limits_{\substack{x \to x_{i+1} \\ x < x_{i+1}}} & \text{si } x = x_{i+1} \end{cases} \end{array} \right.$$

Alors la fonction f est Riemann-intégrable et

$$\int_a^b f = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \overline{f_{|\,]x_i,x_{i+1}[}}$$

Exercice C21.92 — Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_{-2}^{1} x \cdot \lfloor x \rfloor \,\mathrm{d}x$ est bien définie et la calculer.

DÉFINITION C21.93 (FONCTION CONTINUE PAR MORCEAUX SUR UN INTERVALLE)
Soient I un intervalle et $f \in \mathscr{F}(I, \mathbf{R})$. La fonction f est continue par morceaux sur I si et seulement si, pour tout $(\alpha, \beta) \in I^2$ tel que $\alpha < \beta$, la fonction $f_{|[\alpha,\beta]}$ est continue par morceaux sur le segment $[\alpha, \beta]$.

EXEMPLE C21.94 — La fonction partie entière

$$\lfloor \cdot \rfloor \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \text{l'unique } k \in \mathbf{Z} \text{ tel que } k \leqslant x < k+1 \end{array} \right.$$

est continue par morceaux sur $\mathbf{R}$.

PROPOSITION C21.95 (PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE DES FONCTIONS CONTINUES PAR MORCEAUX SUR $[a, b]$)

1. **Relation de Chasles**
$$\forall f \in \mathscr{CM}([a,b], \mathbf{R}) \quad \forall c \in [a,b] \quad \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$
2. **Linéarité**
$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \quad \forall (f,g) \in \mathscr{CM}([a,b], \mathbf{R})^2 \quad \int_a^b (\lambda \cdot f + \mu \cdot g) = \lambda \cdot \int_a^b f + \mu \cdot \int_a^b g$$
3. **Positivité**
$$\forall f \in \mathscr{CM}([a,b], \mathbf{R}) \quad f \geqslant 0 \implies \int_a^b f \geqslant 0$$
4. **Croissance**
$$\forall (f,g) \in \mathscr{CM}([a,b], \mathbf{R})^2 \quad f \leqslant g \implies \int_a^b f \leqslant \int_a^b g$$
5. **Inégalité triangulaire**
$$\forall f \in \mathscr{CM}([a,b], \mathbf{R}) \quad \left| \int_a^b f \right| \leqslant \int_a^b |f|$$
6. **Intégration et parité**
$$\forall f \in \mathscr{CM}([-a,a], \mathbf{R}) \quad f \text{ paire} \implies \int_{-a}^a f(t)\, \mathrm{d}t = 2 \cdot \int_0^a f(t)\, \mathrm{d}t$$
7. **Intégration et imparité**
$$\forall f \in \mathscr{CM}([-a,a], \mathbf{R}) \quad f \text{ impaire} \implies \int_{-a}^a f(t)\, \mathrm{d}t = 0$$
8. **Intégration et périodicité**
$$\forall T > 0 \quad \forall f \in \mathscr{CM}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \quad \int_a^{a+T} f(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\, \mathrm{d}t$$
9. **Sommes de Riemann à gauche**
$$\forall f \in \mathscr{CM}([a,b], \mathbf{R}) \quad \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f$$
10. **Sommes de Riemann à droite**
$$\forall f \in \mathscr{CM}([a,b], \mathbf{R}) \quad \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f$$

REMARQUE C21.96 — On ne dispose pas de propriété de séparation pour l'intégrale d'une fonction continue par morceaux. En effet, la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

est continue par morceaux sur $[-1,1]$, positive sur $[-1,1]$, d'intégrale nulle sur $[-1,1]$, mais elle n'est pas identiquement nulle sur $[-1,1]$.

Remarque C21.97 — On ne dispose pas du théorème fondamental de l'analyse pour les fonctions continues par morceaux. En effet, la fonction

$$\operatorname{sgn} \left| \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} -1 & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ 1 & \text{si } x>0 \end{cases} \end{array} \right.$$

est continue par morceaux sur $[-1,1]$ mais la fonction

$$F \left| \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x \operatorname{sgn}(t)\,\mathrm{d}t = |x| \end{array} \right.$$

n'est pas dérivable en 0.

§ 10. Généralisation aux fonctions à valeurs complexes

§ 10.1 Fonctions continues par morceaux à valeurs complexes

Définition C21.98 (fonctions continues par morceaux à valeurs complexes)
Une fonction $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{C}$ est dite continue par morceaux si les fonctions

$$\operatorname{Re}(f) \left| \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{Re}(f(x)) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(f) \left| \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{Im}(f(x)) \end{array} \right.$$

sont continues par morceaux au sens de la définition C21.80.

Notation C21.99 — On note $\mathscr{CM}([a,b],\mathbf{C})$ l'ensemble des fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbf{C}$, qui sont continues par morceaux sur $[a,b]$, i.e.

$$\mathscr{CM}([a,b],\mathbf{C}) := \left\{ f \in \mathscr{F}([a,b],\mathbf{C}) \ :\ f \text{ est continue par morceaux sur } [a,b] \right\}$$

Remarque C21.100 — Grâce à la définition C21.98 et

$$\forall f \in \mathscr{F}([a,b],\mathbf{C}) \quad f = \operatorname{Re}(f) + i \cdot \operatorname{Im}(f)$$

on étend les définitions et propriétés établies pour les fonctions continues par morceaux à valeurs réelles aux fonctions continues par morceaux à valeurs complexes.

Proposition C21.101 (restriction d'une fonction continue par morceaux à valeurs complexes)
Si $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{C}$ est une fonction continue par morceaux et $[c,d] \subset [a,b]$ alors $f_{|[c,d]}$ est une fonction continue par morceaux sur $[c,d]$.

Proposition C21.102 (module d'une fonction continue par morceaux)
Si $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{C}$ est une fonction continue par morceaux alors

$$|f| \left| \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & |f(x)| \end{array} \right. \qquad [\text{ici } |\cdot| \text{ désigne le module}]$$

est une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$.

Notation C21.103 — On note $\mathscr{CM}([a,b],\mathbf{C})$ l'ensemble des fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbf{C}$, qui sont continues par morceaux sur $[a,b]$, i.e.

$$\mathscr{CM}([a,b],\mathbf{C}) := \left\{ f \in \mathscr{F}([a,b],\mathbf{C}) \ :\ f \text{ est continue par morceaux sur } [a,b] \right\}$$

PROPOSITION C21.104 (STRUCTURE SUR $\mathscr{CM}([a,b],\mathbf{C})$)
L'ensemble $\mathscr{CM}([a,b],\mathbf{C})$ est une sous-$\mathbf{C}$-algèbre de $\mathscr{F}([a,b],\mathbf{C})$. i.e.

1. $\mathscr{CM}([a,b],\mathbf{C})$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{F}([a,b],\mathbf{C}),+,\cdot)$
2. $\mathscr{CM}([a,b],\mathbf{C})$ est une partie de $\mathscr{F}([a,b],\mathbf{C})$ stable par la multiplication interne $\times$
3. $\mathscr{CM}([a,b],\mathbf{C})$ contient la fonction
$$1_{\mathscr{F}([a,b],\mathbf{C})} \left| \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & 1 \end{array} \right.$$

DÉFINITION C21.105 (FONCTIONS CONTINUES PAR MORCEAUX À VALEURS COMPLEXES DÉFINIES SUR UN INTERVALLE)
Soit I un intervalle. La fonction $f\colon I \longrightarrow \mathbf{C}$ est dite continue par morceaux si, pour tout $[\alpha,\beta] \subset I$, la fonction $f_{|[\alpha,\beta]}$ est continue par morceaux sur $[\alpha,\beta]$.

§ 10.2 INTÉGRALE DES FONCTIONS CONTINUES PAR MORCEAUX À VALEURS COMPLEXES

DÉFINITION C21.106 (INTÉGRALE DES FONCTIONS C.P.M. À VALEURS COMPLEXES DÉFINIES SUR UN INTERVALLE)
Soit $f \in \mathscr{CM}([a,b],\mathbf{C})$. Alors on pose
$$\int_a^b f := \int_a^b \mathrm{Re}(f) + i \cdot \int_a^b \mathrm{Im}(f)$$

PROPOSITION C21.107 (PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE DES FONCTIONS C.P.M. SUR $[a,b]$ À VALEURS COMPLEXES)

1. **Relation de Chasles**
$$\forall\, f \in \mathscr{CM}([a,b],\mathbf{C}) \quad \forall\, c \in [a,b] \qquad \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$
2. **Linéarité**
$$\forall\,(\lambda,\mu) \in \mathbf{C}^2 \quad \forall\,(f,g) \in \mathscr{CM}([a,b],\mathbf{C})^2 \qquad \int_a^b (\lambda\cdot f + \mu\cdot g) = \lambda\cdot\int_a^b f + \mu\cdot\int_a^b g$$
3. **Inégalité triangulaire**
$$\forall\, f \in \mathscr{CM}([a,b],\mathbf{C}) \qquad \left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f| \qquad [\text{ici } |\cdot| \text{ désigne le module}]$$
4. **Intégration et parité**
$$\forall\, f \in \mathscr{CM}([-a,a],\mathbf{C}) \quad f \text{ paire} \implies \int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t = 2\cdot\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$$
5. **Intégration et imparité**
$$\forall\, f \in \mathscr{CM}([-a,a],\mathbf{C}) \quad f \text{ impaire} \implies \int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$
6. **Intégration et périodicité**
$$\forall\, T > 0 \quad \forall\, f \in \mathscr{CM}(\mathbf{R},\mathbf{C}) \qquad \int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$$
7. **Sommes de Riemann à gauche**
$$\forall\, f \in \mathscr{CM}([a,b],\mathbf{C}) \quad \frac{b-a}{n}\cdot\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\cdot\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f$$
8. **Sommes de Riemann à droite**
$$\forall\, f \in \mathscr{CM}([a,b],\mathbf{C}) \quad \frac{b-a}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\cdot\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f$$

§ 10.3 Intégrale des fonctions continues à valeurs complexes

Théorème C21.108 (fondamental de l'analyse pour les fonctions à valeurs complexes)
Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}$ et $f \in \mathscr{C}^0(I, \mathbf{C})$. La fonction

$$F_a \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est l'unique primitive de f sur I nulle en a.

Corollaire C21.109 (CS d'existence de primitives pour les fonctions à valeurs complexes)
Toute fonction continue à valeurs complexes sur un intervalle possède des primitives.

Théorème C21.110 (lien entre primitive et intégrale pour les fonctions à valeurs complexes)
Soient I un intervalle de $\mathbf{C}$ et $f \in \mathscr{C}^0(I, \mathbf{C})$. Si F est une primitive de f sur I alors

$$\forall (a,b) \in I^2 \quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

Proposition C21.111 (intégration par parties pour les fonctions à valeurs complexes)
Soient $u\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{C}$ et $v\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{C}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$.

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

Proposition C21.112 (changement de variables pour les fonctions à valeurs complexes)
Soient I un intervalle, $f\colon I \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue et $\varphi\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $\varphi([a,b]) \subset I$.

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Théorème C21.113 (formule de Taylor avec reste intégral pour les fonctions à valeurs complexes)
Soit $n \in \mathbf{N}$, I un intervalle de $\mathbf{R}$, $a \in I$ et $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbf{C})$.

$$\forall x \in I \quad f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k}_{\text{polynôme de Taylor d'ordre } n \text{ de } f \text{ en } a} + \underbrace{\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} \cdot f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t}_{\text{reste intégral d'ordre } n \text{ de } f \text{ en } a} \qquad [\text{énoncé global}]$$

Théorème C21.114 (inégalité de Taylor-Lagrange pour les fonctions à valeurs complexes)
Soit $n \in \mathbf{N}$, I un intervalle de $\mathbf{R}$, $a \in I$ et $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbf{C})$. On suppose que

$$\exists M \in \mathbf{R}_+ \quad \forall x \in I \quad \left| f^{(n+1)}(x) \right| \leqslant M \qquad [\text{ici } |\cdot| \text{ désigne le module}]$$

Alors

$$\forall x \in I \quad \left| \underbrace{f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k}_{\text{reste de Taylor d'ordre } n \text{ de } f \text{ en } a} \right| \leqslant \frac{M \cdot |x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \qquad [\text{ici } |\cdot| \text{ désigne le module}]$$

§ 11. Synthèse des résultats sur l'intégrale

Pour connaître les propriétés que possède une intégrale il convient d'analyser

1. la régularité de l'intégrande (continue par morceaux ou continue)
2. l'ensemble d'arrivée de l'intégrande (**C** ou **R**).

Il faut savoir exprimer formellement toutes les propriétés ci-dessous, en respectant la régularité et l'ensemble de valeurs.

Intégrales des fonctions c.p.m à valeurs dans C

1. Relation de Chasles
2. Linéarité
3. Inégalité triangulaire
4. Intégration et parité
5. Intégration et imparité
6. Intégration et périodicité
7. Résultat sur les sommes de Riemann à gauche
8. Résultat sur les sommes de Riemann à droite

Intégrales des fonctions c.p.m à valeurs dans R

1. Relation de Chasles
2. Linéarité
3. Positivité
4. Croissance
5. Inégalité triangulaire
6. Intégration et parité
7. Intégration et imparité
8. Intégration et périodicité
9. Résultat sur les sommes de Riemann à gauche
10. Résultat sur les sommes de Riemann à droite

Intégrales des fonctions continues à valeurs dans C

1. Relation de Chasles
2. Linéarité
3. Inégalité triangulaire
4. Intégration et parité
5. Intégration et imparité
6. Intégration et périodicité
7. Résultat sur les sommes de Riemann à gauche
8. Résultat sur les sommes de Riemann à droite
9. Théorème fondamental de l'analyse
10. Condition suffisante d'existence de primitives
11. Lien fondamental entre intégrales et primitives
12. Intégration par parties (régularité $\mathscr{C}^1$)
13. Changement de variables (régularité mixte $\mathscr{C}^0$, $\mathscr{C}^1$)

Intégrales des fonctions continues à valeurs dans R

1. Relation de Chasles
2. Linéarité
3. Positivité
4. Croissance
5. **Séparation :** $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbf{R})$, $f \geqslant 0$, $\displaystyle\int_a^b f = 0$
6. Inégalité triangulaire
7. Intégration et parité
8. Intégration et imparité
9. Intégration et périodicité
10. Résultat sur les sommes de Riemann à gauche
11. Résultat sur les sommes de Riemann à droite
12. Théorème fondamental de l'analyse
13. Condition suffisante d'existence de primitives
14. Lien fondamental entre intégrales et primitives
15. Intégration par parties (régularité $\mathscr{C}^1$)
16. Changement de variables (régularité mixte $\mathscr{C}^0$, $\mathscr{C}^1$)