Chapitre n°20
Applications linéaires

Notation C20.1 — Dans ce document, la lettre $\mathbf{K}$ désigne le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

§ 1. Définition et exemples fondamentaux

Définition C20.2 (application linéaires)
Soient $(E, +_E, \cdot_E)$ et $(F, +_F, \cdot_F)$ deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite linéaire si

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2 \quad f\left(\lambda \cdot_E x +_E \mu \cdot_E y\right) = \lambda \cdot_F f(x) +_F \mu \cdot_F f(y)$$

Notation C20.3 — Si E et F sont deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, on note $\mathscr{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F, i.e.

$$\mathscr{L}(E,F) := \left\{f \in F^E \ : \ f \text{ est linéaire}\right\}$$

Proposition C20.4 (image du vecteur nul de la source d'une application linéaire)
Soient E, F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors

$$f(0_E) = 0_F$$

Exemple C20.5 — L'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^3 & \longrightarrow & \mathbf{K}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x-3y+3t, x+7t-8t) \end{array} \right.$$

est linéaire.

Définition C20.6 (application linéaire canoniquement associée à une matrice)
Soient $(n,p) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. L'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right.$$

est linéaire. Elle est appelée application linéaire canoniquement associée à la matrice A.

Exemple C20.7 — Soient $(n,p) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$. L'application

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{p,n}(\mathbf{K}) \\ A & \longmapsto & A^\top \end{array} \right.$$

est linéaire.

Exemple C20.8 — Soit $n \in \mathbf{N}^*$. L'application

$$\mathrm{Tr} \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n}(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ A & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} [A]_{i,i} \end{array} \right.$$

est linéaire.

EXEMPLE C20.9 — Soit $a \in \mathbf{K}$. L'application

$$\mathrm{eval}_a \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ P & \longmapsto & \widetilde{P}(a) \end{array} \right.$$

est linéaire.

EXEMPLE C20.10 — L'application

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}[X] \\ P & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k \in \mathbf{N}} (k+1) \cdot [P]_{k+1} \cdot X^k \end{array} \right.$$

est linéaire.

EXEMPLE C20.11 — Soit I un intervalle non vide de $\mathbf{R}$. L'application

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^1(I, \mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^0(I, \mathbf{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array} \right.$$

est linéaire.

EXEMPLE C20.12 — Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. L'application

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^0([a,b], \mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est linéaire.

EXERCICE C20.13 — Soient un entier $n \geqslant 2$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Les applications ϕ et ψ définies ci-dessous sont-elles linéaires ?

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \\ M & \longmapsto & AMA \end{array} \right. \qquad \psi \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \\ M & \longmapsto & MAM^\top \end{array} \right.$$

§ 2. OPÉRATIONS SUR LES APPLICATIONS LINÉAIRES

PROPOSITION C20.14 (COMBINAISON LINÉAIRE D'APPLICATIONS LINÉAIRES)
Soient E, F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$, $(f, g) \in \mathscr{L}(E,F)^2$. Alors l'application

$$\lambda \cdot f + \mu \cdot g \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x) \end{array} \right.$$

COROLLAIRE C20.15 (STRUCTURE DE K-ESPACE VECTORIEL DE $\mathscr{L}(E,F)$)
Soient E, F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. L'ensemble $\mathscr{L}(E,F)$ muni des deux lois de composition

$$+ \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) \times \mathscr{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E,F) \\ (f,g) & \longmapsto & f+g \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x)+g(x) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\cdot \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K} \times \mathscr{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E,F) \\ (\lambda,f) & \longmapsto & \lambda \cdot f \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \lambda \cdot f(x) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

est un espace vectoriel.

Remarque C20.16 — Soient E, F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. Le vecteur nul de $\mathscr{L}(E,F)$ est la fonction

$$0_{\mathscr{L}(E,F)} \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 0_F \end{array} \right.$$

et, si l'opposé d'une application $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est

$$-f \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & -f(x) \end{array} \right.$$

Proposition C20.17 (composition d'applications linéaires)
Soient E, F, G trois $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors l'application

$$g \circ f \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array} \right.$$

est linéaire.

Proposition C20.18 (bilinéarité de la composition d'applications linéaires)
Soient E, F, G trois $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. L'application

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(F,G) \times \mathscr{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E,G) \\ (g,f) & \longmapsto & g \circ f \end{array} \right.$$

est bilinéaire, i.e.

$$\forall (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbf{K}^2 \quad \forall (g_1,g_2) \in \mathscr{L}(F,G)^2 \quad \forall f \in \mathscr{L}(E,F) \quad (\lambda_1 \cdot g_1 + \lambda_2 \cdot g_2) \circ f = \lambda_1 \cdot g_1 \circ f + \lambda_2 \cdot g_2 \circ f \qquad [\text{linéarité à gauche}]$$

$$\forall g \in \mathscr{L}(F,G) \quad \forall (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbf{K}^2 \quad \forall (f_1,f_2) \in \mathscr{L}(E,F)^2 \quad g \circ (\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2) = \lambda_1 \cdot g \circ f_1 + \lambda_2 \cdot g \circ f_2 \qquad [\text{linéarité à droite}]$$

Définition C20.19 (isomorphisme)
Soient E, F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$. On dit que f est un isomorphisme si f est linéaire et bijective.

Exercice C20.20 — Soit l'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x-y, x+y) \end{array} \right.$$

Démontrer que f est un isomorphisme et calculer son application réciproque f^{-1}.

Proposition C20.21 (application réciproque d'un isomorphisme)
Soient E, F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ un isomorphisme. Alors l'application réciproque de f

$$f^{-1} \left| \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ y & \longmapsto & \text{l'unique } x \in E \text{ tel que } f(x) = y \end{array} \right.$$

est un isomorphisme.

Exercice C20.22 — Soit l'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & P + P' \end{array} \right.$$

Démontrer que f est un isomorphisme et calculer son application réciproque f^{-1}.

§ 3. Noyau, image et rang

Proposition C20.23 (image directe (resp. réciproque) d'un sous-espace par une application linéaire)
Soient E, F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

1. Si A est un sous-espace vectoriel de E alors
$$f(A) := \{f(a) \,:\, a \in A\} \qquad [\text{image directe de } A \text{ par } f]$$
est un sous-espace vectoriel de F.
2. Si B est un sous-espace vectoriel de F alors
$$f^{-1}(B) := \{x \in E \,:\, f(x) \in B\} \qquad [\text{image réciproque de } B \text{ par } f]$$
est un sous-espace vectoriel de E.

Définition C20.24 (noyau et image d'une application linéaire)
Soient E, F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

1. Le noyau de f, noté $\mathrm{Ker}(f)$, est défini par
$$\mathrm{Ker}(f) := f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E \,:\, f(x) = 0_F\} \qquad [\text{sous-espace vectoriel de } E]$$
2. L'image de f, notée $\mathrm{Im}(f)$, est définie par
$$\mathrm{Im}(f) := f(E) = \{f(x) \,:\, x \in E\} \qquad [\text{sous-espace vectoriel de } F]$$

Exercice C20.25 — Soit l'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y+z, 2x+y+2z, x+y+z) \end{array} \right.$$

Démontrer que l'application f est linéaire, puis déterminer son noyau et son image.

Proposition C20.26 (critère d'injectivité (resp. de surjectivité) pour une application linéaire)
Soient E, F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

1. L'application f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.
2. L'application f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.

Exercice C20.27 — Soit l'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, y+z) \end{array} \right.$$

Démontrer que l'application f est linéaire, puis déterminer son noyau et son image. Qu'en déduire ?

Exercice C20.28 — Soient

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbf{K}) \quad , \quad f \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbf{K}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array} \right.$$

Démontrer que l'application f est linéaire, puis déterminer son noyau et son image. Qu'en déduire ?

Exercice C20.29 — Soient l'application

$$V \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^{\mathbf{N}} & \longrightarrow & \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbf{N}} & \longmapsto & (u_{n+1})_{n\in\mathbf{N}} \end{array} \right.$$

Démontrer que l'application V est linéaire, puis déterminer son noyau et son image. Qu'en déduire ?

PROPOSITION C20.30 (FAMILLE GÉNÉRATRICE DE L'IMAGE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE)
Soient E, F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

1. Si $(e_i)_{i\in I}$ une famille génératrice de E alors $\left(f(e_i)\right)_{i\in I}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}\left(f\right)$.
2. En particulier, s'il existe $n \in \mathbf{N}^*$ et une famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ génératrice de E alors

$$\mathrm{Im}\left(f\right) = \mathrm{Vect}\left(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\right)$$

EXERCICE C20.31 — Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et l'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}_n[X] \\ P & \longmapsto & n \cdot P - X P' \end{array} \right.$$

Démontrer que l'application f est bien définie, linéaire et déterminer son image. Qu'en déduire ?

DÉFINITION C20.32 (APPLICATION LINÉAIRE DE RANG FINI ET RANG D'UNE TELLE)
Soient E, F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

1. On dit que f est de rang fini si l'espace vectoriel $\mathrm{Im}\left(f\right)$ est de dimension finie.
2. Si f est de rang finie alors on définit son rang, noté $\mathrm{rg}\left(f\right)$, par

$$\mathrm{rg}\left(f\right) := \dim\left(\mathrm{Im}\left(f\right)\right)$$

PROPOSITION C20.33 (APPLICATION LINÉAIRE DONT LA SOURCE EST DE DIMENSION FINIE)
Soient E, F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. S'il existe $n \in \mathbf{N}^*$ et une famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ génératrice de E alors l'application f est de rang fini et

$$\mathrm{rg}\left(f\right) = \mathrm{rg}\left(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\right)$$

EXERCICE C20.34 — Soit l'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^4 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, y+z, x+z, x+y+z) \end{array} \right.$$

Démontrer que l'application f est linéaire, de rang fini et calculer son $\mathrm{rg}\left(f\right)$.

PROPOSITION C20.35 (RANG D'UNE COMPOSÉE D'APPLICATIONS LINÉAIRES)
Soient E, F, G trois $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. On suppose que les applications f et g sont de rang fini.

1. L'application $g \circ f$ est de rang fini et
$$\mathrm{rg}\left(g \circ f\right) \leqslant \min\left\{\mathrm{rg}\left(f\right), \mathrm{rg}\left(g\right)\right\}$$
2. Si f est un isomorphisme alors $\mathrm{rg}\left(g \circ f\right) = \mathrm{rg}\left(g\right)$.
3. Si g est un isomorphisme alors $\mathrm{rg}\left(g \circ f\right) = \mathrm{rg}\left(f\right)$.

Démonstration — 1. Soit $z \in \mathrm{Im}\left(g \circ f\right)$. Alors il existe $x \in E$ tel que

$$z = g(f(x)) \in \mathrm{Im}\left(g\right)$$

Comme, pour $z \in \mathrm{Im}\left(g \circ f\right)$, $z \in \mathrm{Im}\left(g\right)$

$$\mathrm{Im}\left(g \circ f\right) \subset \mathrm{Im}\left(g\right)$$

Puisque, par hypothèse, $\mathrm{Im}\left(g\right)$ est un espace de dimension finie, $\mathrm{Im}\left(g \circ f\right)$ est de dimension finie (i.e. $g \circ f$ est de rang fini) et

$$(\star) \qquad \mathrm{rg}\left(g \circ f\right) := \dim\left(\mathrm{Im}\left(g \circ f\right)\right) \leqslant \dim\left(\mathrm{Im}\left(g\right)\right) =: \mathrm{rg}\left(g\right)$$

Par hypothèse, $\mathrm{Im}\left(f\right)$ est de dimension finie. Si $\dim\left(\mathrm{Im}\left(f\right)\right) = 0$ alors f est l'application nulle et $\mathrm{rg}\left(g \circ f\right) = \mathrm{rg}\left(f\right) = 0$, ce qui livre l'inégalité à prouver. Supposons donc $n := \dim\left(\mathrm{Im}\left(f\right)\right) \geqslant 1$ et considérons une base $(y_1, \dots, y_n)$ de $\mathrm{Im}\left(f\right)$.

Soit $z \in \mathrm{Im}(g \circ f)$. Alors il existe $x \in E$ tel que
$$z = g(f(x)) \in \mathrm{Im}(g)$$
Comme $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$, il existe (un unique) $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ tel que
$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot y_i$$
d'où, avec la linéarité de g
$$z = g(f(x)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot g(y_i) \in \mathrm{Vect}\left(g(y_1), \dots g(y_n)\right)$$
Comme, pour $z \in \mathrm{Im}(g \circ f)$, $z \in \mathrm{Vect}\left(g(y_1), \dots g(y_n)\right)$
$$\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Vect}\left(g(y_1), \dots g(y_n)\right)$$
Ainsi
$$(\star\star) \qquad \mathrm{rg}(g \circ f) := \dim\left(\mathrm{Im}(g \circ f)\right) \leqslant \dim\left(\mathrm{Vect}\left(g(y_1), \dots g(y_n)\right)\right) \leqslant n := \dim\left(\mathrm{Im}(f)\right) =: \mathrm{rg}(f)$$
De $(\star)$ et $(\star\star)$ nous déduisons $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \min\{\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g)\}$.

2. Supposons que f est un isomorphisme. Nous démontrons
$$\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g)$$
ce qui livrera $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(g)$.

$\boxed{\subset}$ L'inclusion $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$ a été établie au 1.

$\boxed{\supset}$ Soit $z \in \mathrm{Im}(g)$. Alors il existe $y \in F$ tel que
$$z = g(y)$$
Comme l'application $f : E \longrightarrow F$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, d'où
$$z = g(f(x)) \in \mathrm{Im}(g \circ f)$$
Comme, pour $z \in \mathrm{Im}(g)$, $z \in \mathrm{Im}(g \circ f)$
$$\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(g \circ f)$$

3. Supposons que g est un isomorphisme. Par hypothèse, $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie. Si $\dim\left(\mathrm{Im}(f)\right) = 0$ alors f est l'application nulle et $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f) = 0$, ce qui livre l'inégalité à prouver. Supposons donc $n := \dim\left(\mathrm{Im}(f)\right) \geqslant 1$ et considérons une base $(y_1, \dots, y_n)$ de $\mathrm{Im}(f)$. Nous démontrons que
$$\left(g(y_1), \dots, g(y_n)\right)$$
est une base de $\mathrm{Im}(g \circ f)$ ce qui livrera $\mathrm{rg}(g \circ f) = n = \mathrm{rg}(f)$.

- Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $y_i \in \mathrm{Im}(f)$ et donc il existe $x_i \in E$ tel que $y_i = f(x_i)$ d'où
$$g(y_i) = g(f(x_i)) \in \mathrm{Im}(g \circ f)$$
Comme $\mathrm{Im}(g \circ f)$ est un sous-espace vectoriel de G, il vient
$$\mathrm{Vect}\left(g(y_1), \dots, g(y_n)\right) \subset \mathrm{Im}(g \circ f) \qquad \text{[minimalité]}$$
L'inclusion réciproque a été établie en 1, donc la famille $\left(g(y_1), \dots, g(y_n)\right)$ est génératrice de $\mathrm{Im}(g \circ f)$.
- Il reste à démontrer que la famille $\left(g(y_1), \dots, g(y_n)\right)$ est libre. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot g(y_i) = 0_G$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot g(y_i) = 0_G \quad & \Longrightarrow \quad g\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot y_i\right) = 0_G \qquad [g \text{ est linéaire}] \\ & \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot y_i = 0_F \qquad [g \text{ est injective}] \\ & \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0_{\mathbf{K}} \qquad [\text{la famille } (y_1, \dots, y_n) \text{ est libre}] \end{aligned}$$

Remarquons que seule la surjectivité de f a été utile pour établir 2 et seule l'injectivité de g a été utile pour établir 3.

§ 4. Endomorphisme

Définition C20.36 (endomorphisme)
Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

1. Un endomorphisme de E est une application $f : E \longrightarrow E$ qui est linéaire.
2. L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathscr{L}(E)$, i.e.

$$\mathscr{L}(E) := \mathscr{L}(E,E) = \left\{ f \in E^E \ : \ f \text{ est linéaire} \right\}$$

Proposition C20.37 (structure de K-algèbre sur $\mathscr{L}(E)$)
On munit $\mathscr{L}(E)$ de trois opérations

$$+ \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E)^2 & \longrightarrow & \mathscr{L}(E) \\ (f,g) & \longmapsto & f+g \end{array} \right. \qquad \circ \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E)^2 & \longrightarrow & \mathscr{L}(E) \\ (f,g) & \longmapsto & f\circ g \end{array} \right. \qquad \cdot \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}\times\mathscr{L}(E) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E) \\ (\lambda,f) & \longmapsto & \lambda\cdot f \end{array} \right.$$

Alors

1. $(\mathscr{L}(E),+,\circ)$ est un anneau dont le 0 et le 1 sont respectivement

$$0_{\mathscr{L}(E)} \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & 0_E \end{array} \right. \qquad \mathrm{id}_E \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$$

2. $(\mathscr{L}(E),+,\cdot)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel
3. $\forall (\lambda,f,g)\in \mathbf{K}\times E\times E \quad (\lambda\cdot f)\circ g = f\circ(\lambda\cdot g) = \lambda\cdot(f\circ g)$

En d'autres termes, $(\mathscr{L}(E),+,\circ,\cdot)$ est une $\mathbf{K}$-algèbre.

Remarque C20.38 — Nous démontrerons, plus tard, que si E est un $\mathbf{K}$-espace de dimension finie $n\in\mathbf{N}^*$, alors les $\mathbf{K}$-algèbres $(\mathscr{L}(E),+,\circ)$ et $(\mathscr{M}_n(\mathbf{K}),+,\times)$ sont (non canoniquement) isomorphes. Ainsi, si $n\geqslant 2$, alors la $\mathbf{K}$-algèbre $(\mathscr{L}(E),+,\circ)$ n'est pas commutative.

Définition C20.39 (homothétie)
Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $\lambda\in\mathbf{K}$. L'homothétie de rapport λ est l'endomorphisme de E défini par

$$h_\lambda \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda\cdot x \end{array} \right.$$

Définition C20.40 (puissances d'un endomorphisme)
Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, $k\in\mathbf{N}$ et $f\in\mathscr{L}(E)$. Alors on définit $u^k\in\mathscr{L}(E)$ par

$$u^k := \begin{cases} \mathrm{id}_E & \text{si } k=0 \\ \underbrace{u\circ u\circ\ldots\circ u}_{k \text{ fois}} & \text{si } k\geqslant 1 \end{cases}$$

de sorte que $u^{k+1} = u\circ u^k = u^k\circ u$.

Exercice C20.41 — Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel non réduit au singleton $\{0_E\}$ et u un endomorphisme de E nilpotent, i.e. qu'une puissance de u égale $0_{\mathscr{L}(E)}$. Posons

$$p := \min\left\{k\in\mathbf{N} \ : \ u^k = 0_{\mathscr{L}(E)}\right\} \qquad [\text{nilindice de } u]$$

1. Démontrer qu'il existe $x\in E$ tel que la famille

$$\left(x, u(x), u^2(x), \ldots, u^{p-1}(x)\right)$$

est libre.

2. En déduire que si E est de dimension finie $n\geqslant 1$, alors $u^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Proposition-Définition C20.42 (projection sur un sous-espace parallèlement à un supplémentaire)
Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E et G un supplémentaire de F dans E.

1. La projection de E sur F parallèlement à G est l'endomorphisme de E défini par

$$p \left| \begin{array}{ccc} E = F \oplus G & \longrightarrow & E \\ x = \underbrace{x_F}_{\in F} + \underbrace{x_G}_{\in G} & \longmapsto & x_F \end{array} \right.$$

2. $p^2 = p$
3. $\operatorname{Ker}(p) = G$ et $\operatorname{Im}(p) = F$
4. La décomposition d'un vecteur x de E dans la décomposition en somme directe $E = F \oplus G$ est donnée par

$$x = \underbrace{p(x)}_{\in F} + \underbrace{x - p(x)}_{\in G}$$

Exercice C20.43 — Soient les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^2$ définis par

$$F := \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x + y = 0\right\} \quad \text{et} \quad G := \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x - 2y = 0\right\}$$

1. Démontrer que F et G sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathbf{R}^2$.

- Analyse. Soit $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. Supposons qu'il existe (x_1,y_1) et (x_2,y_2) tels que

$$(x_1,y_1) \in F \quad , \quad (x_2,y_2) \in G \quad , \quad (x,y) = (x_1,y_1) + (x_2,y_2)$$

Nous en déduisons le système

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & y_1 & & & & & = & 0 \\ & & & & x_2 & - & 2y_2 & = & 0 \\ x_1 & & & + & x_2 & & & = & x \\ & & y_1 & & & + & y_2 & = & y \end{array} \right.$$

d'inconnue $(x_1,y_1,x_2,y_2) \in \mathbf{R}^4$, que nous résolvons à l'aide du pivot de Gauß.

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{ccccccccl} \boxed{x_1} & + & y_1 & & & & & = & 0 \\ & & & & x_2 & - & 2y_2 & = & 0 \\ & - & y_1 & + & x_2 & & & = & x \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ & & y_1 & & & + & y_2 & = & y \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccccccccl} \boxed{x_1} & + & y_1 & & & & & = & 0 \\ & & y_1 & & & + & y_2 & = & y \qquad L_2 \leftrightarrow L_4 \\ & - & y_1 & + & x_2 & & & = & x \\ & & & & x_2 & - & 2y_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccccccccl} \boxed{x_1} & + & y_1 & & & & & = & 0 \\ & & \boxed{y_1} & & & + & y_2 & = & y \\ & & & & x_2 & + & y_2 & = & x+y \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ & & & & x_2 & - & 2y_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccccccccl} \boxed{x_1} & + & y_1 & & & & & = & 0 \\ & & \boxed{y_1} & & & + & y_2 & = & y \\ & & & & \boxed{x_2} & + & y_2 & = & x+y \\ & & & & & - & 3y_2 & = & -x-y \qquad L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \end{array} \right.$$

Nous en déduisons que le système (S) possède une unique solution

$$y_2 = \frac{1}{3} \cdot x + \frac{1}{3} \cdot y \quad , \quad x_2 = \frac{2}{3} \cdot x + \frac{2}{3} \cdot y \quad , \quad y_1 = -\frac{1}{3} \cdot x + \frac{2}{3} \cdot y \quad , \quad x_1 = \frac{1}{3} \cdot x - \frac{2}{3} \cdot y$$

Ainsi, si la décomposition de (x, y) comme somme d'un élément de F et d'un élément de G existe, alors elle est unique et donnée par

$$(x,y) = \underbrace{\left(\frac{1}{3}\cdot x - \frac{2}{3}\cdot y, -\frac{1}{3}\cdot x + \frac{2}{3}\cdot y\right)}_{\in F} + \underbrace{\left(\frac{2}{3}\cdot x + \frac{2}{3}\cdot y, \frac{1}{3}\cdot x + \frac{1}{3}\cdot y\right)}_{\in G}$$

- Synthèse. Clairement

$$\left(\frac{1}{3}\cdot x - \frac{2}{3}\cdot y, -\frac{1}{3}\cdot x + \frac{2}{3}\cdot y\right) \in F \quad , \quad \left(\frac{2}{3}\cdot x + \frac{2}{3}\cdot y, \frac{1}{3}\cdot x + \frac{1}{3}\cdot y\right) \in G$$

Par ailleurs

$$\left(\frac{1}{3}\cdot x - \frac{2}{3}\cdot y, -\frac{1}{3}\cdot x + \frac{2}{3}\cdot y\right) + \left(\frac{2}{3}\cdot x + \frac{2}{3}\cdot y, \frac{1}{3}\cdot x + \frac{1}{3}\cdot y\right) = (x,y)$$

- Conclusion. Nous avons démontré que

$$\forall\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 \quad \exists!\,(x_1,y_1) \in F \quad \exists!\,(x_2,y_2) \in G \quad (x,y) = (x_1,y_1) + (x_2,y_2)$$

Les sous-espaces F et G sont donc supplémentaires dans $\mathbf{R}^2$.

2. On note p la projection de $\mathbf{R}^2$ sur F parallèlement à G. Calculer, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $p(x, y)$.

D'après la décomposition d'un vecteur $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ dans la somme directe $\mathbf{R}^2 = F \oplus G$ obtenue en Q1, il vient

$$p \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \left(\frac{1}{3}\cdot x - \frac{2}{3}\cdot y, -\frac{1}{3}\cdot x + \frac{2}{3}\cdot y\right) \end{array} \right.$$

PROPOSITION-DÉFINITION C20.44 (SYMÉTRIE PAR RAPPORT À UN SOUS-ESPACE PARALLÈLEMENT À UN SUPPLÉMENTAIRE)

Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E et G un supplémentaire de F dans E.

1. La symétrie de E par rapport à F parallèlement à G est l'automorphisme de E défini par

$$s \left| \begin{array}{ccc} E = F \oplus G & \longrightarrow & E \\ x = \underbrace{x_F}_{\in F} + \underbrace{x_G}_{\in G} & \longmapsto & x_F - x_G \end{array} \right.$$

2. $s^2 = \mathrm{id}_E$
3. $\mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{id}_E) = F$ et $\mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{id}_E) = G$
4. La décomposition d'un vecteur x de E dans la décomposition en somme directe $E = F \oplus G$ est donnée par

$$x = \underbrace{\frac{1}{2}\cdot(x + s(x))}_{\in F} + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot(x - s(x))}_{\in G}$$

EXERCICE C20.45 — Nous savons que les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^2$ définis par

$$F := \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,:\, x + y = 0\right\} \quad \text{et} \quad G := \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,:\, x - 2y = 0\right\}$$

sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^2$ (cf. C20.43). On note s la symétrie de $\mathbf{R}^2$ par rapport à F parallèlement à G. Calculer, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $s(x, y)$.

En C20.43, nous avons établi que $\mathbf{R}^2 = F \oplus G$ et que la décomposition d'un vecteur $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ se décompose en

$$(x,y) = \underbrace{\left(\frac{1}{3}\cdot x - \frac{2}{3}\cdot y, -\frac{1}{3}\cdot x + \frac{2}{3}\cdot y\right)}_{\in F} + \underbrace{\left(\frac{2}{3}\cdot x + \frac{2}{3}\cdot y, \frac{1}{3}\cdot x + \frac{1}{3}\cdot y\right)}_{\in G}$$

dans la somme directe $\mathbf{R}^2 = F \oplus G$.

Nous en déduisons que

$$s \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \left(\frac{1}{3}\cdot x - \frac{2}{3}\cdot y, -\frac{1}{3}\cdot x + \frac{2}{3}\cdot y\right) - \left(\frac{2}{3}\cdot x + \frac{2}{3}\cdot y, \frac{1}{3}\cdot x + \frac{1}{3}\cdot y\right) = \left(-\frac{1}{3}\cdot x - \frac{4}{3}\cdot y, -\frac{2}{3}\cdot x + \frac{1}{3}\cdot y\right) \end{array} \right.$$

Exercice C20.46 — Soient

$$F := \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,:\, x+y+z=0\right\} \quad \text{et} \quad G := \{(a, 2a, 3a) \,:\, a \in \mathbf{R}\}$$

1. Démontrer que F et G sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathbf{R}^3$.
2. On note s la symétrie de $\mathbf{R}^3$ par rapport à F parallèlement à G. Calculer, pour tout $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$, $s(x,y,z)$.

Définition C20.47 (projecteur)
Un endomorphisme p d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E est appelé projecteur si

$$p^2 = p$$

Proposition C20.48 (interprétation géométrique et éléments caractéristiques d'un projecteur)
Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et p un projecteur de E.

1. $E = \mathrm{Ker}\left(p\right) \oplus \mathrm{Im}\left(p\right)$
2. La décomposition d'un vecteur x de E dans la décomposition en somme directe $E = \mathrm{Ker}\left(p\right) \oplus \mathrm{Im}\left(p\right)$ est donnée par
$$x = \underbrace{p(x)}_{\in \mathrm{Im}(p)} + \underbrace{x - p(x)}_{\in \mathrm{Ker}(p)}$$
3. p est la projection de E sur $\mathrm{Im}\left(p\right)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\left(p\right)$.

Définition C20.49 (symétrie)
Un endomorphisme s d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E est appelé symétrie si

$$s^2 = \mathrm{id}_E$$

Proposition C20.50 (interprétation géométrique et éléments caractéristiques d'une symétrie)
Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et s une symétrie de E.

1. $E = \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{id}_E)$
2. La décomposition d'un vecteur x de E dans la décomposition en somme directe $E = \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{id}_E)$ est donnée par
$$x = \underbrace{\frac{1}{2}\cdot(x + s(x))}_{\in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)} + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot(x - s(x))}_{\in \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)}$$
3. s est la symétrie de E sur $\mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{id}_E)$.

Définition C20.51 (automorphisme)
Un automorphisme d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E est un endomorphisme de E qui est bijectif.

Exercice C20.52 — Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $\lambda \in \mathbf{K}$. Déterminer une CNS sur λ pour que l'homothétie h_λ de E soit un automorphisme et préciser son application réciproque le cas échéant.

Rappel C20.53 — Soit E un ensemble non vide. Nous rappelons que l'ensemble

$$S_E := \left\{f \in E^E \,:\, f \text{ est bijective}\right\}$$

muni du produit de composition $\circ$ est un groupe (cf. C13.54).

PROPOSITION-DÉFINITION C20.54 (GROUPE LINÉAIRE)
Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

1. L'ensemble des automorphismes de E est noté $\mathrm{GL}(E)$, i.e.
$$\mathrm{GL}(E) := \left\{f \in \mathscr{L}(E) \,:\, f \text{ est bijective}\right\}$$
2. L'ensemble $\mathrm{GL}(E)$ est un sous-groupe du groupe $(S_E, \circ)$.
3. L'ensemble $\mathrm{GL}(E)$ muni du produit de composition est appelé groupe linéaire de E.

§ 5. THÉORÈME DU RANG

THÉORÈME C20.55 (DU RANG - FORME GÉOMÉTRIQUE)
Soient E, F des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et A un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$ dans E. Alors l'application
$$v := u_{|A}^{|\mathrm{Im}(u)} \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathrm{Im}(u) \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array} \right.$$
induite par u est un isomorphisme.

LEMME C20.56 (ISOMORPHISME ET DIMENSION)
Soient E, F des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ un isomorphisme.

1. Si E est de dimension finie, alors F est de dimension finie et $\dim(F) = \dim(E)$.
2. Si F est de dimension finie, alors F est de dimension finie et $\dim(E) = \dim(F)$.

COROLLAIRE C20.57 (THÉORÈME DU RANG DANS LE CAS OÙ LA SOURCE EST DE DIMENSION FINIE)
Soient E, F des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Si E est de dimension finie alors
$$\dim(\mathrm{Ker}(u)) + \mathrm{rg}(u) = \dim(E) \qquad [\text{formule du rang}]$$

EXERCICE C20.58 — Soient $(n,p) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$ et $u \in \mathscr{L}(\mathbf{K}^n, \mathbf{K}^p)$.

1. Donner une condition nécessaire sur n, p pour que l'application u soit injective.
2. Donner une condition nécessaire sur n, p pour que l'application u soit surjective.

EXERCICE C20.59 — Soit l'application linéaire
$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^4 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (x+y, z+t) \end{array} \right.$$

1. Déterminer $\mathrm{Ker}\left(f\right)$.
2. En déduire $\mathrm{Im}\left(f\right)$ et une propriété remarquable de f.

§ 6. Détermination d'une application linéaire

Proposition C20.60 (Construction d'une application linéaire via une base de sa source)
Soient E, F des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. Si $\underline{e} = (e_i)_{i\in I}$ est une base de E et $(f_i)_{i\in I}$ est une famille de vecteurs de F alors

$$\exists!\, u \in \mathscr{L}(E,F) \quad \forall\, i \in I \quad u(e_i) = f_i$$

De plus, si $x \in E$ se décompose dans la base $\underline{e}$ en $x = \sum_{i\in I} \lambda_i \cdot e_i$, où $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbf{K}^{(I)}$, alors $u(x) = \sum_{i\in I} \lambda_i \cdot f_i$.

Exercice C20.61 — Expliciter l'unique application linéaire u de $\mathscr{M}_2(\mathbf{K})$ dans $\mathbf{R}_2[X]$ telle que

$$u\left(E_{1,1}\right) = 1 + X \quad , \quad u\left(E_{1,2}\right) = X + X^2 \quad , \quad u\left(E_{2,1}\right) = 0 \quad , \quad u\left(E_{2,2}\right) = 1 - X^2$$

puis déterminer $\mathrm{Ker}\,(u)$ et $\mathrm{Im}\,(u)$.

Proposition C20.62 (Critère pour qu'une application linéaire soit injective/surjective/bijective)
Soient E, F des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $(e_i)_{i\in I}$ une base de E.

1. L'application u est injective si et seulement si la famille $(u(e_i))_{i\in I}$ de vecteurs de F est libre.
2. L'application u est surjective si et seulement si la famille $(u(e_i))_{i\in I}$ engendre F.
3. L'application u est bijective si et seulement si la famille $(u(e_i))_{i\in I}$ est une base de F.

Exercice C20.63 — Justifier que l'unique application linéaire u de $\mathbf{K}^3$ dans $\mathbf{K}_2[X]$ définie par

$$u(e_1) = 7 \cdot X^2 - 3 \cdot X + \sqrt{2} \quad , \quad u(e_2) = \pi \quad , \quad u(e_3) = \sqrt{13} \cdot X - \cos\left(\frac{7\cdot\pi}{19}\right)$$

est un isomorphisme.

Définition C20.64 (K-espaces vectoriels isomorphes)
Soient E, F des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. Deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels E et F sont dits isomorphes s'il existe un isomorphisme f de E dans F.

Proposition C20.65 (Des K-espaces vectoriels isomorphes)
Soient E, F, G des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels.

1. E est isomorphe à lui-même.
2. Si E et F sont isomorphes alors F et E sont isomorphes (ce qui légitime la terminologie).
3. Si E et F sont isomorphes, F et G sont isomorphes alors E et G sont isomorphes.

Lemme C20.66 (Caractérisation des espaces de dimension finie $n \geqslant 1$)
Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $n \in \mathbf{N}^*$.

$$E \text{ est de dimension finie } n \quad \Longleftrightarrow \quad E \text{ et } \mathbf{K}^n \text{ sont isomorphes}$$

Proposition C20.67 (Critère d'isomorphie)
Soient E, F des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

$$E \text{ et } F \text{ sont isomorphes} \quad \Longleftrightarrow \quad \dim(E) = \dim(F)$$

Théorème C20.68 (Injectivité/surjectivité pour une app. lin. entre deux espaces de même dim. finie)
Soient E, F des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Si E et F ont même dimension finie, alors

$$u \text{ est injective} \quad \Longleftrightarrow \quad u \text{ est surjective}$$

Exercice C20.69 — Soit $u \colon \mathscr{M}_2(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}^4$ l'unique application linéaire définie par

$$u\left(E_{1,1}\right) = (0,1,1,1) \quad , \quad u\left(E_{1,2}\right) = (1,0,1,1) \quad , \quad u\left(E_{2,1}\right) = (1,1,0,1) \quad , \quad u\left(E_{2,2}\right) = (1,1,1,0)$$

1. Démontrer que u est injective.
2. En déduire que u est un isomorphisme.

Définition C20.70 (Inversibilité à droite/gauche pour un endomorphisme)
Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. On dit que f est inversible à gauche s'il existe $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $g \circ f = \mathrm{id}_E$.
2. On dit que f est inversible à droite s'il existe $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f \circ g = \mathrm{id}_E$.

Exercice C20.71 — Soit l'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}[X] \\ P & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k \in \mathbf{N}} \frac{1}{k+1} \cdot [P]_k \cdot X^{k+1} \end{array} \right.$$

1. Justifier que l'application f est linéaire.
2. Démontrer que l'application f est inversible à gauche.
3. Démontrer que l'application f n'est pas inversible à droite.

Exercice C20.72 — Soit l'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^{\mathbf{N}} & \longrightarrow & \mathbf{K}^{\mathbf{N}} \\ (u_n)_{n \in \mathbf{N}} & \longmapsto & (u_{n+1})_{n \in \mathbf{N}} \end{array} \right.$$

1. Justifier que l'application f est linéaire.
2. Démontrer que l'application f est inversible à droite.
3. Démontrer que l'application f n'est pas inversible à gauche.

Théorème C20.73 (Inversibilité à droite vs. inversibilité à gauche et dimension finie)
Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$. Si E est de dimension finie alors

$$u \text{ est inversible à gauche} \quad \Longleftrightarrow \quad u \text{ est inversible à droite}$$

Théorème C20.74 (Dimension d'un espace d'applications linéaires)
Soient E, F des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et $(f_1, \ldots, f_n)$ une base de F. Pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!]$ on note $u_{i,j}$ l'unique application linéaire de E dans F telle que

$$\forall\, k \in [\![1,p]\!] \quad u_{i,j}(e_k) = \begin{cases} f_j & \text{si } k = i \\ 0_F & \text{si } k \neq i \end{cases}$$

Alors

1. la famille $\left(u_{i,j}\right)_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$ est une base de $\mathscr{L}(E,F)$
2. $\dim(\mathscr{L}(E,F)) = \dim(E) \times \dim(F)$

Proposition C20.75 (Sous-espaces supplémentaires et construction d'applications linéaires)
Soient E, F des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, E_1, E_2 deux sous-espaces supplémentaires de E dans. Alors

$$\forall\, (u_1, u_2) \in \mathscr{L}(E_1, F) \times \mathscr{L}(E_2, F) \quad \exists!\, u \in \mathscr{L}(E,F) \quad u_{|E_1} = u_1 \text{ et } u_{|E_2} = u_2$$

Exercice C20.76 — Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et F, G des sous-espaces non triviaux de E. Donner une CNS sur F et G pour qu'il existe $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{Ker}(u) = F$ et $\mathrm{Im}(u) = G$.

EXERCICE C20.77 — Soient E_1, E_2, E_3 des sous-espaces vectoriels de dimensions finies respectives $n_1 \geqslant 1$, $n_2 \geqslant 1$ et $n_3 \geqslant 1$. Soit $f \in \mathscr{L}(E_1, E_2)$ de rang r. Justifier que l'application

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E_2, E_3) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E_1, E_3) \\ g & \longmapsto & g \circ f \end{array} \right.$$

est de rang finie et calculer son rang.

§ 7. FORMES LINÉAIRES ET HYPERPLANS

DÉFINITION C20.78 (FORME LINÉAIRE)
Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbf{K}$

NOTATION C20.79 — L'ensemble des formes linéaires sur un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E est noté E^*, i.e.

$$E^* := \mathscr{L}(E, \mathbf{K}) := \left\{ f \in \mathbf{K}^E \;:\; f \text{ est linéaire} \right\}$$

On le nomme espace dual de E.

PROPOSITION-DÉFINITION C20.80 (BASE DUALE D'UNE BASE D'UN ESPACE DE DIMENSION FINIE)
Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimensions finie $n \geqslant 1$ et $\underline{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, soit e_i^* l'unique forme linéaire sur E définie par

$$\forall j \in [\![1, n]\!] \quad e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$$

1. La famille $\underline{e^*} := \left(e_1^*, \ldots, e_n^*\right)$ est une base de E^*, appelée base duale de $\underline{e}$.
2. Pour tout $x \in E$

$$x = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x) \cdot e_i \qquad \left[\text{décomposition de } x \text{ dans la base } \underline{e}\right]$$

EXERCICE C20.81 — Calculer la base duale de la base canonique

$$\underline{e} := (e_1 := (1,0,0)\,,\, e_2 := (0,1,0)\,,\, e_3 := (0,0,1))$$

la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

EXERCICE C20.82 — Démontrer que la famille

$$\underline{u} := (u_1 := (1,0,0)\,,\, u_2 := (1,1,0)\,,\, u_3 := (1,1,1))$$

est une base de $\mathbf{R}^3$, puis déterminer sa base canonique.

EXERCICE C20.83 — Soit E un $\mathbf{K}$-espace de dimension finie $n \geqslant 1$. Le bidual de E, noté E^{**} est le dual du dual de E, i.e.

$$E^{**} := \left(E^*\right)^* := \mathscr{L}(\mathscr{L}(E, \mathbf{K}), \mathbf{K})$$

Démontrer que l'application

$$\iota \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E^{**} \\ f & \longmapsto & \iota(f) \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,K) & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ \varphi & \longmapsto & \varphi(x) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

est un isomorphisme.

LEMME C20.84 (SURJECTIVITÉ D'UNE FORME LINÉAIRE NON NULLE)
Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $\varphi \in E^* \setminus \{0_{E^*}\}$. Démontrer que l'application $\varphi \colon E \longrightarrow \mathbf{K}$ est surjective.

DÉFINITION C20.85 (HYPERPLAN)
Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. On appelle hyperplan de E tout noyau d'une forme linéaire non nulle sur E.

EXERCICE C20.86 — Justifier que

$$H := \left\{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \ : \ x - 2y + 3z - 4t = 0\right\}$$

est un hyperplan de $\mathbf{R}^4$.

PROPOSITION C20.87 (ÉQUATION D'UN HYPERPLAN DANS UNE BASE EN DIMENSION FINIE)
Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$, $\underline{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\underline{e^*} := \left(e_1^*, \ldots, e_n^*\right)$ la base duale de $\underline{e}$. Pour tout hyperplan H de E, il existe $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{K}^n \setminus \{0_{\mathbf{K}^n}\}$ tel que

$$H := \left\{ x \in E \ : \ \underbrace{a_1 \cdot e_1^*(x) + a_2 \cdot e_2^*(x) + \ldots + a_n \cdot e_n^*(x) = 0_{\mathbf{K}}}_{\text{une équation de } H \text{ dans } \underline{e}} \right\}$$

EXERCICE C20.88 — Démontrer que

$$H := \mathrm{Vect}\,(\, u_1 := (1, 0, 1, 1)\,,\, u_2 := (1, 1, 0, 1)\,,\, u_3 := (1, 1, 1, 0)\,)$$

est un hyperplan de $\mathbf{R}^4$ et en donner une équation dans la base canonique.

THÉORÈME C20.89 (CARACTÉRISATION GÉOMÉTRIQUE DES HYPERPLANS)
Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

1. Si H est un hyperplan de E et D est une droite de E non incluse dans H, alors $E = H \oplus D$.
2. Tout supplémentaire d'une droite de E est un hyperplan de E.

EXEMPLE C20.90 — Donner un supplémentaire F de

$$D := \mathrm{Vect}\left(1 + X^2 + X^4\right)$$

dans $\mathbf{C}[X]$. Que dire de F ?

EXEMPLE C20.91 — Justifier que

$$H := \left\{f \in \mathscr{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \ : \ f(1) = 0\right\}$$

est un hyperplan de $\mathscr{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, puis en donner des supplémentaires.

PROPOSITION C20.92 (CARACTÉRISATION DES HYPERPLANS D'UN ESPACE DE DIMENSION FINIE)
Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et F un sous-espace vectoriel de E.

$$F \text{ est un hyperplan de } E \quad \Longleftrightarrow \quad \dim(F) = n - 1$$

EXERCICE C20.93 — Soit le sous-espace vectoriel H de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ défini par

$$H := \mathrm{Vect}\left(E_{1,1} - E_{2,2}\,,\, E_{1,2}\,,\, E_{2,1}\right)$$

1. Justifier que H est un hyperplan de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$, puis donner un supplémentaire de H dans $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.
2. Donner une forme linéaire non nulle sur $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ dont H est le noyau.

LEMME C20.94 (CRITÈRE POUR QUE DEUX FORMES LINÉAIRES NON NULLES SOIENT LIÉES)
Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel distinct de $\{0\}$, φ, ψ des formes linéaires non nulles sur E.

$$\text{la famille } (\varphi, \psi) \text{ est liée} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Ker}\left(\varphi\right) = \mathrm{Ker}\left(\psi\right)$$

PROPOSITION C20.95 (DES ÉQUATIONS D'UN HYPERPLAN DANS UNE MÊME BASE)
Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$, $\underline{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, $\underline{e^*} := \left(e_1^*, \ldots, e_n^*\right)$ la base duale de $\underline{e}$, H un hyperplan de E et $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{K}^n \setminus \{0_{\mathbf{K}^n}\}$ tel que

$$a_1 \cdot e_1^*(x) + a_2 \cdot e_2^*(x) + \ldots + a_n \cdot e_n^*(x) = 0_{\mathbf{K}}$$

est une équation de H. Alors, pour tout $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbf{K}^n \setminus \{0_{\mathbf{K}^n}\}$

$$b_1 \cdot e_1^*(x) + b_2 \cdot e_2^*(x) + \ldots + b_n \cdot e_n^*(x) = 0_{\mathbf{K}} \text{ est une équation de } H \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbf{K}^* \quad (b_1, \ldots, b_n) = \lambda \cdot (a_1, \ldots, a_n)$$

EXERCICE C20.96 — Donner toutes les équations de l'hyperplan

$$H := \mathrm{Vect}\left(u_1 := (1,2,3)\,,\, u_2 := (1,-1,1)\right)$$

de $\mathbf{R}^3$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

THÉORÈME C20.97 (SOUS-ESPACE VECTORIEL ET INTERSECTION D'HYPERPLAN)
Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et $m \in [\![1, n]\!]$.

1. Si $H_1, \ldots, H_m$ sont des hyperplans de E, alors

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{m} H_i\right) \geqslant n - m$$

2. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension m de E. Alors il existe $n-m$ hyperplans $H_1, \ldots, H_{n_m}$ tels que

$$F = \bigcap_{i=1}^{n-m} H_i$$

EXERCICE C20.98 — On note $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ la base canonique de $\mathbf{R}^5$ et $F := \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$, où

$$u_1 := (1,2,3,2,1) \quad , \quad u_2 := (1,-1,1,-1,1) \quad , \quad u_3 := (3,2,1,2,3)$$

1. Démontrer que la famille $\underline{u} := (u_1, u_2, u_3)$ est libre.
2. Compléter la famille $\underline{u}$ de vecteurs de $\mathbf{R}^5$ en une base $\mathscr{B}$ de $\mathbf{R}^5$.
3. Grâce à la base duale $\mathscr{B}^*$ de $\mathscr{B}$, donner deux formes linéaires non nulles φ_1 et φ_2 sur $\mathbf{R}^5$ telles que

$$F = \mathrm{Ker}\left(\varphi_1\right) \cap \mathrm{Ker}\left(\varphi_2\right)$$

4. En déduire $(a_i)_{i \in [\![1,5]\!]} \in \mathbf{R}^5$ et $(b_i)_{i \in [\![1,5]\!]} \in \mathbf{R}^5$ tels que

$$F = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbf{R}^5 \,:\, \underbrace{\left|\begin{array}{ccccccccccc} a_1 x_1 & + & a_2 x_2 & + & a_3 x_3 & + & a_4 x_4 & + & a_5 x_5 & = & 0 \\ b_1 x_1 & + & b_2 x_2 & + & b_3 x_3 & + & b_4 x_4 & + & b_5 x_5 & = & 0 \end{array}\right.}_{\text{système d'équations cartésiennes de } F} \right\}$$

5. Proposer une autre méthode permettant de déterminer un système d'équations cartésiennes de F.

EXERCICE C20.99 — Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des réels deux-à-deux distincts. On définit, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, la forme linéaire f_i sur $\mathbf{R}_n[X]$ par

$$f_k \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ P & \longmapsto & \widetilde{P}(x_k) \end{array} \right.$$

1. Démontrer que la famille $\left(f_0, f_1, \ldots, f_n\right)$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]^*$.
2. Démontrer qu'il existe une unique base $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ de $\mathbf{R}_n[X]$ dont la base duale est $\left(f_0, f_1, \ldots, f_n\right)$ et expliciter chacun des polynômes $P_0, P_1, \ldots, P_n$.