Chapitre n°19
Espaces de dimension finie

Notation C19.1 — Dans ce document, la lettre $\mathbf{K}$ désigne le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

§ 1. Introduction

Un ensemble non vide E est dit fini s'il existe $n \in \mathbf{N}^*$ et une bijection de $[\![1,n]\!]$ dans E. Si un tel $n \in \mathbf{N}^*$ existe, on démontre qu'il est unique et on le note $\mathrm{Card}\,(E)$. L'ensemble vide est également dit fini et on pose $\mathrm{Card}\,(\emptyset) = 0$.

La notion de cardinal d'un ensemble fini possède des propriétés très intéressantes. Nous en citons deux.

(P1) Si E est un ensemble fini et A est une partie de E alors A est fini et

$$\mathrm{Card}\,(A) = \mathrm{Card}\,(E) \quad \Longrightarrow \quad A = E$$

(P2) Si E est un ensemble fini et $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$ alors les ensembles A, B, $A \cup B$, $A \cap B$ sont finis et

$$\mathrm{Card}\,(A \cup B) = \mathrm{Card}\,(A) + \mathrm{Card}\,(B) - \mathrm{Card}\,(A \cap B)$$

En associant à un certains ensembles un entier (appelé cardinal), on dispose d'un outil puissant pour étudier ces ensembles.

De manière analogue, on se propose d'associer à certains espaces vectoriels (ceux possédant une famille génératrice finie) un nombre entier (appelé dimension) qui jouira de propriétés riches, e.g. les propriétés suivantes qui sont des analogues de (P1) et (P2).

(P1*) Si E est un espace vectoriel possédant une famille génératrice finie et A est un sous-espace vectoriel de E alors A possède une famille génératrice finie et

$$\dim\,(A) = \dim\,(E) \quad \Longrightarrow \quad A = E$$

(P2*) Si E est un espace vectoriel possédant une famille génératrice finie et A, B sont des sous-espaces vectoriels de E alors les A, B, $A+B$, $A \cap B$ possèdent une famille génératrice finie et

$$\dim\,(A+B) = \dim\,(A) + \dim\,(B) - \dim\,(A \cap B)$$

§ 2. Existence de bases

Définition C19.2 (espace vectoriel de dimension finie)
Un $\mathbf{K}$-espace vectoriel $(E,+,\cdot)$ est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.

Exemple C19.3 — Soit $(n,p) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$.

1. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, notons e_i le vecteur de $\mathbf{K}^n$ dont toutes les composantes sont nulles sauf la i-ième qui vaut 1. Alors $\mathbf{K}^n = \mathrm{Vect}\,(e_1,\dots,e_n)$ et donc $\mathbf{K}^n$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
2. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, notons $E_{i,j}$ la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui d'adresse (i,j) qui vaut 1. Alors $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K}) = \mathrm{Vect}\left(\left(E_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}\right)$ et donc $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
3. Comme $\mathbf{K}_n[X] = \mathrm{Vect}\left(\left(X^k\right)_{k\in[\![0,n]\!]}\right)$, $\mathbf{K}_n[X]$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Exercice C19.4 — Démontrer que $\mathbf{K}[X]$ n'est pas un sous-espace vectoriel de dimension finie.

Lemme C19.5 (Diminution du nombre de vecteurs d'une famille génératrice)
Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbf{N}^*$, $(x_1,\dots,x_n) \in E^n$. S'il existe $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $x_{i_0} \in \mathrm{Vect}\big((x_i)_{i\in[\![1,n]\!]\setminus\{i_0\}}\big)$ alors

$$\mathrm{Vect}\big((x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}\big) = \mathrm{Vect}\big((x_i)_{i\in[\![1,n]\!]\setminus\{i_0\}}\big)$$

Théorème C19.6 (Base intermédiaire entre une famille génératrice finie et une sous-famille libre)
Soient
- $(E,+,\cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel distinct de $\{0_E\}$
- $\mathscr{G} = (x_1,\dots,x_n)$ une famille finie génératrice de E
- $\mathscr{L} = \left(x_{i_1},\dots x_{i_p}\right)$ une sous-famille libre de $\mathscr{G}$

Alors il existe des entiers $j_1,\dots,j_q$ appartenant à $[\![1,n]\!] \setminus \left\{i_1,\dots,i_p\right\}$ tels que la famille

$$\left(x_{i_1},\dots x_{i_p}\right) \# \left(x_{j_1},\dots x_{j_q}\right)$$

qui est une sur-famille de $\mathscr{L}$ et une sous-famille de $\mathscr{G}$, est une base de E.

Démonstration — Nous fixons un un $\mathbf{K}$-espace vectoriel $(E,+,\cdot)$ distinct de $\{0_E\}$ et une famille finie libre $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E. Posons, pour tout $n \geqslant \mathrm{Card}(I)$

$\mathscr{P}(n)$ « pour tout ensemble fini J de cardinal n contenant I, pour toute sur-famille $(x_j)_{j\in J}$ de $(x_i)_{i\in I}$ qui engendre E, il existe un ensemble K tel que $I \subset K \subset J$ et la famille $(x_k)_{k\in K}$ est une base de E »

- *Initialisation à $n = \mathrm{Card}(I)$.* Soient un ensemble fini J de cardinal $\mathrm{Card}(I)$ contenant I et une sur-famille $(x_j)_{j\in J}$ de $(x_i)_{i\in I}$ qui engendre E. De l'inclusion $I \subset J$ et de $\mathrm{Card}(I) = \mathrm{Card}(J)$, nous déduisons $I = J$. La famille $(x_j)_{j\in J}$ génératrice de E et la famille libre $(x_i)_{i\in I}$ coïncident donc. Ainsi $(x_j)_{j\in J}$ est une base de E et l'ensemble $K := I = J$ convient.
- *Hérédité.* Soit $n \geqslant \mathrm{Card}(I)$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Soient un ensemble fini J de cardinal $n+1$ contenant I, et une sur-famille $(x_j)_{j\in J}$ de $(x_i)_{i\in I}$ qui engendre E.
  — Si la famille $(x_j)_{j\in J}$ est libre, alors elle forme une base de E et l'ensemble $K := J$ convient.
  — Sinon, la famille $(x_j)_{j\in J}$ est liée et il existe une famille $(\lambda_j)_{j\in J}$ de scalaires non tous nuls tel que

$$(\star) \qquad \sum_{j\in J} \lambda_j \cdot x_j = 0_E$$

Si, pour tout $j \in J \setminus I \neq \emptyset$ (car $\mathrm{Card}(J) > \mathrm{Card}(I)$), $\lambda_j = 0_{\mathbf{K}}$, alors $(\star)$ se réécrit

$$\sum_{i\in I} \lambda_i \cdot x_i = 0_E$$

et la liberté de la famille $(x_i)_{i\in I}$ entraîne, pour tout $i \in I$, $\lambda_i = 0_{\mathbf{K}}$. Tous les scalaires de la famille $(\lambda_j)_{j\in J}$ sont alors nuls, ce qui n'est pas.
D'après ce qui précède, il existe $j_0 \in J \setminus I$ tel que $\lambda_{j_0} \neq 0_{\mathbf{K}}$. De $(\star)$ nous déduisons alors

$$x_{j_0} = \sum_{j\in J\setminus\{j_0\}} \left(-\frac{\lambda_j}{\lambda_{j_0}}\right) \cdot x_j \in \mathrm{Vect}\left(\left(x_j\right)_{j\in J\setminus\{j_0\}}\right)$$

D'après C19.5

$$\mathrm{Vect}\left(\left(x_j\right)_{j\in J\setminus\{j_0\}}\right) = \mathrm{Vect}\left(\left(x_j\right)_{j\in J}\right) = E \qquad \left[\left(x_j\right)_{j\in J} \text{ engendre } E\right]$$

Nous pouvons alors appliquer $\mathscr{P}(n)$ à l'ensemble $J \setminus \{j_0\}$ de cardinal n et à la famille $\left(x_j\right)_{j\in J\setminus\{j_0\}}$ qui engendre E et qui est une sur-famille de $(x_i)_{i\in I}$ (puisque $j_0 \in J \setminus I$) pour obtenir qu'il existe un ensemble K tel que

$$I \subset K \subset J \setminus \left\{j_0\right\} \subset J$$

et la famille $(x_k)_{k\in K}$ est une base de E.

THÉORÈME C19.7 (DE LA BASE EXTRAITE)
Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel distinct de $\{0_E\}$ et de dimension finie. De toute famille génératrice finie de E, on peut extraire une base finie de E.

EXERCICE C19.8 — Soient

$$u_1 := (1,-3,2,-1) \qquad u_2 := (1,7,-2,9) \qquad u_3 := (2,-1,2,3) \qquad u_4 := (3,-14,8,-8)$$

Extraire une base de la famille génératrice (u_1,u_2,u_3,u_4) de $F := \mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3,u_4)$.

COROLLAIRE C19.9 (EXISTENCE D'UNE BASE FINIE POUR UN ESPACE DE DIMENSION FINIE)
Tout $\mathbf{K}$-espace vectoriel $(E,+,\cdot)$ distinct de $\{0_E\}$ et de dimension finie possède une base finie.

THÉORÈME C19.10 (DE LA BASE INCOMPLÈTE)
Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel distinct de $\{0_E\}$ et de dimension finie, $n \in \mathbf{N}^*$ et $(x_1,\dots,x_n) \in E^n$ une famille génératrice de E. Toute famille libre $(y_1,\dots,y_p) \in E^p$ qui n'est pas une base de E peut être complétée en une base de E, en lui adjoignant certains des vecteurs $x_1,\dots,x_n$.

EXERCICE C19.11 — Soit

$$F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \,:\, x+y+z+t = 0\right\} \quad , \quad u_1 := (1,1,1,-3) \quad \text{et} \quad u_2 := (3,-1,-1,-1)$$

1. Justifier que F est de dimension finie.
2. Compléter la famille libre (u_1,u_2) de vecteurs de F en une base de F.

§ 3. DIMENSION D'UN ESPACE DE DIMENSION FINIE

RAPPEL C19.12 — Soit $(n,p) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$. Grâce à l'algorithme du pivot de Gauß, nous avons établi

$$\forall\, A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \quad \exists\,(r,P,Q) \in [\![1,\min\{n,p\}]\!] \times \mathrm{GL}_n(\mathbf{K}) \times \mathrm{GL}_p(\mathbf{K}) \quad A = P \times J_{n,p}(r) \times Q \qquad \text{[cf. C14.110]}$$

et en avons déduit que

$$r < p \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Ker}(A) \neq \left\{0_{\mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{K})}\right\} \qquad \text{[cf. C14.114]}$$

En particulier, si le nombre de lignes d'une matrice A est strictement inférieur au nombre de ses colonnes, alors le noyau de A est non trivial.

PROPOSITION C19.13 (MAJORATION DU NOMBRE DE VECTEURS D'UNE FAMILLE LIBRE)
Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel distinct de $\{0_E\}$, $n \in \mathbf{N}^*$ et $(x_1,\dots,x_n) \in E^n$ une famille génératrice de E. Alors toute famille possédant $n+1$ vecteurs est liée.

PROPOSITION C19.14 (NOMBRE DE VECTEURS D'UNE BASE FINIE)
Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel distinct de $\{0_E\}$ et de dimension finie. Si $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ sont deux bases de E alors $\mathrm{Card}(\mathscr{B}_1) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}_2)$.

DÉFINITION C19.15 (DIMENSION D'UN ESPACE DE DIMENSION FINIE)
Si E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel distinct de $\{0_E\}$ et de dimension finie alors

$$\dim(E) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}) \text{ où } \mathscr{B} \text{ est une base de } E \qquad \left[\text{indépendant du choix de la base } \mathscr{B} \text{ de } E\right]$$

Si E est réduit au singleton vecteur nul, alors $\dim(E) = 0$.

REMARQUE C19.16 — La précédente définition repose de manière essentielle sur les deux propriétés suivantes.

(P1) Tout $\mathbf{K}$-espace vectoriel possédant une famille génératrice finie admet une base finie, cf. C19.9.

(P2) Deux bases finies d'un espace $\mathbf{K}$-espace vectoriel possèdent le même cardinal, cf. C19.14.

Nous pouvons considérer les axiomes de $\mathbf{K}$-espace vectoriel en remplaçant le corps $\mathbf{K}$ par un anneau commutatif $\mathbf{A}$ pour obtenir une structure appelée « $\mathbf{A}$-module ». Les notions de familles libres, de familles génératrices et de bases se généralisent *mutatis mutandis* aux $\mathbf{A}$-modules. Mais nous ne pouvons pas définir de notion de dimension aussi naïvement que dans le cadre des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels (il existe toutefois un ersatz, appelé longueur pour les $\mathbf{A}$-modules). En effet, si (P2) reste valide pour des $\mathbf{A}$-modules, la propriété (P1) peut être mise en défaut. Par exemple, le $\mathbf{Z}$-module

$$\mathbf{Z}/3\mathbf{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\} \qquad [\text{ensemble des classes de congruence modulo } 3]$$

possède une famille génératrice finie, e.g. $(\overline{1})$. Cependant comme, pour tout $x \in \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$, $3 \cdot x = \overline{0}$, aucune famille non vide de $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ n'est libre et donc $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ ne possède aucune base.

EXERCICE C19.17 — Démontrer que

$$F := \{(x, y, z, t) \in \mathbf{K}^4 \ : \ x + z = y - t = 0\}$$

est un espace de dimension finie et calculer $\dim(F)$.

EXERCICE C19.18 — Pour tout $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$, posons

$$\mathscr{S}_n(\mathbf{R}) := \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \ : \ M^\top = M\}$$

Démontrer que $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ est un espace de dimension finie et calculer $\dim(\mathscr{S}_n(\mathbf{R}))$.

PROPOSITION C19.19 (DIMENSION DES ESPACES DE DIMENSION FINIE USUELS)
Soit $(n, p) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$.

1. $\dim(\mathbf{K}^n) = n$
2. $\dim(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})) = n \times p$
3. $\dim(\mathbf{K}_n[X]) = n + 1$

THÉORÈME C19.20 (DIMENSION ET CARDINAL D'UNE FAMILLE LIBRE)
Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $n \in \mathbf{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$.

1. Si la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre alors $n \leqslant \dim(E)$.
2. Si la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre et $n = \dim(E)$ alors $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E.

THÉORÈME C19.21 (DIMENSION ET CARDINAL D'UNE FAMILLE GÉNÉRATRICE)
Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $n \in \mathbf{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$.

1. Si la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est génératrice de E alors $n \geqslant \dim(E)$.
2. Si la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est génératrice de E et $n = \dim(E)$ alors $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E.

EXERCICE C19.22 — Soient P_1, P_2, P_3, P_4 des polynômes de $\mathbf{K}_2[X]$. Que dire de la famille (P_1, P_2, P_3, P_4) ?

EXERCICE C19.23 — Soient $(E, +, \cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$, $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ une base de E et $i \in [\![1, n]\!]$.

1. Soit $v \in \mathrm{Vect}(u_1, \dots, \widehat{u_i}, \dots, u_n)$. Démontrer que la famille $(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i + v, u_{i+1}, \dots, u_n)$ est une base de E.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $w \in E$ pour que la famille $(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i + w, u_{i+1}, \dots, u_n)$ soit une base de E.

Exercice C19.24 — Soient

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad D := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Démontrer que (A, B, C, D) est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

Théorème C19.25 (dimension d'un produit fini d'espaces de dimension finie)
Soient $p \in \mathbf{N}_{\geq 2}$ et $E_1, \ldots, E_p$ des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors le $\mathbf{K}$-espace vectoriel $\prod_{i=1}^{p} E_i$ est de dimension finie et

$$\dim\left(\prod_{i=1}^{p} E_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \dim(E_i)$$

Exercice C19.26 — Justifier que $\mathbf{K}^3 \times \mathscr{M}_{2,3}(\mathbf{K}) \times \mathbf{K}_5[X]$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et préciser sa dimension.

Définition C19.27 (rang d'une famille de vecteurs)
Soient $(E, +, \cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, $p \in \mathbf{N}^*$ et $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in E^p$. Le rang de la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est le nombre entier naturel

$$\mathrm{rg}\left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right) := \dim\left(\mathrm{Vect}\left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right)\right)$$

Proposition C19.28 (majoration du rang d'une famille de vecteurs)
Soient $(E, +, \cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $p \in \mathbf{N}^*$ et $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in E^p$. Alors

$$\mathrm{rg}\left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right) \leqslant \min\left\{p, \dim(E)\right\}$$

Exercice C19.29 — Soient

$$u_1 := (1, 2, -1, 1) \quad , \quad u_2 := (-3, -2, 3, 2) \quad , \quad u_3 := (-1, 0, 1, 1) \quad , \quad u_4 := (2, 3, -2, 1)$$

Calculer $\mathrm{rg}(u_1, u_2, u_3, u_4)$.

Exercice C19.30 — Soient

$$P_1 := X^4 + X + 1 \quad , \quad P_1 := X^3 + X + 1 \quad , \quad P_2 := X^2 + 1 \quad , \quad P_3 := X + 1 \quad , \quad P_4 := 1 \quad , \quad P_5 := X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$$

Calculer $\mathrm{rg}(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$.

§ 4. Équations différentielles linéaires homogènes et dimension

Théorème C19.31 (ensemble solution d'une EDLH1)
Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$, $a \in \mathscr{C}^0(I, \mathbf{K})$ et l'EDLH1 :

$$(E) \quad y' + a(x)\, y = 0 \quad , \quad y \in \mathscr{C}^1(I, \mathbf{K})$$

1. La fonction a possède une primitive A sur I.
2. $\mathrm{Sol}_{(E),I}$ est la droite vectorielle dans $\mathscr{C}^1(I, \mathbf{K})$ dont une base est

$$\left(y_H \;\middle|\; \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ x & \longmapsto & e^{-A(x)} \end{array} \right)$$

THÉORÈME C19.32 (ENSEMBLE SOLUTION D'UNE EDLCCH2, CAS $\mathbf{K} = \mathbf{C}$)
Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$, $(a,b) \in \mathbf{C}^2$ et l'EDLCCH2

$$(E_2H) \quad y'' + a\,y' + b\,y = 0 \quad , \quad y \in \mathscr{C}^2(I,\mathbf{C})$$

L'équation caractéristique associée est

$$(E_{\text{car}}) \quad z^2 + a\,z + b = 0 \quad , \quad z \in \mathbf{C}$$

1. *Cas où* $\Delta = a^2 - 4b \neq 0$. L'équation (E_{car}) possède deux solutions complexes distinctes r_1, r_2 et $\mathrm{Sol}_{(E),I}$ est le plan vectoriel dans $\mathscr{C}^2(I,\mathbf{C})$ dont une base est

$$\left(y_1 \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & e^{r_1 x} \end{array} \right. , \; y_2 \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & e^{r_1 x} \end{array} \right. \right)$$

2. *Cas où* $\Delta = a^2 - 4b = 0$. L'équation (E_{car}) possède une unique solution complexe $r = -\dfrac{a}{2}$ et $\mathrm{Sol}_{(E),I}$ est le plan vectoriel dans $\mathscr{C}^2(I,\mathbf{C})$ dont une base est

$$\left(y_1 \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & e^{r x} \end{array} \right. , \; y_2 \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & x\,e^{r x} \end{array} \right. \right)$$

THÉORÈME C19.33 (ENSEMBLE SOLUTION D'UNE EDLCCH2, CAS $\mathbf{K} = \mathbf{R}$)
Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$, $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ et l'EDLCCH2

$$(E_2H) \quad y'' + a\,y' + b\,y = 0 \quad , \quad y \in \mathscr{C}^2(I,\mathbf{R})$$

L'équation caractéristique associée est

$$(E_{\text{car}}) \quad z^2 + a\,z + b = 0 \quad , \quad z \in \mathbf{C}$$

1. *Cas où* $\Delta = a^2 - 4b > 0$. L'équation (E_{car}) possède deux solutions réelles distinctes r_1, r_2 et $\mathrm{Sol}_{(E),I}$ est le plan vectoriel dans $\mathscr{C}^2(I,\mathbf{R})$ dont une base est

$$\left(y_1 \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & e^{r_1 x} \end{array} \right. , \; y_2 \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & e^{r_1 x} \end{array} \right. \right)$$

2. *Cas où* $\Delta = a^2 - 4b = 0$. L'équation (E_{car}) possède une unique solution réelle $r = -\dfrac{a}{2}$ et $\mathrm{Sol}_{(E),I}$ est le plan vectoriel dans $\mathscr{C}^2(I,\mathbf{R})$ dont une base est

$$\left(y_1 \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & e^{r x} \end{array} \right. , \; y_2 \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x \cdot e^{r x} \end{array} \right. \right)$$

3. *Cas où* $\Delta = a^2 - 4b < 0$. L'équation (E_{car}) possède deux solutions distinctes complexes conjuguées $\alpha + i\omega$ et $\alpha - i\omega$, où $(\alpha,\omega) \in \mathbf{R}^2$ et $\mathrm{Sol}_{(E),I}$ est le plan vectoriel dans $\mathscr{C}^2(I,\mathbf{R})$ dont une base est

$$\left(y_1 \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & e^{\alpha x} \cdot \cos(\omega x) \end{array} \right. , \; y_2 \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & e^{\alpha x} \cdot \sin(\omega x) \end{array} \right. \right)$$

§ 5. SUITES RÉCURRENTES LINÉAIRES D'ORDRE 2 ET DIMENSION

EXERCICE C19.34 — Soit

$$\mathscr{A} := \left\{ (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \; : \; (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ est arithmétique} \right\}$$

Démontrer que $\mathscr{A}$ est un sous-espace vectoriel de dimension de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, en donner une base et préciser sa dimension.

EXERCICE C19.35 — Soient $p \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$ et $r_1, \ldots, r_p$ des réels. Calculer la dimension de

$$F := \mathrm{Vect}\left(\left(r_1^n\right)_{n\in\mathbf{N}} , \left(r_2^n\right)_{n\in\mathbf{N}} , \ldots , \left(r_p^n\right)_{n\in\mathbf{N}} \right)$$

THÉORÈME C19.36 (TERME GÉNÉRAL D'UNE SUITE RÉCURRENTE LINÉAIRE D'ORDRE 2)
Soient $(a,b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^*$ et

$$\mathrm{S} := \left\{(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \ : \ \forall\, n \in \mathbf{N} \quad u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n\right\}$$

On introduit son équation caractéristique :

$$(E_{\mathrm{car}}) \ : \ x^2 - ax - b = 0 \quad , \quad x \in \mathbf{C}$$

1. *Cas où (E_{car}) possède deux solutions distinctes dans* **R**. Si $((E_{\mathrm{car}})$ possède deux solutions distinctes r_1 et r_2 dans **R** alors S est le plan vectoriel dans $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ dont une base est
$$\left(\left(r_1^n\right)_{n\in\mathbf{N}}, \left(r_2^n\right)_{n\in\mathbf{N}}\right)$$
2. *Cas où (E_{car}) possède une unique solution dans* **R**. Si (E_{car}) possède une unique solution r_0 dans **R** S est le plan vectoriel dans $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ dont une base est
$$\left(\left(r_0^n\right)_{n\in\mathbf{N}}, \left(n \cdot r_0^n\right)_{n\in\mathbf{N}}\right)$$
3. *Cas où (E_{car}) possède deux solutions complexes conjuguées dans* **C**. Si (E_{car}) possède deux solutions complexes conjuguées dans **C**, alors celles-ci sont non nulles. On peut donc les écrire sous la forme $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$ où $r \in \mathbf{R}_{>0}$ et $\theta \in \mathbf{R}$ (forme exponentielle) et S est le plan vectoriel dans $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ dont une base est
$$\left(\left(r^n \cdot \cos(n\theta)\right)_{n\in\mathbf{N}}, \left(r^n \cdot \sin(n\theta)\right)_{n\in\mathbf{N}}\right)$$

§ 6. SOUS-ESPACE ET DIMENSION

PROPOSITION C19.37 (UN CRITÈRE DE LIBERTÉ)
Soient $(E,+,\cdot)$ un **K**-espace vectoriel, $n \in \mathbf{N}^*$, $(x_1,\ldots,x_n) \in E^n$ une famille libre et $y \in E$. Alors

$$\left(x_1,\ldots,x_n,y\right) \text{ est libre} \quad \Longleftrightarrow \quad y \notin \mathrm{Vect}\,(x_1,\ldots,x_n)$$

THÉORÈME C19.38 (SOUS-ESPACE VECTORIEL D'UN ESPACE VECTORIEL DE DIMENSION FINIE)
Soient $(E,+,\cdot)$ un **K**-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E.

1. L'espace vectoriel F est de dimension finie
2. $\dim(F) \leqslant \dim(E)$
3. Si $\dim(F) = \dim(E)$ alors $F = E$.

EXERCICE C19.39 — Soit

$$F := \left\{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \ : \ x + 2x + 3z + 4t = 0\right\} \quad , \quad u_1 := (1,0,1,-1) \quad , \quad u_2 := (2,-1,4,-3) \quad , \quad u_3 := (1,2,1,-2)$$

1. Justifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ et calculer sa dimension.
2. Justifier que $\mathrm{Vect}\,(u_1,u_2,u_3) \subset F$ et calculer $\dim\left(\mathrm{Vect}\,(u_1,u_2,u_3)\right)$.
3. Qu'en déduire ?

EXERCICE C19.40 — Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on pose

$$f_k \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \cos(kx) \end{array}\right.$$

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la famille $\left(f_0, f_1, \ldots, f_n\right)$ de fonctions de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ est libre.
2. En déduire que le **R**-espace vectoriel $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ n'est pas de dimension finie.

Théorème C19.41 (Somme directe de deux sous-espaces de dimension finie et base adaptée)
Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E en somme directe et de dimension finie.

1. Si $\mathscr{B}_1$ est une base de F_1 et $\mathscr{B}_2$ est une base de F_2 alors $\mathscr{B}_1 \# \mathscr{B}_2$ est une base de $F_1 \oplus F_2$ (qualifiée de base adaptée à cette somme directe).
2. $\dim(F_1 \oplus F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2)$

Théorème C19.42 (Formule de Grassmann)
Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E de dimension finie.

1. L'espace vectoriel $F_1 + F_2$ est de dimension finie.
2. $\dim(F_1 + F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1 \cap F_2)$ [formule de Grassmann]

Exercice C19.43 — Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$. Soient H_1 et H_2 deux sous-espaces vectoriels de E distincts et tels que $\dim(H_1) = \dim(H_2) = n-1$. Démontrer $\dim(H_1 \cap H_2) = n-2$ et interpréter géométriquement ce résultat lorsque E est le plan ou l'espace.

Théorème C19.44 (Existence d'un supplémentaire d'un sous-espace dans un espace de dimension finie)
Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Tout sous-espace vectoriel de E possède un supplémentaire dans E.
2. Si $n := \dim(E) \geqslant 2$, si F un sous-espace vectoriel de E de dimension $p \in [\![1, n-1]\!]$, $(f_1, \ldots, f_p)$ est une base de F complétée en une base
$$\left(f_1, \ldots, f_p\right) \# \left(g_1, \ldots, g_{n-p}\right) \qquad \text{[cf. C19.10]}$$
de E, alors $G := \mathrm{Vect}\left(g_1, \ldots, g_{n-p}\right)$ est un supplémentaire de F dans E.

Exercice C19.45 — Soit
$$F := \left\{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \ : \ x - 2y + 3z - 4t = 4x + 3y + 2z + t = 0\right\}$$
Justifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ et en donner un supplémentaire.

Théorème C19.46 (Caractérisation dimensionnelle des couples de sous-espaces supplémentaires)
Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.
$$F \oplus G = E \iff \left\{ \begin{array}{l} F \cap G = \{0_E\} \\ \text{et} \\ \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \end{array} \right.$$

Exercice C19.47 — Soit $u = (u_1, u_2, u_3)$ un vecteur non nul de $\mathbf{R}^3$. Donner une condition nécessaire portant sur $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$ pour que
$$F := \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ ax + by + cz = 0\right\}$$
soit un supplémentaire de $\mathrm{Vect}(u)$ dans $\mathbf{R}^3$.

Exercice C19.48 — Soit
$$F := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix} : (a,b,c) \in \mathbf{R}^3 \right\}$$
Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ et en donner un supplémentaire.

Exercice C19.49 — Soit
$$F := \left\{ P \in \mathbf{R}_5[X] \ : \ \widetilde{P}(2) = \widetilde{P'}(2) = \widetilde{P''}(2) = 0 \right\}$$
Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_5[X]$ et en donner un supplémentaire.