CHAPITRE N°18
ESPACES VECTORIELS

NOTATION C18.1 — Dans ce document, la lettre $\mathbf{K}$ désigne un corps.

§ 1. ESPACES VECTORIELS

DÉFINITION C18.2 (STRUCTURE DE K-ESPACE VECTORIEL)
Un $\mathbf{K}$-espace vectoriel est la donnée d'un triplet $(E,+,\cdot)$ où

1. E est un ensemble
2. $+$ est une loi de composition interne sur E, i.e. une application :

$$+\left|\begin{array}{ccc} E\times E & \longrightarrow & E \\ (u,v) & \longmapsto & u+v\end{array}\right.$$

3. $\cdot$ est une loi de composition externe sur E à opérateurs dans $\mathbf{K}$, i.e.

$$\cdot\left|\begin{array}{ccc} \mathbf{K}\times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda,u) & \longmapsto & \lambda\cdot u\end{array}\right.$$

vérifiants les propriétés suivantes.
(A1) $\forall\,(u,v,w)\in E^3 \quad (u+v)+w = u+(v+w) =: u+v+w$ [$+$ est associative]
(A2) $\exists 0_E\in E \quad \forall\,u\in E \quad 0_E+u = u+0_E = u$ [$+$ possède un élément neutre]
(A3) $\forall\,u\in E \quad \exists\,v\in E \quad u+v = v+u = 0_E$ [tout élément de E possède un opposé]
(A4) $\forall\,(u,v)\in E^2 \quad u+v = v+u$ [$+$ est commutative]
(A5) $\forall\,u\in E \quad 1_{\mathbf{K}}\cdot u = u$ [$1_{\mathbf{K}}$ est neutre pour $\cdot$]
(A6) $\forall\,(\lambda,\mu)\in\mathbf{K}^2 \quad \forall\,u\in E \quad \lambda\cdot(\mu\cdot u) = (\lambda\times_{\mathbf{K}}\mu)\cdot u$ [associativité mixte]
(A7) $\forall\,\lambda\in\mathbf{K} \quad \forall\,(u,v)\in E^2 \quad \lambda\cdot(u+v) = \lambda\cdot u+\lambda\cdot v$ [distributivité à droite]
(A8) $\forall\,(\lambda,\mu)\in\mathbf{K}^2 \quad \forall\,u\in E \quad (\lambda+_{\mathbf{K}}\mu)\cdot u = \lambda\cdot u+\mu\cdot u$ [distributivité à gauche]
En vertu des axiomes (A1)–(A4), $(E,+)$ est un groupe abélien (ou commutatif).

PROPOSITION C18.3 (CONSÉQUENCES DES AXIOMES DE STRUCTURE DE K-ESPACE VECTORIEL)
Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

1. L'élément 0_E est unique. Il est appelé vecteur nul de E.
2. Soit $u\in E$. L'élément v de E tel que $v+u = u+v = 0_E$ est unique. Il est appelé opposé de u et est noté $-u$.
3. $\forall\,u\in E \quad 0_{\mathbf{K}}\cdot u = 0_E$
4. $\forall\,\lambda\in\mathbf{K} \quad \lambda\cdot 0_E = 0_E$
5. $\forall\,u\in E \quad (-1_{\mathbf{K}})\cdot u = -u$

EXERCICE C18.4 — Démontrer que

$$\forall\,(\lambda,u)\in\mathbf{K}\times E \qquad \lambda\cdot u = 0_E \implies (\lambda = 0_{\mathbf{K}} \text{ ou } u = 0_E)$$

EXEMPLE C18.5 — Soit $n\in\mathbf{N}^*$. L'ensemble $\mathbf{K}^n$ des n-uplets d'éléments de $\mathbf{K}$ muni de

$$+\left|\begin{array}{ccc} \mathbf{K}^n\times\mathbf{K}^n & \longrightarrow & \mathbf{K}^n \\ ((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) & \longmapsto & (x_1+_{\mathbf{K}}y_1,\dots,x_n+_{\mathbf{K}}y_n)\end{array}\right.$$

et

$$\cdot\left|\begin{array}{ccc} \mathbf{K}\times\mathbf{K}^n & \longrightarrow & \mathbf{K}^n \\ (\lambda,(x_1,\dots,x_n)) & \longmapsto & (\lambda\times_{\mathbf{K}}x_1,\dots,\lambda\times_{\mathbf{K}}x_n)\end{array}\right.$$

est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Le vecteur nul de $\mathbf{K}^n$ est $0_{\mathbf{K}^n} = (0_{\mathbf{K}},\dots,0_{\mathbf{K}})$. L'opposé d'un vecteur $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbf{K}^n$ est $(-x_1,\dots,-x_n)$.

Exemple C18.6 — Soit Ω un ensemble non vide. L'ensemble $\mathbf{K}^\Omega = \mathscr{F}(\Omega, \mathbf{K})$ des applications de Ω dans $\mathbf{K}$ muni de

$$+ \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^\Omega \times \mathbf{K}^\Omega & \longrightarrow & \mathbf{K}^\Omega \\ (f,g) & \longmapsto & f+g \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ \omega & \longmapsto & f(\omega) +_{\mathbf{K}} g(\omega) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

et

$$\cdot \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K} \times \mathbf{K}^\Omega & \longrightarrow & \mathbf{K}^\Omega \\ (\lambda,f) & \longmapsto & \lambda \cdot f \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ \omega & \longmapsto & \lambda \times_{\mathbf{K}} f(\omega) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Le vecteur nul de $\mathbf{K}^\Omega$ est

$$0_{\mathbf{K}^\Omega} \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ \omega & \longmapsto & 0_{\mathbf{K}}\,. \end{array} \right.$$

L'opposé d'un vecteur $f \in \mathbf{K}^\Omega$ est

$$-f \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ \omega & \longmapsto & -f(\omega)\,. \end{array} \right.$$

Exemple C18.7 — L'ensemble $\mathbf{K}^{\mathbf{N}} = \mathscr{F}(\mathbf{N}, \mathbf{K})$ des suites d'éléments de $\mathbf{K}$ indexées par $\mathbf{N}$ muni de

$$+ \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^{\mathbf{N}} \times \mathbf{K}^{\mathbf{N}} & \longrightarrow & \mathbf{K}^{\mathbf{N}} \\ ((u_n),(v_n)) & \longmapsto & (u_n +_{\mathbf{K}} v_n) \end{array} \right.$$

et

$$\cdot \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K} \times \mathbf{K}^{\mathbf{N}} & \longrightarrow & \mathbf{K}^{\mathbf{N}} \\ (\lambda,(u_n)) & \longmapsto & (\lambda \times_{\mathbf{K}} u_n) \end{array} \right.$$

est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Le vecteur nul de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ est $0_{\mathbf{K}^n} = (0_{\mathbf{K}}, 0_{\mathbf{K}}, \ldots, 0_{\mathbf{K}}, \ldots)$. L'opposé d'un vecteur $(u_n) \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ est $(-u_n)$.

Exemple C18.8 — Soient n et p des entiers naturels non nuls. L'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ des matrices de format $n \times p$ à coefficients dans $\mathbf{K}$ muni de

$$+ \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \times \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \\ \left(\left(a_{i,j}\right),\left(b_{i,j}\right)\right) & \longmapsto & \left(a_{i,j} +_{\mathbf{K}} b_{i,j}\right) \end{array} \right.$$

et

$$\cdot \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K} \times \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \\ \left(\lambda,\left(a_{i,j}\right)\right) & \longmapsto & \left(\lambda \times_{\mathbf{K}} a_{i,j}\right) \end{array} \right.$$

est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Le vecteur nul de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est la matrice de format $n \times p$ dont tous les coefficients valent $0_{\mathbf{K}}$. L'opposé d'un vecteur $\left(a_{i,j}\right) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est $\left(-a_{i,j}\right)$.

Exemple C18.9 — L'ensemble $\mathbf{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbf{K}$ muni de

$$+ \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X] \times \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}[X] \\ \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k, \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k\right) & \longmapsto & \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k +_{\mathbf{K}} b_k) X^k \end{array} \right.$$

et

$$\cdot \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K} \times \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}[X] \\ \left(\lambda, \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k\right) & \longmapsto & \sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda \times_{\mathbf{K}} a_k) X^k \end{array} \right.$$

est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Le vecteur nul de $\mathbf{K}[X]$ est le polynôme dont tous les coefficients valent $0_{\mathbf{K}}$. L'opposé d'un vecteur $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbf{K}[X]$ est $\sum_{k=0}^{+\infty} (-a_k) X^k$.

PROPOSITION C18.10 (PRODUIT D'UN NOMBRE FINI DE K-ESPACES VECTORIELS)
Soient $n \in \mathbf{N}^*$, $(E_1, +_1, \cdot_1), \ldots, (E_n, +_n, \cdot_n)$. L'ensemble

$$\prod_{i=1}^{n} E_i := \{(x_1, \ldots, x_n) \ : \ \forall\, i \in [\![1, n]\!] \quad x_i \in E_i\}$$

muni de

$$+ \left| \begin{array}{ccc} \displaystyle\prod_{i=1}^{n} E_i \times \prod_{i=1}^{n} E_i & \longrightarrow & \displaystyle\prod_{i=1}^{n} E_i \\ \big((x_1, \ldots, x_n)\,,\,(y_1, \ldots, y_n)\big) & \longmapsto & \big(x_1 +_1 y_1, \ldots, x_n +_n y_n\big) \end{array} \right.$$

et

$$\cdot \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K} \times \displaystyle\prod_{i=1}^{n} E_i & \longrightarrow & \displaystyle\prod_{i=1}^{n} E_i \\ (\lambda, (x_1, \ldots, x_n)) & \longmapsto & (\lambda \cdot_1 x_1, \ldots, \lambda \cdot_n x_n) \end{array} \right.$$

est un **K**-espace vectoriel. Le vecteur nul de $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} E_i$ est $\big(0_{E_1}, \ldots, 0_{E_n}\big)$. L'opposé d'un vecteur $(x_1, \ldots, x_n) \in \displaystyle\prod_{i=1}^{n} E_i$ est $(-x_1, \ldots, -x_n)$.

DÉFINITION C18.11 (COMBINAISON LINÉAIRE D'UN NOMBRE FINI DE VECTEURS)
Soient $(E, +, \cdot)$ un **K**-espace vectoriel, $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ où $n \in \mathbf{N}^*$. Un vecteur $x \in E$ est appelé combinaison linéaire de la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ si

$$\exists\, (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n \qquad x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i$$

EXERCICE C18.12 — Démontrer que $(2,3)$ est combinaison linéaire de la famille $((1,0),(0,1),(1,1))$ dans $\mathbf{R}^2$.

EXERCICE C18.13 — Démontrer que $(1,2,3)$ n'est pas combinaison linéaire de la famille $((1,0,1),(1,1,0))$ dans $\mathbf{R}^3$.

EXERCICE C18.14 — Démontrer que tout élément $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ tel que $x+y+z=0$ est combinaison linéaire de la famille $((-1,0,1),(0,-1,1))$ dans $\mathbf{R}^3$.

EXERCICE C18.15 — Soient les vecteurs de $\mathbf{R}^4$ définis par

$$u_1 = (3,2,2,2) \qquad u_2 = (1,0,1,1) \qquad u_3 = (1,1,0,1) \qquad u_4 = (1,1,1,0)$$

Le vecteur $u = (1,1,1,1)$ est-il combinaison linéaire de la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) dans $\mathbf{R}^4$?

EXERCICE C18.16 — Démontrer que X^3 est combinaison linéaire de la famille $\big((X+1)^3, (X+1)^2, X+1, 1\big)$ dans $\mathbf{K}[X]$.

EXERCICE C18.17 — Soient $n \in \mathbf{N}$, $a_0, \ldots, a_n$ des éléments distincts de **K** et, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$

$$L_i := \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

Démontrer que tout polynôme de $\mathbf{K}_n[X]$ est combinaison linéaire de la famille $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ dans $\mathbf{K}[X]$.

EXERCICE C18.18 — Soient les quatre fonctions

$$f_1 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array} \right. \qquad f_2 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \cos(3x) \end{array} \right. \qquad f_3 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \cos(5x) \end{array} \right. \qquad f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \cos^5(x) \end{array} \right.$$

Démontrer que la fonction f est combinaison linéaire de la famille (f_1, f_2, f_3) dans $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$.

EXERCICE C18.19 — Déterminer une fonction $y_H \in \mathbf{C}^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$ telle que toute fonction $y \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$ vérifiant

$$y' + \frac{x}{x^2+1} \cdot y = 0$$

est combinaison linéaire de y_H dans $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$.

EXERCICE C18.20 — Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Déterminer deux fonctions $y_{H,1}, y_{H,2} \in \mathbf{C}^2(\mathbf{R},\mathbf{R})$ telle que toute fonction $y \in \mathscr{C}^2(\mathbf{R},\mathbf{R})$ vérifiant

$$y'' + \lambda \cdot y = 0$$

est combinaison linéaire de $\left(y_{H,1}, y_{H,2}\right)$ dans $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$.

EXERCICE C18.21 — Soit $(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ la suite définie par $u_0 = u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Écrire la suite (u_n) comme une combinaison linéaire de deux suites géométriques dans $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

DÉFINITION C18.22 (FAMILLE PRESQUE NULLE DE SCALAIRES)
Soit I un ensemble non vide.

1. Le support d'une famille $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbf{K}^I$ est défini par

$$\operatorname{supp}\left((\lambda_i)_{i\in I}\right) := \{i \in I \,:\, \lambda_i \neq 0_{\mathbf{K}}\}$$

2. Une famille $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbf{K}^I$ est dite presque nulle si son support est fini, i.e. si tous ses termes valent $0_{\mathbf{K}}$ sauf un nombre fini d'entre eux.
3. L'ensemble des familles presque nulle d'élements de $\mathbf{K}$ indexée par I est notée $\mathbf{K}^{(I)}$, i.e.

$$\mathbf{K}^{(I)} := \left\{(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbf{K}^I \;:\; \operatorname{supp}\left((\lambda_i)_{i\in I}\right) \text{ est fini}\right\}$$

DÉFINITION C18.23 (COMBINAISON LINÉAIRE D'UNE FAMILLE DE VECTEURS)
Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, I un ensemble non vide, $(x_i)_{i\in I} \in E^I$. Un vecteur $x \in E$ est appelé combinaison linéaire de la famille $(x_i)_{i\in I}$ s'il existe $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbf{K}^{(I)}$ tel que

$$x = \sum_{i \in \operatorname{supp}((\lambda_i)_{i\in I})} \lambda_i \cdot x_i \;=:\; \sum_{i\in I} \lambda_i \cdot x_i$$

EXEMPLE C18.24 — Soit $a \in \mathbf{K}$. Démontrer que tout $P \in \mathbf{K}[X]$ est combinaison linéaire de la famille $((X-a)^n)_{n\in\mathbf{N}}$.

§ 2. SOUS-ESPACE VECTORIEL

NOTATION C18.25 — Dans toute cette partie, on fixe un $\mathbf{K}$-espace vectoriel $(E,+,\cdot)$.

DÉFINITION C18.26 (SOUS-ESPACE VECTORIEL DE E)
Un sous-espace vectoriel de E est une partie de E telle que

(A1) $0_E \in F$ [F contient le vecteur nul de E]
(A2) $\forall\, (u_1,u_2) \in F^2 \quad u_1 + u_2 \in F$ [F est stable par addition]
(A3) $\forall\, \lambda \in \mathbf{K} \quad \forall\, u \in F \quad \lambda \cdot u \in F$ [F est stable par multiplication par un scalaire]

EXEMPLE C18.27 — Les parties $\{0_E\}$ et E de E sont des sous-espaces vectoriels de E, appelés sous-espaces vectoriels triviaux de E.

PROPOSITION C18.28 (STRUCTURE NATURELLE DE K-E.V. SUR UN S.E.V.)
Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors les applications

$$+_F \left| \begin{array}{ccc} F\times F & \longrightarrow & F \\ (u,v) & \longmapsto & u+v \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad \cdot_F \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}\times F & \longrightarrow & F \\ (\lambda,u) & \longmapsto & \lambda\cdot u \end{array}\right.$$

induites par les opérations $+$ et $\cdot$ de E, sont bien définies et $(F,+_F,\cdot_F)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

REMARQUE C18.29 — Le précédent théorème fournit un outil puissant, pour construire de nouveaux espaces vectoriels.

PROPOSITION C18.30 (CRITÈRE POUR ÊTRE UN SOUS-ESPACE VECTORIEL DE E)
Une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E si seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées.
(P1) $F\neq\emptyset$ [F contient au moins un élément]
(P2) $\forall\,(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbf{K}^2 \quad \forall\,(u_1,u_2)\in F^2 \quad \lambda_1\cdot u_1+\lambda_2\cdot u_2\in F$ [F est stable par combinaison linéaire]

EXERCICE C18.31 — Soit u un vecteur non nul de E. Démontrer que

$$\mathrm{Vect}\,(u)=\{\lambda\cdot u\ :\ \lambda\in\mathbf{K}\}$$

est un sous-espace vectoriel de u.

EXERCICE C18.32 — Déterminer une CNS sur $\lambda\in\mathbf{R}$ pour que

$$F_\lambda := \left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\ :\ 3x-2y=\lambda\right\}$$

soit un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$.

EXERCICE C18.33 — L'ensemble

$$\Gamma := \left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\ :\ y=x^2\right\}$$

est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$?

REMARQUE C18.34 — Identifions le plan $\mathscr{P}$ et $\mathbf{R}^2$ au moyen d'un repère $\left(O\,;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$. Grâce à la théorie de la dimension pour les espaces vectoriels, nous démontrerons qu'un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$ est de l'une des trois formes suivantes.
(0) le singleton contenant l'origine $\{O\}$
(1) une droite passant par l'origine O
(2) le plan $\mathscr{P}$ tout entier

EXERCICE C18.35 — Démontrer que

$$F := \left\{(\lambda-\mu, 3\lambda-5\mu, -2\lambda+7\mu)\ :\ (\lambda,\mu)\in\mathbf{R}^2\right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.

EXERCICE C18.36 — Démontrer que

$$F := \left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\ :\ (x,y,z)\wedge(1,2,3)=0\right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.

EXERCICE C18.37 — L'ensemble

$$F := \left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\ :\ x=0 \text{ ou } y=0 \text{ ou } z=0\right\}$$

est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$?

Remarque C18.38 — Identifions l'espace $\mathscr{E}$ et $\mathbf{R}^3$ au moyen d'un repère $\left(O\,;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$. Grâce à la théorie de la dimension pour les espaces vectoriels, nous démontrerons qu'un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ est de l'une des quatre formes suivantes.

(0) le singleton contenant l'origine $\{O\}$
(1) une droite passant par l'origine O
(2) un plan passant par l'origine O
(3) l'espace $\mathscr{E}$ tout entier

Exercice C18.39 — Soient $(n,p)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*$ et $A\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Démontrer que

$$\mathrm{Ker}\,(A) := \left\{X\in\mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{K})\ :\ AX = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})}\right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

Proposition C18.40 (ensemble solution d'un système linéaire homogène)
Soient $(n,p)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*$ et $A=\left(a_{i,j}\right)\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. On considère le système linéaire homogène (SH) défini par

$$(SH)\qquad \left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & = & 0 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,p}x_p & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n,p}x_p & = & 0 \end{array}\right.$$

d'inconnue $(x_1,\dots,x_p)\in\mathbf{K}^p$. Alors l'ensemble solution de (SH)

$$\mathrm{Sol}(SH) := \left\{(x_1,\dots,x_p)\in\mathbf{K}^p\ :\ \forall\, i\in[\![1,n]\!],\ a_{i,1}x_1+a_{i,2}x_2+\ldots+a_{i,p}x_p=0\right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^p$.

Exercice C18.41 — Soit I un ensemble non vide. Démontrer que l'ensemble $\mathbf{K}^{(I)}$ des familles presque nulles d'éléments de $\mathbf{K}$ indexées par I est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^I$.

Exercice C18.42 — Soit $n\in\mathbf{N}$. L'ensemble

$$F_n := \left\{P\in\mathbf{K}[X]\ :\ \deg(P)=n\right\}$$

est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$?

Proposition C18.43 (structure de $\mathbf{K}_n[X]$)
Soit $n\in\mathbf{N}$. L'ensemble

$$\mathbf{K}_n[X] := \left\{P\in\mathbf{K}[X]\ :\ \deg(P)\leqslant n\right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}_n[X]$.

Exercice C18.44 — Soit $n\in\mathbf{N}^*$. Démontrer que l'ensemble

$$F := \left\{P\in\mathbf{K}_n[X]\ :\ \widetilde{P}(2)=0\right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}_n[X]$.

Exercice C18.45 — On pose

$$\mathscr{A} := \left\{(u_n)_{n\in\mathbf{N}}\in\mathbf{R}^{\mathbf{N}}\ :\ (u_n)_{n\in\mathbf{N}}\text{ est arithmétique}\right\}\qquad\text{et}\qquad \mathscr{G} := \left\{(u_n)_{n\in\mathbf{N}}\in\mathbf{R}^{\mathbf{N}}\ :\ (u_n)_{n\in\mathbf{N}}\text{ est géométrique}\right\}$$

Démontrer que $\mathscr{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, contrairement à $\mathscr{G}$.

Exercice C18.46 — Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$. Justifier que $\mathscr{C}^1(I,\mathbf{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^I$.

Exercice C18.47 — Pour tout $p \in [\![1,3]\!]$, on définit F_p par

$$F_p := \left\{ f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R}) \ : \ \int_0^1 f^p(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$$

1. Démontrer que F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R})$.
2. L'ensemble F_2 est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R})$?
3. Démontrer que l'ensemble F_3 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R})$.

§ 3. Sous-espace engendré par une partie

Notation C18.48 — Dans toute cette partie, on fixe un $\mathbf{K}$-espace vectoriel $(E,+,\cdot)$.

Proposition C18.49 (intersection d'une famille de s.e.v)
Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Alors

$$\bigcap_{i\in I} F_i := \{u \in E \ : \ \forall\, i \in I,\ u \in F_i\}$$

est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque C18.50 — Une réunion de sous-espaces vectoriels de E n'est pas nécessairement un sous-espace vectoriel de E. Par exemple

$$F_1 := \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x-y=0\right\} \qquad \text{et} \qquad F_2 := \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x+y=0\right\}$$

sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^2$, puisque chacun est ensemble solution d'une équation linéaire homogène d'inconnue dans $\mathbf{R}^2$. Cependant, $F_1 \cup F_2$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$. En effet, $F_1 \cup F_2$ n'est pas stable par addition car $(1,1)$ et $(1,-1)$ appartiennent à $F_1 \cup F_2$, mais $(1,1)+(1,-1) = (2,0) \notin F_1 \cup F_2$.

Exercice C18.51 — Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Démontrer que $F_1 \cup F_2$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F_1 \cup F_2$ ou $F_2 \cup F_1$.

Exercice C18.52 — Démontrer que

$$F := \left\{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \ : \ x+y+z+t=0 \text{ et } x-y+z-t=0\right\} \qquad \text{et} \qquad G := \left\{\lambda_1\cdot(1,1,0,1)+\lambda_2\cdot(1,1,1,0) \ : \ (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbf{R}^2\right\}$$

sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^4$, puis déterminer $F \cap G$.

Proposition-Définition C18.53 (s.e.v. engendré par une partie de E)
Soit A une partie de E. On définit la partie $\mathrm{Vect}(A)$ de E par :

$$\mathrm{Vect}(A) := \bigcap_{\substack{F \text{ s.e.v. de } E \\ \text{tel que } A \subset F}} F\,.$$

Alors

1. $A \subset \mathrm{Vect}(A)$ [inclusion]
2. $\mathrm{Vect}(A)$ est un sous-espace vectoriel de E [sous-espace vectoriel]
3. si G est une partie de E telle que
   — $A \subset G$ [inclusion]
   — G est un sous-espace vectoriel de E [sous-espace vectoriel]
   alors $\mathrm{Vect}(A) \subset G$.

En d'autres termes, $\mathrm{Vect}(A)$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel de E contenant A. Le sous-espace vectoriel de E, noté $\mathrm{Vect}(A)$, est appelé sous-espace vectoriel de E engendré par A.

Remarque C18.54 — La propriété 3 de la proposition-définition C18.53 est appelée propriété de minimalité d'un sous-espace vectoriel engendré.

Proposition C18.55 (description du s.e.v. engendré par une partie finie de E)
Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$. Alors $\mathrm{Vect}(\{u_1, \ldots, u_n\})$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(u_1, \ldots, u_n)$, i.e.

$$\begin{aligned}\mathrm{Vect}(\{u_1, \ldots, u_n\}) &= \{\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \ldots + \lambda_n \cdot u_n \,:\, (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n\} \\ &= \left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot u_i \,:\, (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n\right\}.\end{aligned}$$

Exercice C18.56 — Soient $u_1 := (1,1,1)$, $u_2 := (2,1,-1)$, $v_1 := (0,1,3)$, $v_2 := (9,4,-6)$. Démontrer que

$$\mathrm{Vect}(\{u_1, u_2\}) = \mathrm{Vect}(\{v_1, v_2\})$$

Exercice C18.57 — Comparer les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^4$

$$F := \mathrm{Vect}((-1,1,2,-2),(1,2,3,-6)) \qquad \text{et} \qquad G := \left\{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \,:\, x+y+z+t=0\right\}.$$

Exercice C18.58 — Soit

$$F := \left\{P \in \mathbf{R}_5[X] \,:\, \widetilde{P}(0) = \widetilde{P}(1) = 0\right\}$$

Démontrer que F est un sous-espace de $\mathbf{R}_5[X]$ engendré par 4 vecteurs.

Proposition C18.59 (description du s.e.v. engendré par une partie quelconque de E)
Soit A une partie non vide de E. Alors $\mathrm{Vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de A i.e.

$$\mathrm{Vect}(A) = \left\{\sum_{a \in A} \lambda_a \cdot a \,:\, (\lambda_a)_{a \in A} \in \mathbf{K}^{(A)}\right\}$$

Exercice C18.60 — Démontrer que

$$\mathrm{Vect}\left(\left(X^{2k}\right)_{k \in \mathbf{N}}\right) = \{P \in \mathbf{K}[X] \,:\, P(X) = P(-X)\}$$

§ 4. Familles remarquables de vecteurs

Notation C18.61 — Dans toute cette partie, on fixe un $\mathbf{K}$-espace vectoriel $(E, +, \cdot)$.

Définition C18.62 (famille génératrice de E)
Une famille $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est dite génératrice de E si

$$\forall\, x \in E \quad \exists (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbf{K}^{(I)} \quad x = \sum_{i \in I} \lambda_i \cdot x_i$$

ou, de manière équivalente, si

$$\mathrm{Vect}((x_i)_{i \in I}) = E$$

Exercice C18.63 — Justifier que

$$F := \left\{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \,:\, x+y+z+t=0\right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ et en donner une famille génératrice.

EXEMPLE C18.64 — Si $n \in \mathbf{N}$ alors la famille $\left(X^k\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est génératrice de $\mathbf{K}_n[X]$.

EXERCICE C18.65 — Soit un entier $n \geqslant 2$.

1. Justifier que l'ensemble $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ des matrices à coefficients réels, de format (n,n) et symétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.
2. Donner une famille génératrice de $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$.

EXERCICE C18.66 — Justifier que

$$F := \left\{P \in \mathbf{K}[X] \ : \ \widetilde{P}(1) = \widetilde{P}'(1) = 0\right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$ et en donner une famille génératrice de F.

PROPOSITION C18.67 (SUR-FAMILLE D'UNE FAMILLE GÉNÉRATRICE DE E)
Soient I un ensemble, J une partie de I et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E telle que la sous-famille $(x_j)_{j\in J}$ est génératrice de E. Alors la famille $(x_i)_{i\in I}$ est également génératrice de E.

DÉFINITION C18.68 (FAMILLE LIBRE, FAMILLE LIÉE)
Soit $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E.

1. La famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est dite libre si

$$\forall\,(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbf{K}^{(I)} \qquad \sum_{i\in I} \lambda_i \cdot x_i = 0_E \implies (\forall\, i \in I \quad \lambda_i = 0_{\mathbf{K}})$$

2. La famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est dite liée si elle n'est pas libre.

EXERCICE C18.69 — On définit les trois vecteurs u_1, u_2, u_3 de $\mathbf{R}^3$ par

$$u_1 = (1,2,3) \qquad u_2 = (4,5,6) \qquad u_3 = (7,8,9)$$

La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre ?

EXERCICE C18.70 — Soient les matrices

$$A_{1,1} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{1,2} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{2,1} := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{2,2} := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La famille $\left(A_{1,1}, A_{1,2}, A_{2,1}, A_{2,2}\right)$ de matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ est-elle libre ?

EXERCICE C18.71 — Soient un entier $n \geqslant 2$ et $(u_1,\dots,u_n) \in \mathbf{K}^n$.

1. On suppose qu'un des vecteurs $u_1,\dots,u_n$ est nul. Démontrer que la famille $(u_1,\dots,u_n)$ est liée.
2. On suppose que deux des vecteurs $u_1,\dots,u_n$ sont égaux. Démontrer que la famille $(u_1,\dots,u_n)$ est liée.
3. On suppose que $u_n \in \mathrm{Vect}\,(u_1,\dots,u_{n-1})$ Démontrer que la famille $(u_1,\dots,u_n)$ est liée.

DÉFINITION C18.72 (VECTEURS COLINÉAIRES)
Deux vecteurs (u_1, u_2) sont dit colinéaires si

$$(\exists\,\lambda_1 \in \mathbf{K} \quad u_2 = \lambda_1 \cdot u_1) \quad \text{ou} \quad (\exists\,\lambda_2 \in \mathbf{K} \quad u_1 = \lambda_2 \cdot u_2)$$

PROPOSITION C18.73 (CRITÈRE DE LIBERTÉ POUR UNE FAMILLE DE DEUX VECTEURS)
Soient $(u_1, u_2) \in E^2$. La famille (u_1, u_2) est libre si et seulement si les vecteurs u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires.

EXERCICE C18.74 — On définit les trois vecteurs u_1, u_2, u_3 de $\mathbf{R}^2$ par

$$u_1 = (1,0) \qquad u_2 = (0,1) \qquad u_3 = (1,1)$$

La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre ?

PROPOSITION C18.75 (CRITÈRE POUR UNE FAMILLE SOIT LIÉE)
Soit $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E. La famille $(x_i)_{i\in I}$ est liée si et seulement si un des vecteurs de la famille $(x_i)_{i\in I}$ est combinaison linéaire des autres.

EXERCICE C18.76 — Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et des scalaires $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Donner une CNS sur $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ pour que la famille

$$\left(u_k := \left(1, \alpha_k, \alpha_k^2, \ldots, \alpha_k^{n-1}, \alpha_k^n\right) \right)_{k\in[\![0,n]\!]}$$

de vecteurs de $\mathbf{K}^{n+1}$ soit libre.

Solution — • Si deux des scalaires $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont égaux, alors deux des vecteurs $u_0, u_1, \ldots, u_n$ sont égaux et la famille est liée. Ainsi, si la famille est libre, alors les scalaires $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont deux-à-deux distincts.
• Démontrons la réciproque. Supposons que les scalaires $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont deux-à-deux distincts et démontrons que la famille $(u_0, u_1, \ldots, u_n)$ est libre. Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^{n+1}$ tel que

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot u_k = 0_{\mathbf{K}^{n+1}}$$

Comme

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot u_k = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot \left(1, \alpha_k, \alpha_k^2, \ldots, \alpha_k^{n-1}, \alpha_k^n\right) = \left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k, \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot \alpha_k, \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot \alpha_k^2, \ldots, \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot \alpha_k^n \right)$$

le vecteur $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)^\top \in \mathscr{M}_{n+1,1}(\mathbf{K})$ est dans le noyau de la matrice

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \alpha_0^2 & \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \alpha_0^n & \alpha_1^n & \alpha_2^n & \ldots & \alpha_n^n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbf{K})$$

En étudiant le noyau de la matrice $V^\top \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbf{K})$, allons prouver que cette matrice est inversible, ce qui entraînera $V \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbf{K})$ puis $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0_{\mathbf{K}}$. Soient $(\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n)^\top \in \mathrm{Ker}\left(V^\top\right)$. Alors

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} \mu_k \cdot \alpha_0^k \\ \sum_{k=0}^{n} \mu_k \cdot \alpha_1^k \\ \sum_{k=0}^{n} \mu_k \cdot \alpha_2^k \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{n} \mu_k \cdot \alpha_n^k \end{pmatrix} = 0_{\mathscr{M}_{n+1,1}(\mathbf{K})}$$

et $P := \sum_{k=0}^{n} \mu_k \cdot X^k \in \mathbf{K}_n[X]$ possède $n+1$ racines deux-à-deux distinctes, donc est le polynôme nul. Ainsi $\mu_0 = \mu_1 = \ldots = \mu_n = 0_{\mathbf{K}}$.
• Conclusion. La famille $\left(u_k := \left(1, \alpha_k, \alpha_k^2, \ldots, \alpha_k^{n-1}, \alpha_k^n\right) \right)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est libre si et seulement si les scalaires $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont deux-à-deux distincts.
• Remarque. D'après notre étude, si les scalaires $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont deux-à-deux distincts alors la matrice (de Vandermonde) V est inversible. La réciproque est vraie et aisée à établir.

Proposition C18.77 (sous-famille d'une famille libre)
Soient I un ensemble, J une partie de I et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. Si la famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre alors la sous-famille $(x_j)_{j\in J}$ est également libre.

Proposition C18.78 (un critère de liberté pour une famille de polynômes)
Une famille de polynômes non nuls et de degrés deux-à-deux distincts est libre.

Exercice C18.79 — Soit $\alpha \in \mathbf{K}$. Justifier de deux manières la liberté de la famille $((X-\alpha)^n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Définition C18.80 (base de E)
Une base de E est une famille de vecteurs de E qui est libre et génératrice de E.

Exercice C18.81 — Démontrer que l'ensemble

$$F := \left\{(x,y,z,t) \in \mathbf{K}^4 \ : \ x+2y+3z+4t=0\right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^4$ et en déterminer une base.

Exemple C18.82 — Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On pose

$$e_1 := (1,0,\dots,0) \in \mathbf{K}^n \qquad e_2 := (0,1,0,\dots,0) \in \mathbf{K}^n \qquad e_3 := (0,0,1,0,\dots,0) \in \mathbf{K}^n \qquad e_n := (0,\dots,0,1) \in \mathbf{K}^n$$

La famille $(e_1, e_2, e_3, \dots, e_n)$ de vecteurs de $\mathbf{K}^n$ est une base de $\mathbf{K}^n$, appelée base canonique de $\mathbf{K}^n$.

Exemple C18.83 — Soit $(n,p) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, on définit la matrice $E_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ par

$$E_{i,j} := \left(\delta_{k,i}\cdot\delta_{\ell,j}\right)_{(k,\ell)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \qquad \left[\text{tous ses coefficients sont nuls sauf celui d'adresse } (i,j) \text{ qui vaut } 1\right]$$

Alors la famille $\left(E_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ de matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, appelée base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

Exemple C18.84 — Si $n \in \mathbf{N}$, alors la famille $\left(1, X, X^2, \dots, X^n\right)$ est une base de $\mathbf{K}_n[X]$, appelée base canonique de $\mathbf{K}_n[X]$.

Exemple C18.85 — La famille $(X^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une base de $\mathbf{K}[X]$, appelée base canonique de $\mathbf{K}[X]$.

Proposition-Définition C18.86 (coordonnées d'un vecteur dans une base)
Soient $\mathscr{B} = (x_i)_{i\in I}$ une base de E et $x \in E$. Alors

$$\exists!\, (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbf{K}^{(I)} \qquad x = \sum_{i\in I} \lambda_i \cdot x_i$$

La famille de scalaires $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbf{K}^{(I)}$ est appelée coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice C18.87 — On définit les trois vecteurs u_1, u_2, u_3 de $\mathbf{R}^3$ par

$$u_1 = (0,1,1) \qquad u_2 = (1,0,1) \qquad u_3 = (1,1,0)$$

1. Démontrer que la famille $\mathscr{B} := (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
2. Quelles sont les coordonnées d'un vecteur $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$?
3. Quelles sont les coordonnées d'un vecteur $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ dans la base $\mathscr{B}$ de $\mathbf{R}^3$?

Exercice C18.88 — Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Préciser les coordonnées d'un vecteur $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n$ dans la base canonique de $\mathbf{K}^n$.

Exercice C18.89 — Soit $(n,p) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$. Préciser les coordonnées d'une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ dans la base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

Exercice C18.90 — Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Préciser les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbf{K}_n[X]$ dans la base canonique de $\mathbf{K}_n[X]$.

Exercice C18.91 — Préciser les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbf{K}[X]$ dans la base canonique de $\mathbf{K}[X]$.

Théorème C18.92 (des degrés échelonnés dans $\mathbf{K}_n[X]$)
Soit $n \in \mathbf{N}$. Toute famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n) \in \mathbf{K}[X]^{n+1}$ vérifiant

$$\forall\, k \in [\![0, n]\!] \qquad \deg(P_k) = k$$

est une base de $\mathbf{K}_n[X]$.

Théorème C18.93 (des degrés échelonnés dans $\mathbf{K}[X]$)
Toute famille $(P_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{K}[X]^{\mathbf{N}}$ vérifiant

$$\forall\, n \in \mathbf{N} \qquad \deg(P_n) = n$$

est une base de $\mathbf{K}[X]$.

Exercice C18.94 — Justifier que

$$\mathscr{B} := \left(P_3 := X^3 + X^2 + X + 1, P_2 := X^2 + X + 1, P_1 := X + 1, P_0 := 1\right)$$

est une base de $\mathbf{K}_3[X]$, puis déterminer les coordonnées des polynômes $1, X, X^2, X^3$ dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice C18.95 — Soient $n \in \mathbf{N}$, $a_0, \ldots, a_n$ des éléments deux-à-deux distincts de $\mathbf{K}$ et, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$

$$L_i := \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

1. Démontrer que la famille $\mathscr{L} := (L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbf{K}_n[X]$.
2. Préciser les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbf{K}_n[X]$ dans la base $\mathscr{L}$.

§ 5. Somme de deux sous-espaces

Notation C18.96 — Dans toute cette partie, on fixe un $\mathbf{K}$-espace vectoriel $(E, +, \cdot)$.

Proposition-Définition C18.97 (somme de deux sous-espaces vectoriels)
Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Soit $F_1 + F_2$ la partie de E définie par

$$F_1 + F_2 := \{u_1 + u_2 \ :\ u_1 \in F_1 \text{ et } u_2 \in F_2\}.$$

Alors

1. $F_1 \cup F_2 \subset F_1 + F_2$ [inclusion]
2. $F_1 + F_2$ est un sous-espace vectoriel de E [sous-espace vectoriel]
3. si G est une partie de E telle que $F_1 \cup F_2 \subset G$ et G est un sous-espace vectoriel de E, alors $F_1 + F_2 \subset G$.

Ainsi $F_1 + F_2$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel de E qui contient $F_1 \cup F_2$.

Remarque C18.98 — La propriété 3 de la proposition-définition C18.97 sera appelée propriété de minimalité de la somme.

Exercice C18.99 — Soient

$$F_1 := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \ : \ x_1 + x_2 + x_3 = 0\right\} \qquad \text{et} \qquad F_2 = \left\{(a, a, a) \in \mathbf{R}^3 \ : \ a \in \mathbf{R}\right\}$$

1. Justifier que F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$.
2. Démontrer que $F_1 + F_2 = \mathbf{R}^3$.

Solution —

1. Comme F_1 est l'ensemble solution d'une équation linéaire homogène d'inconnue dans $\mathbf{R}^3$, F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$. Puisque $F_2 = \mathrm{Vect}\left((1,1,1)\right)$, F_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.
2. L'inclusion $F_1 + F_2 \subset \mathbf{R}^3$ est claire. Montrons l'inclusion réciproque. Pour ce faire, considérons un vecteur $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3$ et démontrons qu'il existe $(u_1, u_2) \in F_1 \times F_2$ tel que $(y_1, y_2, y_3) = u_1 + u_2$, en raisonnant par analyse-synthèse.
   - Analyse. Supposons qu'une telle décomposition de (y_1, y_2, y_3) existe. Comme $u_1 \in F_1$, il existe des réels x_1, x_2, x_3 tels que
   $$(\star) \qquad u_1 = (x_1, x_2, x_3) \qquad \text{et} \qquad x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
   Comme $u_2 \in F_2$, il existe un réel a tel que
   $$u_2 = (a, a, a)$$
   Comme $(y_1, y_2, y_3) = (x_1, x_2, x_3) + (a, a, a)$
   $$(\star\star) \qquad x_1 = y_1 - a \qquad x_2 = y_2 - a \qquad x_3 = y_3 - a$$
   De $(\star)$, nous déduisons alors $y_1 - a + y_2 - a + y_3 - a = 0$ puis
   $$a = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$
   Avec $(\star\star)$ il vient
   $$x_1 = \frac{2y_1 - y_2 - y_3}{3} \qquad x_2 = \frac{-y_1 + 2y_2 - y_3}{3} \quad ; \quad x_3 = \frac{-y_1 - y_2 + 2y_3}{3}$$
   À l'issue de notre analyse, nous avons un unique candidat pour u_1 et un unique candidat pour u_2 donnés par
   $$u_1 := \left(\frac{2y_1 - y_2 - y_3}{3}, \frac{-y_1 + 2y_2 - y_3}{3}, \frac{-y_1 - y_2 + 2y_3}{3}\right) \qquad \text{et} \qquad u_2 := \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \cdot (1,1,1)$$
   - Synthèse. Considérons u_1, u_2 comme en fin d'analyse. Clairement $u_2 \in F_2$ et $u_1 + u_2 = (y_1, y_2, y_3)$. Enfin comme
   $$\frac{2y_1 - y_2 - y_3}{3} + \frac{-y_1 + 2y_2 - y_3}{3} + \frac{-y_1 - y_2 + 2y_3}{3} = 0$$
   $u_1 \in F_1$.

Proposition C18.100 (somme de deux sous-espaces engendrés)
Soient $(n, m) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$, $(u_1, \ldots, u_n) \in \mathscr{E}^n$ et $(v_1, \ldots, v_m) \in E^m$. Alors

$$\mathrm{Vect}\left(u_1, \ldots, u_n\right) + \mathrm{Vect}\left(v_1, \ldots, v_m\right) = \mathrm{Vect}\left(u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m\right)$$

Définition C18.101 (deux sous-espaces vectoriels de E en somme directe)
Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.

1. On dit que F_1 et F_2 sont en somme directe si
$$\forall\, u \in F_1 + F_2 \quad \exists!\, (u_1, u_2) \in F_1 \times F_2 \quad u = u_1 + u_2$$
i.e. si tout élément de $F_1 + F_2$ s'écrit de manière unique sous la forme $u_1 + u_2$ avec $u_1 \in F_1$ et $u_2 \in F_2$.
2. Si F_1 et F_2 sont en somme directe, alors on note $F_1 \oplus F_2$ le sous-espace vectoriel $F_1 + F_2$ de E.

EXERCICE C18.102 — Soit $n \in \mathbf{N}$. On introduit

$$\mathscr{S}_n(\mathbf{R}) := \left\{A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \,:\, A^\top = A\right\} \qquad \mathscr{A}_n(\mathbf{R}) := \left\{A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \,:\, A^\top = -A\right\}$$

1. Démontrer que $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbf{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.
2. Démontrer que $\mathscr{M}_n(\mathbf{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbf{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbf{R})$.

Solution —

1. Démontrons que $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ est un sous-espace vectoriel de $0_{\mathscr{M}_n(\mathbf{R})}$, à l'aide de la caractérisation.
   - La matrice $0_{\mathscr{M}_n(\mathbf{R})}$ est symétrique donc $0_{\mathscr{M}_n(\mathbf{R})} \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$.
   - Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{R}^2$ et $(A_1, A_2) \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})^2$. Comme

   $$\begin{array}{rcll} (\lambda_1 \cdot A_1 + \lambda_2 \cdot A_2)^\top & = & \lambda_1 \cdot A_1^\top + \lambda_2 \cdot A_2^\top & [\text{linéarité de la transposition}] \\ & = & \lambda_1 \cdot A_1 + \lambda_2 \cdot A_2 & [A_1 \text{ et } A_2 \text{ sont symétriques}] \end{array}$$

   la matrice $\lambda_1 \cdot A_1 + \lambda_2 \cdot A_2$ appartient à $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$.
   De manière analogue, on démontre que $\mathscr{A}_n(\mathbf{R})$ est un sous-espace vectoriel de $0_{\mathscr{M}_n(\mathbf{R})}$.
2. L'inclusion $\mathscr{S}_n(\mathbf{R}) + \mathscr{A}_n(\mathbf{R}) \subset \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est claire. Montrons l'inclusion réciproque. Pour ce faire, considérons une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et démontrons qu'il existe $(S, A) \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R}) \times \mathscr{A}_n(\mathbf{R})$ tel que $M = A + S$, en raisonnant par analyse-synthèse.
   - Analyse. Supposons qu'une telle décomposition de M existe. Comme la transposition est linéaire, S est symétrique et A est antisymétrique, nous déduisons de

   $$(\star) \qquad M = S + A$$

   que

   $$(\star\star) \qquad M^\top = (S + A)^\top = S^\top + A^\top = S - A$$

   De $(\star)$ et $(\star\star)$, nous déduisons

   $$S = \frac{1}{2} \cdot \left(M + M^\top\right) \qquad \text{et} \qquad A = \frac{1}{2} \cdot \left(M - M^\top\right)$$

   À l'issue de notre analyse, nous avons un unique candidat pour S et un unique candidat pour A.
   - Synthèse. Considérons S, A comme en fin d'analyse. Clairement $S + A = M$. D'après la linéarité et le caractère involutif de la transposition

   $$S^\top = \left(\frac{1}{2} \cdot \left(M + M^\top\right)\right)^\top = \frac{1}{2} \cdot \left(M^\top + M\right) = S \qquad \text{et} \qquad A^\top = \left(\frac{1}{2} \cdot \left(M - M^\top\right)\right)^\top = \frac{1}{2} \cdot \left(M^\top - M\right) = -A$$

   la matrice S est symétrique et la matrice A est antisymétrique.
   - Conclusion. Nous avons établi que $\mathscr{M}_n(\mathbf{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbf{R}) + \mathscr{A}_n(\mathbf{R})$. De notre analyse (cf. unicité des deux candidats trouvés en toute fin), nous déduisons que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ s'écrit d'une unique manière comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique. Les sous-espaces $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbf{R})$ sont donc en somme directe et nous pouvons noter $\mathscr{M}_n(\mathbf{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbf{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbf{R})$.

PROPOSITION C18.103 (CRITÈRE POUR QUE DEUX SOUS-ESPACES VECTORIELS DE E SOIENT EN SOMME DIRECTE)
Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Alors F_1 et F_2 sont en somme directe si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.

Démonstration — $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que F_1 et F_2 sont en somme directe et démontrons que $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$. L'inclusion sup étant claire, nous ne considérons que l'autre. Soit donc $u \in F_1 \cap F_2$. De

$$u = \underbrace{u}_{\in F_1} + \underbrace{0_E}_{\in F_2} \qquad u = \underbrace{0_E}_{\in F_1} + \underbrace{u}_{\in F_2}$$

et de l'unicité de la décomposition de u comme somme d'un vecteur de F_1 et F_2, il vient $u = 0_E$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$. Soit $u \in F_1 + F_2$. Par définition de la somme de deux sous-espaces vectoriels, il existe $(u_1, u_2) \in F_1 \times F_2$ tel que

$$(\star) \qquad u = u_1 + u_2$$

Démontrons que cette décomposition est unique. Soit $(v_1, v_2) \in F_1 \times F_2$ tel que

$$(\star\star) \qquad u = v_1 + v_2$$

De $(\star)$ et $(\star\star)$ on déduit

$$\underbrace{u_1 - v_1}_{\in F_1} = \underbrace{v_2 - u_2}_{\in F_2}$$

et donc $u_1 - v_1$ et $v_2 - u_2$ appartiennent à $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$. Ainsi $u_1 = v_1$ et $u_2 = v_2$.

EXERCICE C18.104 — Démontrer que les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$ définis en C18.99 sont en somme directe.

Solution — Nous proposons deux solutions.

- $1^{\text{ère}}$ solution. D'après la solution donnée en C18.99, tout vecteur de $F_1 + F_2$ (qui égale l'espace $\mathbf{R}^3$) s'écrit d'une unique manière comme somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2 (cf. unicité des deux candidats trouvés en toute fin d'analyse).
- $2^{\text{émé}}$ solution. Nous démontrons que $F_1 \cap F_2 = \{(0,0,0)\}$. L'inclusion sup étant claire, nous ne considérons que l'autre. Soient $u \in F_1 \cap F_2$. Comme $u \in F_2$, il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que $u = (a,a,a)$. Comme $u \in F_1$, $3a = 0$ donc $a = 0$. Nous en déduisons $u = (0,0,0)$.

EXERCICE C18.105 — Soient (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) deux triplets de réels tels que $(a_1, b_1, c_1) \neq 0$ et $(a_2, b_2, c_2) \neq 0$.

1. Démontrer que

$$F_1 := \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \;:\; a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0\right\} \qquad \text{et} \qquad F_2 := \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \;:\; a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0\right\}$$

2. Les sous-espaces F_1 et F_2 sont-ils en somme directe?

DÉFINITION C18.106 (SOUS-ESPACES VECTORIELS DE SUPPLÉMENTAIRES DANS E)
Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E si

$$\forall\, u \in E \quad \exists!(u_1, u_2) \in F_1 \times F_2 \qquad u = u_1 + u_2$$

i.e. si tout élément de E s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F_1 et d'un élément de F_2.

EXEMPLE C18.107 — D'après C18.99 et C18.104 les ensembles

$$F_1 := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \;:\; x_1 + x_2 + x_3 = 0\right\} \qquad \text{et} \qquad F_2 = \left\{(a,a,a) \in \mathbf{R}^3 \;:\; a \in \mathbf{R}\right\}$$

forment des sous-espaces supplémentaires de $\mathbf{R}^3$.

EXEMPLE C18.108 — Soit $n \in \mathbf{N}^*$. L'ensemble $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ symétriques et l'ensemble $\mathscr{A}_n(\mathbf{R})$ des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ antisymétriques forment deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, d'après C18.102.

PROPOSITION C18.109 (CRITÈRE POUR QUE DEUX SOUS-ESPACES VECTORIELS SOIENT SUPPLÉMENTAIRES DANS E)
Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Les deux assertions suivantes sont équivalentes.

1. F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E.
2. $F_1 + F_2 = E$ et $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.

Démonstration —

$$\begin{array}{lcll} F_1 \text{ et } F_2 \text{ sont supplémentaires dans } E & \Longleftrightarrow & F_1 + F_2 = E \text{ et la somme } F_1 + F_2 \text{ est directe} & \\ & \Longleftrightarrow & F_1 + F_2 = E \text{ et la somme } F_1 \cap F_2 = \{0_E\} & [\text{C18.103}] \end{array}$$

Exercice C18.110 — Justifier que

$$F := \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x + y = 0\right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$ et en donner plusieurs supplémentaires dans $\mathbf{R}^2$.

Exercice C18.111 — Démontrer que

$$F := \left\{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \ : \ x - y = z + t = 0\right\} \qquad \text{et} \qquad G = \mathrm{Vect}\,(u := (1,1,1,1)\,,\, v := (1,2,3,4))$$

sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbf{R}^4$.

Théorème C18.112 (existence d'un supplémentaire pour un sous-espace vectoriel de E)
Tout sous-espace vectoriel de E possède un supplémentaire dans E.

Remarque C18.113 — Le théorème C18.112 sera démontré, dans le prochain chapitre, dans le cas où E possède une famille génératrice finie, par voie algorithmique. Dans le cas général, il peut être démontré en appliquant le lemme de Zorn, mais sera admis.

Exercice C18.114 — Déterminer un sous-espace supplémentaire de

$$F := \mathrm{Vect}\left(1, X^2, X^4\right)$$

dans $\mathbf{R}_5[X]$.

Exercice C18.115 — On considère le sous-espace vectoriel

$$F := \left\{ f \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbf{R}) \ : \ \int_0^1 f(t) \, \mathrm{d}\, t = 0 \right\}$$

de $\mathscr{C}^0([0,1], \mathbf{R})$. En donner un supplémentaire dans $\mathscr{C}^0([0,1], \mathbf{R})$.