Chapitre n°17
Analyse asymptotique

§ 1. Relations de comparaison : cas des fonctions

Définition C17.1 (voisinage d'un point de $\overline{\mathbf{R}}$)

1) Un voisinage V d'un point $a \in \mathbf{R}$ est une partie de $\mathbf{R}$ telle que

$$\exists \delta > 0 \quad]a-\delta, a+\delta[\subset V$$

2) Un voisinage V de $+\infty$ est une partie de $\mathbf{R}$ telle que

$$\exists A \in \mathbf{R} \quad]A, +\infty[\subset V$$

3) Un voisinage V de $-\infty$ est une partie de $\mathbf{R}$ telle que

$$\exists B \in \mathbf{R} \quad]-\infty, B[\subset V$$

Notation C17.2 — Si $a \in \overline{\mathbf{R}}$ alors $\mathscr{V}(a)$ désigne l'ensemble des voisinages de a.

Proposition C17.3 (propriétés des voisinages d'un point de $\overline{\mathbf{R}}$)

Soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$.

1) $\mathbf{R} \in \mathscr{V}(a)$
2) Si $n \in \mathbf{N}^*$ et $(V_1, \ldots, V_n) \in \mathscr{V}(a)^n$ alors $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} V_i \in \mathscr{V}(a)$.
3) Si I est un ensemble non vide et $(V_i)_{i \in I} \in \mathscr{V}(a)^I$ alors $\displaystyle\bigcup_{i \in I} V_i \in \mathscr{V}(a)$.

Remarque C17.4 — Une intersection quelconque de voisinages d'un point $a \in \overline{\mathbf{R}}$ n'est pas nécessairement un voisinage de a. Par exemple, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$ est un voisinage de 0 mais $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[= \{0\}$ n'est pas un voisinage de 0.

Notation C17.5 — Si $a \in \mathbf{R}$ et $V \in \mathscr{V}(a)$ on pose $V^* := V \setminus \{a\}$ (voisinage épointé de a).

Définition C17.6 (germe des fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbf{R}}$)

1) Soit $a \in \mathbf{R}$. On pose

$$\mathscr{G}_a := \left(\bigcup_{V \in \mathscr{V}(a)} \{f \in \mathbf{R}^V \, : \, f \text{ est continue en } a\} \right) \cup \left(\bigcup_{V \in \mathscr{V}(a)} \left\{f \in \mathbf{R}^{V^*} \, : \, f \text{ ne possède pas de limite finie en } a \right\} \right)$$

Un élément de $\mathscr{G}_a$ est donc soit une fonction définie sur un voisinage de a et continue en a, soit une fonction définie sur un voisinage épointé de a qui n'est pas prolongeable par continuité en a.

2) Soit $a \in \{-\infty, +\infty\}$. On pose

$$\mathscr{G}_a := \bigcup_{V \in \mathscr{V}(a)} \mathbf{R}^V$$

Un élément de $\mathscr{G}_a$ est donc une fonction définie sur un voisinage de a.

Remarque C17.7 — Soient $a \in \overline{\mathbf{R}}$. Pour tout $(f, g) \in \mathscr{G}_a^2$, on définit la fonction $f+g$ par

$$f+g \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x)+g(x) \end{array} \right.$$

Si $a \in \{-\infty, +\infty\}$ ou $f(x) \times g(x)$ n'a pas de limite finie quand x tend vers $a \in \mathbf{R}$ alors on définit la fonction $f \times g$ par

$$f \times g \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \times g(x) \end{array} \right.$$

Sinon $f(x) \times g(x)$ a une limite $\ell \in \mathbf{R}$ quand x tend vers $a \in \mathbf{R}$ et on pose

$$f \times g \left| \begin{array}{ccc} \left(\mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g\right) \cup \{a\} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} f(x) \times g(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell & \text{si } x = a \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Définition C17.8 (Relation de domination O en un point de $\overline{\mathbf{R}}$)
Soient $a \in \overline{\mathbf{R}}$ et $(f, g) \in \mathscr{G}_a^2$. On dit que <u>$g$ domine f au voisinage de a</u> et on note $f(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{O}\left(g(x)\right)$ ou $f \underset{a}{=} \mathrm{O}\left(g\right)$ si

$$\exists V \in \mathscr{V}(a) \quad \exists b \in \mathbf{R}^V \qquad \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in V \cap \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g \quad f(x) = b(x) g(x) \\ \text{et} \\ b \text{ est bornée sur } V \end{array} \right.$$

Définition C17.9 (Relation de négligeabilité o en un point de $\overline{\mathbf{R}}$)
Soient $a \in \overline{\mathbf{R}}$ et $(f, g) \in \mathscr{G}_a^2$. On dit que <u>$f$ est négligeable par rapport à g au voisinage de a</u> et on note $f(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}\left(g(x)\right)$ ou $f \underset{a}{=} \mathrm{o}\left(g\right)$ si

$$\exists V \in \mathscr{V}(a) \quad \exists \varepsilon \in \mathbf{R}^V \qquad \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in V \cap \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g \quad f(x) = \varepsilon(x) g(x) \\ \text{et} \\ \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0 \end{array} \right.$$

Notation C17.10 — Soient $a \in \overline{\mathbf{R}}$ et $(f, g, h) \in \mathscr{G}_a^3$.
1) On écrira souvent $f(x) \underset{x \to a}{=} g(x) + \mathrm{O}\left(h(x)\right)$ pour signifier $f(x) - g(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{O}\left(h(x)\right)$
2) De manière analogue, on écrira souvent $f(x) \underset{x \to a}{=} g(x) + \mathrm{o}\left(h(x)\right)$ pour signifier $f(x) - g(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}\left(h(x)\right)$

Définition C17.11 (Relation d'équivalence $\sim$ en un point de $\overline{\mathbf{R}}$)
Soient $a \in \overline{\mathbf{R}}$ et $(f, g) \in \mathscr{G}_a^2$. On dit que <u>$f$ est équivalente à g au voisinage de a</u> et on note $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ ou $f \underset{a}{\sim} g$ si

$$\exists V \in \mathscr{V}(a) \quad \exists \varepsilon \in \mathbf{R}^V \qquad \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in V \cap \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g \quad f(x) = (1 + \varepsilon(x)) g(x) \\ \text{et} \\ \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0 \end{array} \right.$$

Proposition C17.12 (Lien fondamental entre $\sim$ et o)
Soient $a \in \overline{\mathbf{R}}$ et $(f, g) \in \mathscr{G}_a^2$.

$$f \underset{a}{\sim} g \iff f - g \underset{a}{=} \mathrm{o}\left(g\right)$$

Proposition C17.13 (Expressions des relations de Landau à l'aide de quotients)
Soient $a \in \overline{\mathbf{R}}$ et $(f, g) \in \mathscr{G}_a^2$. On suppose que

$$\exists V \in \mathscr{V}(a) \quad \forall x \in V^* \cap \mathscr{D}_g \qquad g(x) \neq 0$$

1) $f \underset{a}{=} \mathrm{O}\left(g\right)$ si et seulement s'il existe $U \in \mathscr{V}(a)$ tel que $U \subset V$ et la fonction $\dfrac{f_{|U^* \cap \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g}}{g_{|U^* \cap \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g}}$ est bornée sur $U^* \cap \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g$
2) $f \underset{a}{=} \mathrm{o}\left(g\right)$ si et seulement si $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 0$
3) $f \underset{a}{\sim} g$ si et seulement si $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 1$

Exemple C17.14 — Soit $(p,q)\in\mathbf{N}^2$ tel que $p<q$, $(a_p,\dots,a_q)\in\mathbf{R}^{q-p+1}$ tels que $a_p\neq 0$ et $a_q\neq 0$. Alors

$$\sum_{k=p}^{q} a_k x^k \underset{x\to 0}{\sim} a_p x^p \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=p}^{q} a_k x^k \underset{x\to+\infty}{\sim} a_q x^q$$

Exemple C17.15 — Soit $n\in\mathbf{N}^*$. Alors

$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + \mathrm{O}\left(x^{n+1}\right)$$

Proposition C17.16 (Propriétés de la relation O)
Soit $a\in\overline{\mathbf{R}}$.
1) La relation $f \underset{a}{=} \mathrm{O}(g)$ sur $\mathcal{G}_a$ est réflexive et transitive.
2) Soit $(f_1,f_2,g)\in\mathcal{G}_a^3$ tel que $f_1 \underset{a}{=} \mathrm{O}(g)$ et $f_2 \underset{a}{=} \mathrm{O}(g)$. Alors $f_1+f_2 \underset{a}{=} \mathrm{O}(g)$.
3) Soit $(f_1,f_2,g_1,g_2)\in\mathcal{G}_a^4$ tel que $f_1 \underset{a}{=} \mathrm{O}(g_1)$ et $f_2 \underset{a}{=} \mathrm{O}(g_2)$. Alors $f_1f_2 \underset{a}{=} \mathrm{O}(g_1g_2)$.
4) Soient $(f,g)\in\mathcal{G}_a^2$ tel que $f \underset{a}{=} \mathrm{O}(g)$, $b\in\mathbf{R}$ et $h\in\mathcal{G}_b$ telle que $h(b)=a$. Si $f\circ h$ et $g\circ h$ sont définies au voisinage de b alors $f\circ h \underset{b}{=} \mathrm{O}(g\circ h)$.

Exercice C17.17 — Soient $a\in\overline{\mathbf{R}}$ et $(f_1,f_2,g_1,g_2)\in\mathcal{G}_a^4$. Démontrer que $f_1 \underset{a}{=} \mathrm{O}(g_1)$ et $f_2 \underset{a}{=} \mathrm{O}(g_2)$ n'entraîne pas nécessairement $f_1+f_2 \underset{a}{=} \mathrm{O}(g_1+g_2)$.

Proposition C17.18 (Propriétés de la relation o)
Soit $a\in\overline{\mathbf{R}}$.
1) La relation $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(g)$ sur $\mathcal{G}_a$ est transitive.
2) Soit $(f,g)\in\mathcal{G}_a^2$ tel que $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(g)$. Alors $f \underset{a}{=} \mathrm{O}(g)$.
3) Soit $(f,g,h)\in\mathcal{G}_a^3$ tel que $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(g)$ et $g \underset{a}{=} \mathrm{O}(h)$. Alors $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(h)$.
4) Soit $(f_1,f_2,g)\in\mathcal{G}_a^3$ tel que $f_1 \underset{a}{=} \mathrm{o}(g)$ et $f_2 \underset{a}{=} \mathrm{o}(g)$. Alors $f_1+f_2 \underset{a}{=} \mathrm{o}(g)$.
5) Soient $(f,g)\in\mathcal{G}_a^2$ tel que $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(g)$, $b\in\mathbf{R}$ et $h\in\mathcal{G}_b$ telle que $h(b)=a$. Si $f\circ h$ et $g\circ h$ sont définies au voisinage de b alors $f\circ h \underset{b}{=} \mathrm{o}(g\circ h)$.

Exercice C17.19 — Soient $a\in\overline{\mathbf{R}}$ et $(f_1,f_2,g_1,g_2)\in\mathcal{G}_a^4$. Démontrer que $f_1 \underset{a}{=} \mathrm{o}(g_1)$ et $f_2 \underset{a}{=} \mathrm{o}(g_2)$ n'entraîne pas nécessairement $f_1+f_2 \underset{a}{=} \mathrm{o}(g_1+g_2)$.

Proposition C17.20 (Propriétés de la relation ∼)
Soit $a\in\overline{\mathbf{R}}$.
1) La relation $f \underset{a}{\sim} g$ sur $\mathcal{G}_a$ est une relation d'équivalence.
2) Soit $(f_1,f_2,g_1,g_2)\in\mathcal{G}_a^4$ tel que $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$. Alors $f_1f_2 \underset{a}{\sim} g_1g_2$.
3) Soit $(f,g)\in\mathcal{G}_a^2$. Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $\frac{1}{f}$ est définie au voisinage de a, alors $\frac{1}{g}$ est définie au voisinage de a et $\frac{1}{f} \underset{a}{\sim} \frac{1}{g}$.
4) Soient $(f,g)\in\mathcal{G}_a^2$ tel que $f \underset{a}{\sim} g$, $b\in\mathbf{R}$ et $h\in\mathcal{G}_b$ telle que $h(b)=a$. Si $f\circ h$ et $g\circ h$ sont définies au voisinage de b alors $f\circ h \underset{b}{\sim} g\circ h$.

Exercice C17.21 — Soient $a\in\overline{\mathbf{R}}$ et $(f_1,f_2,g_1,g_2)\in\mathcal{G}_a^4$. Démontrer que $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ n'entraîne pas nécessairement $f_1+f_2 \underset{a}{\sim} g_1+g_2$.

Exercice C17.22 — Soient $a\in\overline{\mathbf{R}}$ et $(f,g)\in\mathcal{G}_a^2$. Démontrer que $f \underset{a}{\sim} g$ n'entraîne pas nécessairement $\exp\circ f \underset{a}{\sim} \exp\circ g$.

MÉTHODE C17.23 — Si $a \in \mathbf{R}$ et $f \in \mathscr{G}_a$, alors étudier f au voisinage de a revient à étudier la fonction $h \longmapsto f(a+h)$ au voisinage de 0. Le changement de variable

$$x = a + h \quad , \quad h \to 0$$

permet de déplacer le lieu de l'étude d'un voisinage de a à un voisinage de 0, pour lequel nous disposerons de nombreux résultats.

EXERCICE C17.24 — Donner un équivalent simple de $f(x) := \cos(x)$ lorsque x tend vers $\frac{\pi}{2}$.

EXERCICE C17.25 — Donner un équivalent simple de $f(x) := \ln\left(x^2 - 2x - 2\right)$ lorsque x tend vers 3.

PROPOSITION C17.26 (REFORMULATION DES CROISSANCES COMPARÉES)
Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

$$x^\beta \underset{x \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(e^{\alpha x}\right) \quad , \quad \ln^\alpha(x) \underset{x \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(x^\beta\right) \quad , \quad |\ln(x)|^\alpha \underset{x \to 0^+}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$$

EXERCICE C17.27 — Donner un équivalent simple de $f(x) := \dfrac{\ln^6(x) - 2\sqrt{x}}{\mathrm{ch}(2x) - x^3}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

EXERCICE C17.28 — Donner un équivalent simple de $f(x) := \ln(\mathrm{ch}(x)) - 2\sqrt{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

PROPOSITION C17.29 (OBTENTION D'UN ÉQUIVALENT PAR ENCADREMENT)
Soient $a \in \overline{\mathbf{R}}$ et $(f, g, h) \in \mathscr{G}_a^3$ tels que $f \leqslant g \leqslant h$ au voisinage de a et $f \underset{a}{\sim} h$. Alors $g \underset{a}{\sim} h$.

EXERCICE C17.30 — Démontrer que, pour tout $x > 0$

$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

et en déduire un équivalent de $f(x) := \ln(1+x) - x$ lorsque x tend vers 0^+.

PROPOSITION C17.31 (PROPRIÉTÉS CONSERVÉES PAR ÉQUIVALENCE)
Soient $a \in \overline{\mathbf{R}}$ et $(f, g) \in \mathscr{G}_a^2$ tels que $f \underset{a}{\sim} g$.

1) Si f possède une limite $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$ en a, alors $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.
2) Si $f \geqslant 0$ au voisinage de a alors $g \geqslant 0$ au voisinage de a.
3) Si $f > 0$ au voisinage de a alors $g > 0$ au voisinage de a.

EXERCICE C17.32 — Soient $(a, \ell) \in \overline{\mathbf{R}}^2$ et $(f, g) \in \mathscr{G}_a^2$. Démontrer que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ et $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ n'entraîne pas nécessairement $f \underset{a}{\sim} g$.

§ 2. DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS : FONDEMENTS

DÉFINITION C17.33 (DÉVELOPPEMENT LIMITÉ À L'ORDRE n EN UN POINT RÉEL a)
Soient I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction, $a \in I$ et $n \in \mathbf{N}$. On dit que f possède un développement limité (DL) à l'ordre n au point a (abrégé en « f possède un $\mathrm{DL}_n(a)$ ») si

$$\exists (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^{n+1} \quad f(x) \underset{x \to a}{=} \underbrace{\alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \ldots + \alpha_n(x-a)^n}_{\sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k} + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

Exemple C17.34 — $\ln(x) \underset{x\to 1}{=} x-1+\mathrm{o}(x-1)$

Exemple C17.35 — Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right)$.

Proposition C17.36 (unicité d'un DL)
Soient I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction, $a \in I$ et $n \in \mathbf{N}$. Si $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ et $(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ vérifient

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k\,(x-a)^k + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right) \qquad \text{et} \qquad f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \beta_k\,(x-a)^k + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

alors, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\alpha_k = \beta_k$.

Proposition C17.37 (troncature d'un DL)
Soient I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction, $a \in I$ et $n \in \mathbf{N}$. Supposons que f possède un $\mathrm{DL}_n(a)$, i.e. qu'il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ tel que

$$(\star) \qquad f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k\,(x-a)^k + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

Alors, pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, f possède un $\mathrm{DL}_p(a)$ obtenu en tronquant $(\star)$ à l'ordre p, i.e.

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{p} \alpha_k\,(x-a)^k + \mathrm{o}\left((x-a)^p\right)$$

Proposition C17.38 (parité et DL)
Soient I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ centré en 0, $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction et $n \in \mathbf{N}^*$. Supposons que f possède un $\mathrm{DL}_n(0)$, i.e. qu'il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ tel que $f(x) \underset{x\to a}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\,x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right)$.

1) Si la fonction f est paire, alors les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ d'indices impairs sont nuls et donc

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \alpha_{2k}\,x^{2k} + \mathrm{o}\left(x^n\right)$$

2) Si la fonction f est impaire, alors les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ d'indices pairs sont nuls et donc

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \alpha_{2k+1}\,x^{2k+1} + \mathrm{o}\left(x^n\right)$$

Proposition C17.39 (translation de l'étude d'un DL en un point réel au point 0)
Soient I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction, $a \in I$ et $n \in \mathbf{N}$.

1) Supposons que la fonction $h \longmapsto f(a+h)$ possède un $\mathrm{DL}_n(0)$, i.e. qu'il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ tel que

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k\,h^k + \mathrm{o}\left(h^n\right)$$

Alors la fonction f possède un $\mathrm{DL}_n(a)$, donné par $f(x) \underset{x\to a}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\,(x-a)^k + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$

2) Supposons que la fonction f possède un $\mathrm{DL}_n(a)$, i.e. qu'il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ tel que

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k\,(x-a)^k + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

Alors la fonction $h \longmapsto f(a+h)$ possède un $\mathrm{DL}_n(0)$, donné par $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\,h^k + \mathrm{o}\left(h^n\right)$

REMARQUE C17.40 — Soient $a \in \overline{\mathbf{R}}$ et $f \in \mathcal{G}_a$. Alors

$$f \underset{a}{=} \mathrm{o}(1) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$$

PROPOSITION C17.41 (DL_0 ET CONTINUITÉ)
Soient I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction, $a \in I$.
1) La fonction f admet possède un $\mathrm{DL}_0(a)$ si et seulement si f est continue en a.
2) Si la fonction f est continue en a alors

$$f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + \mathrm{o}(1)$$

PROPOSITION C17.42 (DL_1 ET DÉRIVABILITÉ)
Soient I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction, $a \in I$.
1) La fonction f possède un $\mathrm{DL}_1(a)$ si et seulement si f est dérivable en a.
2) Si la fonction f est dérivable en a alors

$$f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \mathrm{o}(x-a)$$

EXERCICE C17.43 — Justifier que la fonction

$$f : x \longmapsto \ln(\cos(x) + x)$$

possède un $\mathrm{DL}_1(0)$, puis donner ce DL. Qu'en déduire ?

EXERCICE C17.44 — Soient $a \in \mathbf{R}$, $V \in \mathcal{V}(a)$ et $f : V \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbf{R}$. On suppose qu'il existe des réels α_0, α_1 tels que

$$f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{=} \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \mathrm{o}(x-a)$$

Justifier que la fonction f est prolongeable par continuité en a et que ce prolongement est dérivable en a.

EXERCICE C17.45 — Rappeler le résultat sur le comportement asymptotique de $\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ lorsque x tend vers 0 et en déduire que la fonction cosinus possède un $\mathrm{DL}_2(0)$.

EXERCICE C17.46 — Démontrer que la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

possède un $\mathrm{DL}_2(0)$, mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

PROPOSITION C17.47 (DL, ÉQUIVALENT ET SIGNE)
Soient I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction, $a \in I$ et $n \in \mathbf{N}$. Supposons que f possède un $\mathrm{DL}_n(a)$ de partie régulière non nulle, i.e. qu'il existe $n+1$ réels $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ <u>non tous nuls</u> tels que

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k + \mathrm{o}\big((x-a)^n\big)$$

Alors l'entier $r := \min\{k \in [\![0, n]\!] \; : \; \alpha_k \neq 0\}$ est bien défini et

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} \alpha_r (x-a)^r$$

Ainsi, il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que, pour tout $x \in I \cap V$, $f(x)$ et $\alpha_r(x-a)^r$ ont même signe.

Exercice C17.48 — Soient I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ et $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère.

1) On suppose qu'il existe des réels $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \neq 0$ tels que

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \alpha_0 + \alpha_1 (x-a) + \alpha_2 (x-a)^2 + \mathrm{o}\left((x-a)^2\right)$$

Esquisser l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$ autour du point de coordonnées $(a, f(a))$.

2) Considérer de nouveau la problématique de la question 1, en supposant cette fois qu'il existe des réels $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_3 \neq 0$ tels que

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \alpha_0 + \alpha_1 (x-a) + \alpha_3 (x-a)^3 + \mathrm{o}\left((x-a)^3\right)$$

§ 3. Formule de Taylor-Young

Lemme C17.49 (Inégalité des accroissements finis généralisée)
Soient a et b des réels tels que $a < b$, f et g des fonctions définies, continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. Si

$$\forall x \in]a,b[\quad \left|f'(x)\right| \leqslant g'(x)$$

alors $\left|f(b) - f(a)\right| \leqslant g(b) - g(a)$.

Proposition C17.50 (Primitivation d'un DL)
Soient I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction, $a \in I$ et $n \in \mathbf{N}$. Supposons que

(H1) f est dérivable sur I

(H2) f' possède un $\mathrm{DL}_n(a)$, i.e. qu'il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ tel que

$$f'(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

Alors f possède un $\mathrm{DL}_{n+1}(a)$ donné par

$$f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{k+1} (x-a)^{k+1} + \mathrm{o}\left((x-a)^{n+1}\right)$$

Définition C17.51 (Polynômes de Taylor associés à une fonction)
Soient I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$, $a \in I$, $n \in \mathbf{N}$ et $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction admettant une dérivée d'ordre n au point a. Le polynôme de Taylor d'ordre n de f au point a est défini par

$$T_{f,a,n} := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k$$

Remarque C17.52 — Soit $P \in \mathbf{R}[X] \setminus \left\{0_{\mathbf{K}[X]}\right\}$ et

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{\deg(P)} [P]_k \, x^k \end{array} \right.$$

la fonction polynomiale associée à P. D'après la formule de Taylor exacte pour les polynômes, pour tout $n \geqslant \deg(P)$, $T_{f,n,a}$ coïncide avec P.

Exemple C17.53 — Pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\exp^{(k)}(0) = \exp(0) = 1$ et donc le polynôme de Taylor d'ordre n de la fonction exponentielle en 0 est

$$T_{\exp,0,n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$$

Théorème C17.54 (formule de Taylor-Young)
Soient I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$, $f: I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction, $a \in I$ et $n \in \mathbf{N}$. Supposons que
(H) la fonction f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.
Alors f possède un $\mathrm{DL}_n(a)$ donné par

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}_{T_{f,a,n}(x)} + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

Démonstration — Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $\mathscr{P}(n)$ le prédicat défini par

$$\mathscr{P}(n) \quad : \quad \forall f \in \mathscr{C}^n(I, \mathbf{R}) \quad f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

- *Initialisation à $n=0$.* L'assertion $\mathscr{P}(0)$ s'écrit

$$\forall f \in \mathscr{C}^0(I, \mathbf{R}) \quad f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + \mathrm{o}(1)$$

Soit $f \in \mathscr{C}^0(I, \mathbf{R})$. Par continuité de f en a, $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$. Nous en déduisons $f(x) - f(a) \xrightarrow[x \to a]{} 0$, i.e. $f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + \mathrm{o}(1)$.
- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que l'assertion $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Soit $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbf{R})$. Alors la fonction f est dérivable sur I et $f' \in \mathscr{C}^n(I, \mathbf{R})$. D'après l'hypothèse de récurrence appliquée à la fonction f'

$$\begin{aligned} f'(x) & \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(f'\right)^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right) \\ & \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right) \end{aligned}$$

Par intégration d'un DL, nous en déduisons

$$\begin{aligned} f(x) & \underset{x \to a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} + \mathrm{o}\left((x-a)^{n+1}\right) \\ & \underset{x \to a}{=} f(a) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathrm{o}\left((x-a)^{n+1}\right) \\ & \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathrm{o}\left((x-a)^{n+1}\right) \end{aligned}$$

Q.E.D.

Exercice C17.55 — Soit $n \in \mathbf{N}$.
1) Justifier que la fonction exp admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ et le calculer.
2) En déduire que la fonction ch possède un $\mathrm{DL}_n(0)$ et le calculer.

Exercice C17.56 — 1) Justifier que la fonction sin admet un $\mathrm{DL}_3(0)$ et le calculer.
2) En déduire que la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc}]-\pi, \pi[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin(x)} & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

est dérivable sur $]-\pi, \pi[$.
3) La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\pi, \pi[$?

§ 4. Développements limités usuels

Dans le tableau ci-dessous, n désigne un entier naturel non nul et α un réel.

Développements limités	Indications pour retrouver les développements limités
$\dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right)$	Si $x \neq 1$, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$.
$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right)$	Composition par $x \longmapsto -x$ à droite dans le $\mathrm{DL}_{n-1}(0)$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$ et primitivation.
$\mathrm{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2k+1} \cdot x^{2k+1} + \mathrm{o}\left(x^{2n+2}\right)$	Composition par $x \longmapsto -x^2$ à droite dans le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$ et primitivation.
$\exp(x) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} + \mathrm{o}\left(x^n\right)$	Formule de Taylor-Young et, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\exp^{(k)} = \exp$.
$\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right)$	ch est la partie paire de exp.
$\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n+2}\right)$	sh est la partie impaire de exp.
$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^{2k} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right)$	Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\cos(x) = \mathrm{ch}(ix)$.
$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} + \mathrm{o}\left(x^{2n+2}\right)$	Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\sin(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(ix)}{i}$.
$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \dfrac{x^3}{3} + \mathrm{o}\left(x^3\right)$	Par dérivabilité $\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \mathrm{o}(x)$, par produit $\tan^2(x) \underset{x\to 0}{=} x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)$, puis primitivation avec $\tan' = 1 + \tan^2$.
$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\prod_{\ell=0}^{k-1}(\alpha-\ell)}{k!} \cdot x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right)$	Formule de Taylor-Young et, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, la dérivée k-ième de $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ est $x \longmapsto \left(\displaystyle\prod_{\ell=0}^{k-1}(\alpha-\ell)\right) \cdot (1+x)^{\alpha-k}$ (récurrence sur k)

Exercice C17.57 — Donner le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \longmapsto \sqrt{1+x}$ lorsque au voisinage de 0.

Exercice C17.58 — Soit $n \in \mathbf{N}$. Justifier que la fonction Arcsin possède un $\mathrm{DL}_n(0)$ et le calculer.

Démonstration — (1) Pour tout $x \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ donc $\displaystyle\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^n \cdot \frac{x}{1-x}$. Comme $\displaystyle\frac{x}{1-x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right)$$

(2) Comme $-x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ nous pouvons effectuer la substitution $x \leftarrow -x$ dans le DL $\displaystyle\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} x^k + \mathrm{o}\left(x^{n-1}\right)$ pour obtenir

$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cdot x^k + \mathrm{o}\left(x^{n-1}\right)$$

Par primitivation, il vient $\displaystyle\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \ln(1+0) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} \cdot x^{k+1} + \mathrm{o}\left(x^n\right)$ qui se réécrit

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right)$$

(3) Comme $-x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ nous pouvons effectuer la substitution $x \leftarrow -x^2$ dans le DL $\displaystyle\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right)$ pour obtenir

$$\frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot x^{2k} + \mathrm{o}\left(x^{2n}\right)$$

Par primitivation, il vient $\displaystyle\mathrm{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{Arctan}(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cdot x^{2k+1} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right)$ qui se réécrit

$$(\star) \qquad \mathrm{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cdot x^{2k+1} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right)$$

La fonction Arctan est de classe $\mathscr{C}^{2n+2}$, donc possède un DL à l'ordre $2n+2$ en 0 d'après la formule de Taylor-Young. Comme elle est impaire, le coefficient de degré $2n+2$ de la partie principale de son DL à l'ordre $2n+2$ est nul. Par unicité et troncature d'un DL, nous déduisons alors de $(\star)$ que

$$\mathrm{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cdot x^{2k+1} + \mathrm{o}\left(x^{2n+2}\right)$$

(4) La fonction exp est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbf{R}$, donc possède un DL à l'ordre n en 0 d'après la formule de Taylor-Young. Ce dernier est en outre donné par $\displaystyle\exp(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right)$. Comme, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\exp^{(k)}(0) = \exp(0) = 1$ nous obtenons

$$\exp(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathrm{o}\left(x^n\right)$$

(5) Comme $-x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ nous pouvons effectuer la substitution $x \leftarrow -x$ dans le DL

$$\exp(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1}{k!} \cdot x^k + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right)$$

pour obtenir

$$\exp(-x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot x^k + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right)$$

En additionnant membre-à-membre les deux DL précédents, il vient

$$2 \cdot \mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1+(-1)^k}{k!} \cdot x^k + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right)$$

Comme $1+(-1)^k$ vaut 2 si k est pair et 0 si k est impair, nous en déduisons $2\cdot \mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{(2k)!}\cdot x^{2k} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right)$ puis

$$\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!}\cdot x^{2k} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right)$$

(6) Comme $-x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ nous pouvons effectuer la substitution $x \leftarrow -x$ dans le DL

$$\exp(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{1}{k!}\cdot x^{k} + \mathrm{o}\left(x^{2n+2}\right)$$

pour obtenir

$$\exp(-x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k!}\cdot x^{k} + \mathrm{o}\left(x^{2n+2}\right)$$

En soustrayant membre-à-membre les deux DL précédents, il vient

$$2\cdot \mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{1-(-1)^k}{k!}\cdot x^{k} + \mathrm{o}\left(x^{2n+2}\right)$$

Comme $1-(-1)^k$ vaut 0 si k est pair et 2 si k est impair, nous en déduisons $2\cdot \mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{(2k+1)!}\cdot x^{2k+1} + \mathrm{o}\left(x^{2n+2}\right)$ puis

$$\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)!}\cdot x^{2k+1} + \mathrm{o}\left(x^{2n+2}\right)$$

(7) La fonction cos est de classe $\mathscr{C}^{2n+1}$ sur $\mathbf{R}$, donc possède un DL à l'ordre $2n+1$ en 0 d'après la formule de Taylor-Young. Ce dernier est en outre donné par

$$(\star) \quad \cos(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!}\cdot x^{k} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right)$$

Au moyen d'un raisonnement par récurrence, nous démontrons que, pour tout $k\in\mathbf{N}$

$$\forall\, x\in\mathbf{R} \quad \cos^{(k)}(x) = \cos\left(x + k\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

Comme, pour tout $k\in\mathbf{N}$

$$\cos^{(k)}(0) = \cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{ik\frac{\pi}{2}}\right) = \mathrm{Re}\left(i^k\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ impair} \\ i^k & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases}$$

nous déduisons de $(\star)$ que

$$\begin{aligned} \cos(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{i^{2k}}{(2k)!}\cdot x^{k} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\cdot x^{k} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right) \end{aligned}$$

(8) La fonction sin est de classe $\mathscr{C}^{2n+2}$ sur $\mathbf{R}$, donc possède un DL à l'ordre $2n+2$ en 0 d'après la formule de Taylor-Young. Ce dernier est en outre donné par

$$(\star) \quad \sin(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!}\cdot x^{k} + \mathrm{o}\left(x^{2n+2}\right)$$

Au moyen d'un raisonnement par récurrence, nous démontrons que, pour tout $k\in\mathbf{N}$

$$\forall\, x\in\mathbf{R} \quad \sin^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

Comme, pour tout $k\in\mathbf{N}$

$$\sin^{(k)}(0) = \sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{Im}\left(e^{ik\frac{\pi}{2}}\right) = \mathrm{Im}\left(i^k\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ pair} \\ i^{k-1} & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

nous déduisons de $(\star)$ que

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{i^{2k}}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} + \mathrm{o}\left(x^{2n+2}\right)$$
$$\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} + \mathrm{o}\left(x^{2n+2}\right)$$

(9) La fonction tan est dérivable en 0, donc elle possède un $\mathrm{DL}_1(0)$. Comme $\tan(0) = 0$ et $\tan'(0) = 1$, ce $\mathrm{DL}_1(0)$ est donné par

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \mathrm{o}(x)$$

Nous en déduisons

$$\tan^2(x) \underset{x\to 0}{=} x^2 + 2\cdot x \cdot \mathrm{o}(x) + \mathrm{o}(x)\cdot \mathrm{o}(x)$$
$$\underset{x\to 0}{=} x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)$$

puis $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)$. Par primitivation

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} \tan(0) + x + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}\left(x^3\right)$$
$$\underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}\left(x^3\right)$$

(10) La fonction $f : x \longmapsto (1+x)^\alpha = e^{\alpha\cdot\ln(1+x)}$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $]-1,1[$, donc possède un DL à l'ordre n en 0 d'après la formule de Taylor-Young. Ce dernier est en outre donné par

$$(\star) \quad (1+x)^\alpha = f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right)$$

Au moyen d'un raisonnement par récurrence, nous démontrons que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$

$$\forall\, x \in]-1,1[\quad f^{(k)}(x) = \alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(k-1))\cdot(1+x)^{\alpha-k} = \left(\prod_{\ell=0}^{k-1}(\alpha-\ell)\right)\cdot(1+x)^{\alpha-k}$$

Puisque $f(0) = 1$ et, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $f^{(k)}(0) = \prod_{\ell=0}^{k-1}(\alpha-\ell)$, nous déduisons de $(\star)$ que

$$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\prod_{\ell=0}^{k-1}(\alpha-\ell)}{k!} \cdot x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right)$$

Q.E.D.

§ 5. Opérations sur les développements limités

Proposition C17.59 (combinaison linéaire de deux DL)
Soient λ_1, λ_2 deux réels, f_1, f_2 deux fonctions définies au voisinage d'un même réel a et $n \in \mathbf{N}^*$. On suppose que f_1 et f_2 possèdent un $\mathrm{DL}_n(a)$, i.e. qu'il existe $P_1 \in \mathbf{R}_n[X]$ et $P_2 \in \mathbf{R}_n[X]$ tels que

$$f_1(x) \underset{x\to a}{=} P_1(x-a) + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right) \qquad \text{et} \qquad f_2(x) \underset{x\to a}{=} P_2(x-a) + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

Alors la fonction $\lambda_1\cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2$, qui est définie au voisinage de a, possède un $\mathrm{DL}_n(a)$ donné par

$$\lambda_1\cdot f_1(x) + \lambda_2\cdot f_2(x) \underset{x\to a}{=} \lambda_1 \cdot P_1(x-a) + \lambda_2\cdot P_2(x-a) + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

La partie principale du précédent DL est donc $\lambda_1\cdot P_1 + \lambda_2\cdot P_2 \in \mathbf{R}_n[X]$.

Exemple C17.60 — $\ln(1+x) - \cos(x) \underset{x\to 0}{=} -1 + x + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{7}{24}\cdot x^4 + \mathrm{o}\left(x^4\right)$

Exemple C17.61 — $\sqrt{1+x}-2\operatorname{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{3}{2}\cdot x-\frac{x^2}{8}+\frac{35}{48}\cdot x^3+\mathrm{o}\left(x^3\right)$

Exercice C17.62 — Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}$ possède un $\mathrm{DL}_4(0)$ et l'expliciter.

Notation C17.63 — Si $n \in \mathbf{N}$, l'opérateur de troncature à l'ordre n est l'application τ_n définie par

$$\tau_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & \sum_{k=0}^{n} [P]_k \cdot X^k \end{array} \right.$$

Exemple C17.64 — $\tau_3\left(X^5-2X^4+3X^3-7X^2+12X+1\right)=3X^3-7X^2+12X+1$ et $\tau_3\left(X^2-7X+3\right)=X^2-7X+3$

Proposition C17.65 (produit de deux DL)
Soient f_1, f_2 deux fonctions définies au voisinage d'un même réel a et $n \in \mathbf{N}^*$. On suppose que f_1 et f_2 possèdent un $\mathrm{DL}_n(a)$, i.e. qu'il existe $P_1 \in \mathbf{R}_n[X]$ et $P_2 \in \mathbf{R}_n[X]$ tels que

$$f_1(x) \underset{x\to a}{=} P_1(x-a)+\mathrm{o}\left((x-a)^n\right) \qquad \text{et} \qquad f_2(x) \underset{x\to a}{=} P_2(x-a)+\mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

Alors la fonction $f_1 \cdot f_2$, qui est définie au voisinage de a, possède un $\mathrm{DL}_n(a)$ donné par

$$f_1(x)\cdot f_2(x) \underset{x\to a}{=} \left(\tau_n\left(P_1 \times P_2\right)\right)(x-a)+\mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

La partie principale du précédent DL est donc $\tau_n\left(P_1 \times P_2\right) \in \mathbf{R}_n[X]$.

Exemple C17.66 — $\sin(x)\cdot e^x \underset{x\to 0}{=} x+x^2+\frac{x^3}{3}+\mathrm{o}\left(x^3\right)$

Exemple C17.67 — $\ln(1+x)\cdot \operatorname{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^2}{2}+\frac{5}{6}\cdot x^3-\frac{x^4}{2}+\mathrm{o}\left(x^4\right)$

Exercice C17.68 — Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto \ln^2(1+x)$ possède un $\mathrm{DL}_4(0)$ et l'expliciter.

Proposition C17.69 (composition de deux DL en 0)
Soient f, g deux fonctions définies au voisinage d'un réel 0 et $n \in \mathbf{N}^*$. On suppose que
(H1) $f(0)=0$
(H2) f et g possèdent un $\mathrm{DL}_n(0)$, i.e. qu'il existe $P \in \mathbf{R}_n[X]$ et $Q \in \mathbf{R}_n[X]$ tels que

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} P(x)+\mathrm{o}\left(x^n\right) \qquad \text{et} \qquad g(x) \underset{x\to 0}{=} Q(x)+\mathrm{o}\left(x^n\right)$$

Alors la fonction $g \circ f$, qui est définie au voisinage de 0, possède un $\mathrm{DL}_n(0)$ donné par

$$g(f(0)) \underset{x\to 0}{=} \left(\tau_n(Q\circ P)\right)(x)+\mathrm{o}\left(x^n\right)$$

La partie principale du précédent DL est donc $\tau_n(Q \circ P) \in \mathbf{R}_n[X]$.

Exemple C17.70 — $\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}+\mathrm{o}\left(x^4\right)$

Exemple C17.71 — $(\cos(x))^{\sin(x)} \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^3}{2}+\mathrm{o}\left(x^5\right)$

Exercice C17.72 — Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto x\cdot(\operatorname{ch}(x))^{\frac{1}{x}}$ possède un $\mathrm{DL}_4(0)$ et l'expliciter.

PROPOSITION C17.73 (INVERSE D'UN DL EN 0)
Soient f une fonction définie au voisinage de 0 et $n \in \mathbf{N}^*$. On suppose que
(H1) $f(0) \neq 0$
(H2) f possède un $\mathrm{DL}_n(0)$, i.e. qu'il existe $P \in \mathbf{R}_n[X]$ tel que

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} P(x) + \mathrm{o}\left(x^n\right)$$

Alors la fonction $\dfrac{1}{f}$ qui est définie au voisinage de 0, possède un $\mathrm{DL}_n(0)$ donné par

$$\frac{1}{f(x)} \underset{x \to 0}{=} \left(\tau_n\left(\frac{1}{f(0)} \cdot \sum_{k=0}^{n}\left(1 - \frac{P}{f(0)}\right)^k\right)\right)(x) + \mathrm{o}\left(x^n\right)$$

La partie principale du précédent DL est donc $\tau_n\left(\dfrac{1}{f(0)} \cdot \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(1 - \dfrac{P}{f(0)}\right)^k\right) \in \mathbf{R}_n[X]$.

EXEMPLE C17.74 — $\dfrac{1}{\cos(x)} \underset{x \to 0}{=} 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5}{24} \cdot x^4 + \mathrm{o}\left(x^4\right)$

EXEMPLE C17.75 — $\dfrac{\sin(x) - 1}{\cos(x) + 1} \underset{x \to 0}{=} -\dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \mathrm{o}\left(x^2\right)$

EXERCICE C17.76 — Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x)}{\sin(x)}$ possède un $\mathrm{DL}_3(0)$ et l'expliciter.

§ 6. QUELQUES APPLICATIONS DES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

§ 6.1 RECHERCHES D'ÉQUIVALENTS

EXERCICE C17.77 — Déterminer un équivalent simple de $\ln(1+x) - \sin(x)$ lorsque x tend vers 0.

EXERCICE C17.78 — Déterminer un équivalent simple de $\mathrm{ch}(x) + \cos(x) - 2$ lorsque x tend vers 0.

EXERCICE C17.79 — Déterminer un équivalent simple de $\sqrt{1+x} - \dfrac{2}{2-x}$ lorsque x tend vers 0.

§ 6.2 ÉTUDES DE LIMITES

EXERCICE C17.80 — Étudier la limite éventuelle de $\dfrac{\sin(x) - x}{x^3}$ lorsque x tend vers 0.

EXERCICE C17.81 — Étudier la limite éventuelle de $\dfrac{1 + \ln(1+x) - e^x}{1 - \cos(x)}$ lorsque x tend vers 0.

EXERCICE C17.82 — Étudier la limite éventuelle de $\dfrac{2x}{\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)}$ lorsque x tend vers 0.

EXERCICE C17.83 — Soient a et b des réels strictement positifs. Étudier la limite éventuelle de $\left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ lorsque x tend vers 0.

EXERCICE C17.84 — Étudier la limite éventuelle de $\dfrac{\exp(\sin(x))-\exp(\tan(x))}{\sin(x)-\tan(x)}$ lorsque x tend vers 0.

EXERCICE C17.85 — Étudier la limite éventuelle de $\dfrac{2}{\sin^2(x)}-\dfrac{1}{1-\cos(x)}$ lorsque x tend vers 0.

EXERCICE C17.86 — Étudier la limite éventuelle de $\dfrac{2}{\sin^2(x)}-\dfrac{1}{1-\cos(x)}$ lorsque x tend vers 0.

EXERCICE C17.87 — Étudier la limite éventuelle de $\dfrac{\sin(x)-\cos(x)}{1-\tan(x)}$ lorsque x tend vers $\dfrac{\pi}{4}$.

§ 6.3 ÉTUDES DE FONCTIONS AU VOISINAGE D'UN POINT RÉEL

EXERCICE C17.88 — Soit la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{1+e^x} \end{array} \right.$$

On munit le plan d'un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ et on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

1) Démontrer que la fonction f possède un $\mathrm{DL}_3(0)$ et l'expliciter.
2) En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente $\mathscr{T}_0$ au point d'abscisse 0, dont on précisera une l'équation réduite.
3) Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ traverse la tangente $\mathscr{T}_0$ au point d'abscisse 0 (point d'inflexion).

EXERCICE C17.89 — Soit la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(1+x+x^2\right) \end{array} \right.$$

On munit le plan d'un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ et on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

1) Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente $\mathscr{T}_0$ au point d'abscisse 0, dont on précisera une l'équation réduite.
2) Déterminer la position de la courbe $\mathscr{C}$ et de la tangente $\mathscr{T}_0$ au voisinage du point d'abscisse 0.
3) Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente $\mathscr{T}_1$ au point d'abscisse 1, dont on précisera une l'équation réduite.
4) Déterminer la position de la courbe $\mathscr{C}$ et de la tangente $\mathscr{T}_1$ au voisinage du point d'abscisse 0.

EXERCICE C17.90 — Soit la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc}]-\pi,0[\cup]0,\pi[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{\sin(x)}-\dfrac{1}{x} \end{array} \right.$$

1) Démontrer que la fonction f se prolonge par continuité en 0 en une fonction notée $\widetilde{f}$ et préciser la valeur $\widetilde{f}(0)$.
2) Démontrer que la fonction $\widetilde{f}$ est dérivable en 0 et préciser la valeur $\widetilde{f}'(0)$.

EXERCICE C17.91 — Soit la fonction

$$f: x \longmapsto \frac{\cos(x)}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}$$

1) Préciser le domaine de définition $\mathscr{D}$ de la fonction f.
2) Démontrer que la fonction f se prolonge par continuité en 0 en une fonction notée $\widetilde{f}$ dérivable en 0.
3) On munit le plan d'un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. Déterminer la position de la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction $\widetilde{f}$ et de sa tangente $\mathscr{T}_0$ au point A d'abscisse 0, au voisinage de A.

§ 6.4 Recherches d'asymptotes

Exercice C17.92 — Soit la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2+x+1} \end{array} \right.$$

On munit le plan d'un repère $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$ et on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

1) Déterminer $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$ tel que

$$f\left(\frac{1}{h}\right) \underset{h\to 0^+}{=} \frac{a}{h} + b + c\cdot h + \mathrm{o}(h)$$

2) En déduire que $\mathscr{C}$ possède une droite asymptote Δ en $+\infty$, dont on précisera l'équation réduite.
3) Que dire de la position relative de $\mathscr{C}$ et Δ ?

Exercice C17.93 — Soit la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^4\cdot\left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\right) \end{array} \right.$$

On munit le plan d'un repère $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$ et on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

1) En adaptant la démarche de l'exercice C17.92, démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ possède une droite asymptote Δ en $+\infty$, dont on précisera l'équation réduite.
2) Que dire de la position relative de $\mathscr{C}$ et Δ ?

Exercice C17.94 — Soit la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2\cdot e^{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}}{x+2} \end{array} \right.$$

On munit le plan d'un repère $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$ et on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

1) En adaptant la démarche de l'exercice C17.92, démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ possède une droite asymptote Δ en $+\infty$, dont on précisera l'équation réduite.
2) Que dire de la position relative de $\mathscr{C}$ et Δ ?

§ 7. Extrema locaux en un point intérieur et développements limités

Proposition C17.95 (CN et CS d'extremum local en un point intérieur)
Soient I un intervalle non vide et non réduit à un point, a un point de I qui n'est pas une extrémité, $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$. On suppose que f possède un $\mathrm{DL}_2(a)$, i.e. qu'il existe des réels $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ tels que

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \alpha_0 + \alpha_1\cdot(x-a) + \alpha_2\cdot(x-a)^2 + \mathrm{o}\left((x-a)^2\right)$$

1) Si f atteint un extremum local en a alors $\alpha_1 = 0$.
2) Si $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 \neq 0$ alors f atteint un extremum local en a.

Exercice C17.96 — Soient la fonction f définie par

$$f : x \longmapsto \ln(1+x) - e^x$$

1) Justifier que f possède un $\mathrm{DL}_2(0)$ et calculer ce dernier.
2) Que déduire de Q1 quant au point 0 ?

Exercice C17.97 — Soient I un intervalle ouvert et $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur I. Que dire d'un point $a \in I$ tel que $f'(0) = 0$ et $f''(0) > 0$?

Exercice C17.98 — Soient la fonction f définie par

$$f: x \longmapsto x\cdot\sqrt{1+x}-\ln(1+x)+2\cdot\cos(x)-2$$

1) Justifier que f possède un $\mathrm{DL}_3(0)$ et calculer ce dernier.
2) Que déduire de Q1 quant au point 0 ?

§ 8. Relations de comparaison : cas des suites

Définition C17.99 (notations de Landau pour les suites)
Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de nombres réels.

1) La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est dominée par la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$, ce que l'on note $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ si

$$\exists\, n_0\in\mathbf{N}\quad \exists\,(b_n)_{n\geqslant n_0}\in\mathbf{R}^{\mathbf{N}_{\geqslant n_0}}\qquad \left\{\begin{array}{l}\forall\, n\geqslant n_0\quad u_n=b_n\cdot v_n\\ \text{et}\\ (b_n)_{n\geqslant n_0}\text{ est bornée}\end{array}\right.$$

2) La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est négligeable devant la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$, ce que l'on note $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ si

$$\exists\, n_0\in\mathbf{N}\quad \exists\,(\varepsilon_n)_{n\geqslant n_0}\in\mathbf{R}^{\mathbf{N}_{\geqslant n_0}}\qquad \left\{\begin{array}{l}\forall\, n\geqslant n_0\quad u_n=\varepsilon_n\cdot v_n\\ \text{et}\\ \varepsilon_n\longrightarrow 0\end{array}\right.$$

3) La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est équivalente à la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$, ce que l'on note $u_n \sim v_n$ si

$$\exists\, n_0\in\mathbf{N}\quad \exists\,(\varepsilon_n)_{n\geqslant n_0}\in\mathbf{R}^{\mathbf{N}_{\geqslant n_0}}\qquad \left\{\begin{array}{l}\forall\, n\geqslant n_0\quad u_n=(1+\varepsilon_n)\cdot v_n\\ \text{et}\\ \varepsilon_n\longrightarrow 0\end{array}\right.$$

Remarque C17.100 — Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres réels est équivalents à la suite nulle si et seulement si elle est nulle à partir d'un certain rang.

Proposition C17.101 (expression des notations de Landau à l'aide de quotients)
Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de nombres réels. On suppose que

$$\exists\, n_0\in\mathbf{N}\quad \forall\, n\geqslant n_0\quad v_n\neq 0$$

1) $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ si et seulement si la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant n_0}$ est bornée.
2) $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ si et seulement si la suite $\dfrac{u_n}{v_n}\longrightarrow 0$.
3) $u_n \sim v_n$ si et seulement si la suite $\dfrac{u_n}{v_n}\longrightarrow 1$.

Exemple C17.102 — $n^2=\mathrm{O}\big(\sin(n)\cdot n^2\big)$, $n^2=\mathrm{O}(3^n)$ et $n^2\sim n^2+n\cdot\ln(n)$

Exercice C17.103 — Soient $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(d_n)_{n\in\mathbf{N}}$ des suites de nombres réels.
1) Si $a_n\sim b_n$ et $c_n\sim d_n$, l'assertion $a_n+c_n\sim b_n+d_n$ est-elle nécessairement vraie ?
2) Si $a_n\sim b_n$ et $c_n\sim d_n$, l'assertion $a_n\cdot c_n\sim b_n\cdot d_n$ est-elle nécessairement vraie ?
3) S'il existe $\ell\in\mathbf{R}^*$ tel que $a_n\longrightarrow\ell$ et $b_n\longrightarrow\ell$, l'assertion $a_n\sim b_n$ est-elle nécessairement vraie ?
4) Si $a_n\longrightarrow 0$ et $b_n\longrightarrow 0$, l'assertion $a_n\sim b_n$ est-elle nécessairement vraie ?
5) Si $a_n\sim b_n$, l'assertion $a_n^{2023}\sim b_n^{2023}$ est-elle nécessairement vraie ?
6) Si $a_n\sim b_n$, l'assertion $a_n^n\sim b_n^n$ est-elle nécessairement vraie ?
7) Si $a_n\sim b_n$, l'assertion $e^{a_n}\sim e^{b_n}$ est-elle nécessairement vraie ?
8) Si la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a tous ses termes non nuls, l'assertion $a_{n+1}\sim a_n$ est-elle nécessairement vraie ?

Remarque C17.104 — Les propriétés des notations O, o et $\sim$ énoncées dans le cadre des fonctions en C17.16, C17.18 et C17.20 s'étendent *mutatis mutandis* au cadre des suites.

Exercice C17.105 — Démontrer $\ln(n+1) \sim \ln(n)$.

Exercice C17.106 — Donner un équivalent $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice C17.107 — Étudier la limite éventuelle de $\left(\cos\left(\frac{2}{n}\right)\right)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice C17.108 — Donner un équivalent $\sqrt[n]{n} - \sqrt[n]{n+1}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice C17.109 — Étudier la limite éventuelle de $\left(3\cdot\sqrt[n]{2} - 2\cdot\sqrt[n]{3}\right)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice C17.110 — Étudier la limite éventuelle de $n^2 \cdot \left(e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

§ 9. Quelques problèmes d'études asymptotiques

Exercice C17.111 — On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n := \ln(n+1)$.

1) Donner un équivalent simple a_n de u_n, de sorte que

$$u_n = a_n + \mathrm{o}(a_n) \qquad [\text{développement asymptotique à 1 terme de } u_n]$$

2) Donner un équivalent simple b_n de $u_n - a_n$, de sorte que

$$u_n = a_n + b_n + \mathrm{o}(b_n) \qquad [\text{développement asymptotique à 2 termes de } u_n]$$

3) Donner un équivalent simple c_n de $u_n - a_n - b_n$, de sorte que

$$u_n = a_n + b_n + c_n + \mathrm{o}(c_n) \qquad [\text{développement asymptotique à 3 termes de } u_n]$$

4) Proposer une démarche pour obtenir un développement asymptotique à 4 termes de u_n.

Exercice C17.112 — On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Donner un développement asymptotique de u_n à 3 termes.

Exercice C17.113 — Soit f la fonction définie par

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x\cdot\exp\left(x^2\right) \end{array} \right.$$

1) Démontrer que f est bijective.
2) Justifier que f^{-1} possède un $\mathrm{DL}_4(0)$.
3) Donner le $\mathrm{DL}_4(0)$ de f.

Exercice C17.114 — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$.

1) Démontrer que $u_n \longrightarrow +\infty$.
2) En étudiant $\left(x_{n+1}^2 - x_n^2\right)_{n\in\mathbf{N}}$ et en appliquant le théorème de Cesàro (énoncé et démontré dans le DS6), démontrer $x_n \sim \sqrt{2n}$.

Exercice C17.115 — On considère, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'équation

$$(E_n) \, : \, e^x + x = n$$

d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.
1) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'équation (E_n) possède une unique solution que l'on notera x_n.
2) Démontrer que $x_n \longrightarrow +\infty$.
3) Démontrer $x_n \sim \ln(n)$.
4) En étudiant $(x_n - \ln(n))_{n\in\mathbf{N}^*}$, démontrer

$$x_n = \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \qquad [\text{développement asymptotique à 2 termes}]$$

Exercice C17.116 — 1) Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'équation

$$x = \operatorname{cotan}(x)$$

admet une unique solution x_n dans l'intervalle $]n\pi, (n+1)\pi[$.
2) Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_n = n\pi + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x_n}\right)$.
3) Déterminer un équivalent de x_n, puis un développement asymptotique à deux termes de x_n.

§ 10. Formule de Stirling

Exercice C17.117 — Soit $n \in \mathbf{N}$. On appelle intégrale de Wallis de rang n le nombre réel

$$W_n := \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}\,t$$

1) Justifier que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $W_n > 0$.
2) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} \cdot W_n$$

3) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$W_{2n} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n)!}{2^{2n} \cdot (n!)^2}$$

4) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $n\,W_n\,W_{n-1}$ est constante, en précisant la valeur.
5) Démontrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante et en déduire

$$W_{n+1} \sim W_n$$

6) Déduire de Q4 et Q5 que

$$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Lemme C17.118 (équivalent partiel de la factorielle)
Il existe une constante réelle $C > 0$ telle que

$$n! \sim C \cdot \sqrt{n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Ce lemme sera démontré dans le chapitre dédié aux séries numériques.

Théorème C17.119 (formule de Stirling)

$$n! \sim \sqrt{2 \cdot \pi \cdot n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$