

CHAPITRE N°17

ANALYSE ASYMPTOTIQUE

§ 1. RELATIONS DE COMPARAISON : CAS DES FONCTIONS

DÉFINITION C17.1 (VOISINAGE D'UN POINT DE $\bar{\mathbf{R}}$)

1) Un voisinage V d'un point $a \in \mathbf{R}$ est une partie de \mathbf{R} telle que

$$\exists \delta > 0 \quad]a - \delta, a + \delta[\subset V$$

2) Un voisinage V de $+\infty$ est une partie de \mathbf{R} telle que

$$\exists A \in \mathbf{R} \quad]A, +\infty[\subset V$$

3) Un voisinage V de $-\infty$ est une partie de \mathbf{R} telle que

$$\exists B \in \mathbf{R} \quad]-\infty, B[\subset V$$

NOTATION C17.2 — Si $a \in \bar{\mathbf{R}}$ alors $\mathcal{V}(a)$ désigne l'ensemble des voisinages de a .

PROPOSITION C17.3 (PROPRIÉTÉS DES VOISINAGES D'UN POINT DE $\bar{\mathbf{R}}$)

Soit $a \in \bar{\mathbf{R}}$.

1) $\mathbf{R} \in \mathcal{V}(a)$

2) Si $n \in \mathbf{N}^*$ et $(V_1, \dots, V_n) \in \mathcal{V}(a)^n$ alors $\bigcap_{i=1}^n V_i \in \mathcal{V}(a)$.

3) Si I est un ensemble non vide et $(V_i)_{i \in I} \in \mathcal{V}(a)^I$ alors $\bigcup_{i \in I} V_i \in \mathcal{V}(a)$.

REMARQUE C17.4 — Une intersection quelconque de voisinages d'un point $a \in \bar{\mathbf{R}}$ n'est pas nécessairement un voisinage de a . Par exemple, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ est un voisinage de 0 mais $\bigcap_{n \in \mathbf{N}^*}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[= \{0\}$ n'est pas un voisinage de 0.

NOTATION C17.5 — Si $a \in \mathbf{R}$ et $V \in \mathcal{V}(a)$ on pose $V^* := V \setminus \{a\}$ (voisinage épointé de a).

DÉFINITION C17.6 (GERME DES FONCTIONS DÉFINIES AU VOISINAGE DE $a \in \bar{\mathbf{R}}$)

1) Soit $a \in \mathbf{R}$. On pose

$$\mathcal{G}_a := \left(\bigcup_{V \in \mathcal{V}(a)} \{f \in \mathbf{R}^V : f \text{ est continue en } a\} \right) \cup \left(\bigcup_{V \in \mathcal{V}(a)} \{f \in \mathbf{R}^{V^*} : f \text{ ne possède pas de limite finie en } a\} \right)$$

Un élément de \mathcal{G}_a est donc soit une fonction définie sur un voisinage de a et continue en a , soit une fonction définie sur un voisinage épointé de a qui n'est pas prolongeable par continuité en a .

2) Soit $a \in \{-\infty, +\infty\}$. On pose

$$\mathcal{G}_a := \bigcup_{V \in \mathcal{V}(a)} \mathbf{R}^V$$

Un élément de \mathcal{G}_a est donc une fonction définie sur un voisinage de a .

REMARQUE C17.7 — Soient $a \in \bar{\mathbf{R}}$. Pour tout $(f, g) \in \mathcal{G}_a^2$, on définit la fonction $f + g$ par

$$f + g \left| \begin{array}{l} \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longrightarrow f(x) + g(x) \end{array} \right.$$

Si $a \in \{-\infty, +\infty\}$ ou $f(x) \times g(x)$ n'a pas de limite finie quand x tend vers $a \in \mathbf{R}$ alors on définit la fonction $f \times g$ par

$$f \times g \left| \begin{array}{l} \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \\ x \end{array} \right. \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \begin{array}{l} \mathbf{R} \\ f(x) \times g(x) \end{array}$$

Sinon $f(x) \times g(x)$ a une limite $\ell \in \mathbf{R}$ quand x tend vers $a \in \mathbf{R}$ et on pose

$$f \times g \left| \begin{array}{l} (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g) \cup \{a\} \\ x \end{array} \right. \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \begin{array}{l} \mathbf{R} \\ \left\{ \begin{array}{l} f(x) \times g(x) \text{ si } x \neq a \\ \ell \text{ si } x = a \end{array} \right. \end{array}$$

DÉFINITION C17.8 (RELATION DE DOMINATION O EN UN POINT DE $\bar{\mathbf{R}}$)

Soient $a \in \bar{\mathbf{R}}$ et $(f, g) \in \mathcal{G}_a^2$. On dit que g domine f au voisinage de a et on note $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(g(x))$ ou $f \underset{a}{=} O(g)$ si

$$\exists V \in \mathcal{V}(a) \quad \exists b \in \mathbf{R}^V \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in V \cap \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \quad f(x) = b(x)g(x) \\ \text{et} \\ b \text{ est bornée sur } V \end{array} \right.$$

DÉFINITION C17.9 (RELATION DE NÉGLIGEABILITÉ o EN UN POINT DE $\bar{\mathbf{R}}$)

Soient $a \in \bar{\mathbf{R}}$ et $(f, g) \in \mathcal{G}_a^2$. On dit que f est négligeable par rapport à g au voisinage de a et on note $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ ou $f \underset{a}{=} o(g)$ si

$$\exists V \in \mathcal{V}(a) \quad \exists \varepsilon \in \mathbf{R}^V \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in V \cap \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \quad f(x) = \varepsilon(x)g(x) \\ \text{et} \\ \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \end{array} \right.$$

NOTATION C17.10 — Soient $a \in \bar{\mathbf{R}}$ et $(f, g, h) \in \mathcal{G}_a^3$.

- 1) On écrira souvent $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} g(x) + O(h(x))$ pour signifier $f(x) - g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(h(x))$
- 2) De manière analogue, on écrira souvent $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} g(x) + o(h(x))$ pour signifier $f(x) - g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(h(x))$

DÉFINITION C17.11 (RELATION D'ÉQUIVALENCE \sim EN UN POINT DE $\bar{\mathbf{R}}$)

Soient $a \in \bar{\mathbf{R}}$ et $(f, g) \in \mathcal{G}_a^2$. On dit que f est équivalente à g au voisinage de a et on note $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ ou $f \underset{a}{\sim} g$ si

$$\exists V \in \mathcal{V}(a) \quad \exists \varepsilon \in \mathbf{R}^V \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in V \cap \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \quad f(x) = (1 + \varepsilon(x))g(x) \\ \text{et} \\ \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \end{array} \right.$$

PROPOSITION C17.12 (LIEN FONDAMENTAL ENTRE \sim ET o)

Soient $a \in \bar{\mathbf{R}}$ et $(f, g) \in \mathcal{G}_a^2$.

$$f \underset{a}{\sim} g \iff f - g \underset{a}{=} o(g)$$

PROPOSITION C17.13 (EXPRESSIONS DES RELATIONS DE LANDAU À L'AIDE DE QUOTIENTS)

Soient $a \in \bar{\mathbf{R}}$ et $(f, g) \in \mathcal{G}_a^2$. On suppose que

$$\exists V \in \mathcal{V}(a) \quad \forall x \in V^* \cap \mathcal{D}_g \quad g(x) \neq 0$$

- 1) $f \underset{a}{=} O(g)$ si et seulement s'il existe $U \in \mathcal{V}(a)$ tel que $U \subset V$ et la fonction $\frac{f|_{U^* \cap \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g}}{g|_{U^* \cap \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g}}$ est bornée sur $U^* \cap \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$
- 2) $f \underset{a}{=} o(g)$ si et seulement si $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$
- 3) $f \underset{a}{\sim} g$ si et seulement si $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$

EXEMPLE C17.14 — Soit $(p, q) \in \mathbf{N}^2$ tel que $p < q$, $(a_p, \dots, a_q) \in \mathbf{R}^{q-p+1}$ tels que $a_p \neq 0$ et $a_q \neq 0$. Alors

$$\sum_{k=p}^q a_k x^k \underset{x \rightarrow 0}{\sim} a_p x^p \quad \text{et} \quad \sum_{k=p}^q a_k x^k \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} a_q x^q$$

EXEMPLE C17.15 — Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Alors

$$\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + O(x^{n+1})$$

PROPOSITION C17.16 (PROPRIÉTÉS DE LA RELATION O)

Soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$.

- 1) La relation $f \underset{a}{=} O(g)$ sur \mathcal{G}_a est réflexive et transitive.
- 2) Soit $(f_1, f_2, g) \in \mathcal{G}_a^3$ tel que $f_1 \underset{a}{=} O(g)$ et $f_2 \underset{a}{=} O(g)$. Alors $f_1 + f_2 \underset{a}{=} O(g)$.
- 3) Soit $(f_1, f_2, g_1, g_2) \in \mathcal{G}_a^4$ tel que $f_1 \underset{a}{=} O(g_1)$ et $f_2 \underset{a}{=} O(g_2)$. Alors $f_1 f_2 \underset{a}{=} O(g_1 g_2)$.
- 4) Soient $(f, g) \in \mathcal{G}_a^2$ tel que $f \underset{a}{=} O(g)$, $b \in \mathbf{R}$ et $h \in \mathcal{G}_b$ telle que $h(b) = a$. Si $f \circ h$ et $g \circ h$ sont définies au voisinage de b alors $f \circ h \underset{b}{=} O(g \circ h)$.

EXERCICE C17.17 — Soient $a \in \overline{\mathbf{R}}$ et $(f_1, f_2, g_1, g_2) \in \mathcal{G}_a^4$. Démontrer que $f_1 \underset{a}{=} O(g_1)$ et $f_2 \underset{a}{=} O(g_2)$ n'entraîne pas nécessairement $f_1 + f_2 \underset{a}{=} O(g_1 + g_2)$.

PROPOSITION C17.18 (PROPRIÉTÉS DE LA RELATION o)

Soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$.

- 1) La relation $f \underset{a}{=} o(g)$ sur \mathcal{G}_a est transitive.
- 2) Soit $(f, g) \in \mathcal{G}_a^2$ tel que $f \underset{a}{=} o(g)$. Alors $f \underset{a}{=} O(g)$.
- 3) Soit $(f, g, h) \in \mathcal{G}_a^3$ tel que $f \underset{a}{=} o(g)$ et $g \underset{a}{=} O(h)$. Alors $f \underset{a}{=} o(h)$.
- 4) Soit $(f_1, f_2, g) \in \mathcal{G}_a^3$ tel que $f_1 \underset{a}{=} o(g)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(g)$. Alors $f_1 + f_2 \underset{a}{=} o(g)$.
- 5) Soient $(f, g) \in \mathcal{G}_a^2$ tel que $f \underset{a}{=} o(g)$, $b \in \mathbf{R}$ et $h \in \mathcal{G}_b$ telle que $h(b) = a$. Si $f \circ h$ et $g \circ h$ sont définies au voisinage de b alors $f \circ h \underset{b}{=} o(g \circ h)$.

EXERCICE C17.19 — Soient $a \in \overline{\mathbf{R}}$ et $(f_1, f_2, g_1, g_2) \in \mathcal{G}_a^4$. Démontrer que $f_1 \underset{a}{=} o(g_1)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(g_2)$ n'entraîne pas nécessairement $f_1 + f_2 \underset{a}{=} o(g_1 + g_2)$.

PROPOSITION C17.20 (PROPRIÉTÉS DE LA RELATION ~)

Soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$.

- 1) La relation $f \underset{a}{\sim} g$ sur \mathcal{G}_a est une relation d'équivalence.
- 2) Soit $(f_1, f_2, g_1, g_2) \in \mathcal{G}_a^4$ tel que $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$. Alors $f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$.
- 3) Soit $(f, g) \in \mathcal{G}_a^2$. Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $\frac{1}{f}$ est définie au voisinage de a , alors $\frac{1}{g}$ est définie au voisinage de a et $\frac{1}{f} \underset{a}{\sim} \frac{1}{g}$.
- 4) Soient $(f, g) \in \mathcal{G}_a^2$ tel que $f \underset{a}{\sim} g$, $b \in \mathbf{R}$ et $h \in \mathcal{G}_b$ telle que $h(b) = a$. Si $f \circ h$ et $g \circ h$ sont définies au voisinage de b alors $f \circ h \underset{b}{\sim} g \circ h$.

EXERCICE C17.21 — Soient $a \in \overline{\mathbf{R}}$ et $(f_1, f_2, g_1, g_2) \in \mathcal{G}_a^4$. Démontrer que $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ n'entraîne pas nécessairement $f_1 + f_2 \underset{a}{\sim} g_1 + g_2$.

EXERCICE C17.22 — Soient $a \in \overline{\mathbf{R}}$ et $(f, g) \in \mathcal{G}_a^2$. Démontrer que $f \underset{a}{\sim} g$ n'entraîne pas nécessairement $\exp \circ f \underset{a}{\sim} \exp \circ g$.

MÉTHODE C17.23 — Si $a \in \mathbf{R}$ et $f \in \mathcal{G}_a$, alors étudier f au voisinage de a revient à étudier la fonction $h \mapsto f(a+h)$ au voisinage de 0. Le changement de variable

$$x = a + h \quad , \quad h \rightarrow 0$$

permet de déplacer le lieu de l'étude d'un voisinage de a à un voisinage de 0, pour lequel nous disposerons de nombreux résultats.

EXERCICE C17.24 — Donner un équivalent simple de $f(x) := \cos(x)$ lorsque x tend vers $\frac{\pi}{2}$.

EXERCICE C17.25 — Donner un équivalent simple de $f(x) := \ln(x^2 - 2x - 2)$ lorsque x tend vers 3.

PROPOSITION C17.26 (REFORMULATION DES CROISSANCES COMPARÉES)

Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

$$x^\beta \underset{x \rightarrow +\infty}{\equiv} o(e^{\alpha x}) \quad , \quad \ln^\alpha(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\equiv} o(x^\beta) \quad , \quad |\ln(x)|^\alpha \underset{x \rightarrow 0^+}{\equiv} o\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$$

EXERCICE C17.27 — Donner un équivalent simple de $f(x) := \frac{\ln^6(x) - 2\sqrt{x}}{\operatorname{ch}(2x) - x^3}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

EXERCICE C17.28 — Donner un équivalent simple de $f(x) := \ln(\operatorname{ch}(x)) - 2\sqrt{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

PROPOSITION C17.29 (OBTENTION D'UN ÉQUIVALENT PAR ENCADREMENT)

Soient $a \in \overline{\mathbf{R}}$ et $(f, g, h) \in \mathcal{G}_a^3$ tels que $f \leq g \leq h$ au voisinage de a et $f \underset{a}{\sim} h$. Alors $g \underset{a}{\sim} h$.

EXERCICE C17.30 — Démontrer que, pour tout $x > 0$

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

et en déduire un équivalent de $f(x) := \ln(1+x) - x$ lorsque x tend vers 0^+ .

PROPOSITION C17.31 (PROPRIÉTÉS CONSERVÉES PAR ÉQUIVALENCE)

Soient $a \in \overline{\mathbf{R}}$ et $(f, g) \in \mathcal{G}_a^2$ tels que $f \underset{a}{\sim} g$.

- 1) Si f possède une limite $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$ en a , alors $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.
- 2) Si $f \geq 0$ au voisinage de a alors $g \geq 0$ au voisinage de a .
- 3) Si $f > 0$ au voisinage de a alors $g > 0$ au voisinage de a .

EXERCICE C17.32 — Soient $(a, \ell) \in \overline{\mathbf{R}}^2$ et $(f, g) \in \mathcal{G}_a^2$. Démontrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ et $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ n'entraîne pas nécessairement $f \underset{a}{\sim} g$.

§ 2. DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS : FONDEMENTS

DÉFINITION C17.33 (DÉVELOPPEMENT LIMITÉ À L'ORDRE n EN UN POINT RÉEL a)

Soient I un intervalle ouvert de \mathbf{R} , $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction, $a \in I$ et $n \in \mathbf{N}$. On dit que f possède un développement limité (DL) à l'ordre n au point a (abrégé en « f possède un DL $_n(a)$ ») si

$$\exists (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^{n+1} \quad f(x) \underset{x \rightarrow a}{\equiv} \underbrace{\alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \dots + \alpha_n(x-a)^n}_{\sum_{k=0}^n \alpha_k(x-a)^k} + o((x-a)^n)$$

EXEMPLE C17.34 — $\ln(x) \underset{x \rightarrow 1}{=} x - 1 + o(x - 1)$

EXEMPLE C17.35 — Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$.

PROPOSITION C17.36 (UNICITÉ D'UN DL)

Soient I un intervalle ouvert de \mathbf{R} , $f: I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction, $a \in I$ et $n \in \mathbf{N}$. Si $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ et $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ vérifient

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \alpha_k (x-a)^k + o((x-a)^n) \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \beta_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

alors, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\alpha_k = \beta_k$.

PROPOSITION C17.37 (TRONCATURE D'UN DL)

Soient I un intervalle ouvert de \mathbf{R} , $f: I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction, $a \in I$ et $n \in \mathbf{N}$. Supposons que f possède un $\text{DL}_n(a)$, i.e. qu'il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ tel que

$$(\star) \quad f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \alpha_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Alors, pour tout $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, f possède un $\text{DL}_p(a)$ obtenu en tronquant (\star) à l'ordre p , i.e.

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^p \alpha_k (x-a)^k + o((x-a)^p)$$

PROPOSITION C17.38 (PARITÉ ET DL)

Soient I un intervalle ouvert de \mathbf{R} centré en 0, $f: I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction et $n \in \mathbf{N}^*$. Supposons que f possède un $\text{DL}_n(0)$, i.e. qu'il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ tel que $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \alpha_k x^k + o(x^n)$.

1) Si la fonction f est paire, alors les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ d'indices impairs sont nuls et donc

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \alpha_{2k} x^{2k} + o(x^n)$$

2) Si la fonction f est impaire, alors les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ d'indices pairs sont nuls et donc

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \alpha_{2k+1} x^{2k+1} + o(x^n)$$

PROPOSITION C17.39 (TRANSLATION DE L'ÉTUDE D'UN DL EN UN POINT RÉEL AU POINT 0)

Soient I un intervalle ouvert de \mathbf{R} , $f: I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction, $a \in I$ et $n \in \mathbf{N}$.

1) Supposons que la fonction $h \longmapsto f(a+h)$ possède un $\text{DL}_n(0)$, i.e. qu'il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ tel que

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \alpha_k h^k + o(h^n)$$

Alors la fonction f possède un $\text{DL}_n(a)$, donné par $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \alpha_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$

2) Supposons que la fonction f possède un $\text{DL}_n(a)$, i.e. qu'il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ tel que

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \alpha_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Alors la fonction $h \longmapsto f(a+h)$ possède un $\text{DL}_n(0)$, donné par $f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \alpha_k h^k + o(h^n)$

REMARQUE C17.40 — Soient $a \in \bar{\mathbf{R}}$ et $f \in \mathcal{G}_a$. Alors

$$f \underset{a}{=} o(1) \iff f(x) \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} 0$$

PROPOSITION C17.41 (DL₀ ET CONTINUITÉ)

Soient I un intervalle ouvert de \mathbf{R} , $f: I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction, $a \in I$.

- 1) La fonction f admet possède un DL₀(a) si et seulement si f est continue en a .
- 2) Si la fonction f est continue en a alors

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + o(1)$$

PROPOSITION C17.42 (DL₁ ET DÉRIVABILITÉ)

Soient I un intervalle ouvert de \mathbf{R} , $f: I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction, $a \in I$.

- 1) La fonction f possède un DL₁(a) si et seulement si f est dérivable en a .
- 2) Si la fonction f est dérivable en a alors

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + f'(a)(x - a) + o(x - a)$$

EXERCICE C17.43 — Justifier que la fonction

$$f: x \longmapsto \ln(\cos(x) + x)$$

possède un DL₁(0), puis donner ce DL. Qu'en déduire?

EXERCICE C17.44 — Soient $a \in \mathbf{R}$, $V \in \mathcal{V}(a)$ et $f: V \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbf{R}$. On suppose qu'il existe des réels α_0, α_1 tels que

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \alpha_0 + \alpha_1(x - a) + o(x - a)$$

Justifier que la fonction f est prolongeable par continuité en a et que ce prolongement est dérivable en a .

EXERCICE C17.45 — Rappeler le résultat sur le comportement asymptotique de $\frac{1 - \cos(x)}{x^2}$ lorsque x tend vers 0 et en déduire que la fonction cosinus possède un DL₂(0).

EXERCICE C17.46 — Démontrer que la fonction

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \\ x \longmapsto \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \end{array} \right. \begin{array}{l} \mathbf{R} \\ \text{sinon} \end{array}$$

possède un DL₂(0), mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

PROPOSITION C17.47 (DL, ÉQUIVALENT ET SIGNE)

Soient I un intervalle ouvert de \mathbf{R} , $f: I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction, $a \in I$ et $n \in \mathbf{N}$. Supposons que f possède un DL _{n} (a) de partie régulière non nulle, i.e. qu'il existe $n + 1$ réels $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ non tous nuls tels que

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \alpha_k (x - a)^k + o((x - a)^n)$$

Alors l'entier $r := \min \{k \in [0, n] : \alpha_k \neq 0\}$ est bien défini et

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \alpha_r (x - a)^r$$

Ainsi, il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que, pour tout $x \in I \cap V$, $f(x)$ et $\alpha_r (x - a)^r$ ont même signe.

EXERCICE C17.48 — Soient I un intervalle ouvert de \mathbf{R} , $a \in \mathbf{R}$, $f: I \longrightarrow \mathbf{R}$ et \mathcal{C}_f la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère.

1) On suppose qu'il existe des réels $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \neq 0$ tels que

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \alpha_0 + \alpha_1(x - a) + \alpha_2(x - a)^2 + o((x - a)^2)$$

Esquisser l'allure de la courbe \mathcal{C}_f autour du point de coordonnées $(a, f(a))$.

2) Considérer de nouveau la problématique de la question 1, en supposant cette fois qu'il existe des réels $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_3 \neq 0$ tels que

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \alpha_0 + \alpha_1(x - a) + \alpha_3(x - a)^3 + o((x - a)^3)$$

§ 3. FORMULE DE TAYLOR-YOUNG

LEMME C17.49 (INÉGALITÉ DES ACCROISSEMENTS FINIS GÉNÉRALISÉE)

Soient a et b des réels tels que $a < b$, f et g des fonctions définies, continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. Si

$$\forall x \in]a, b[\quad |f'(x)| \leq g'(x)$$

alors $|f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a)$.

PROPOSITION C17.50 (PRIMITIVATION D'UN DL)

Soient I un intervalle ouvert de \mathbf{R} , $f: I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction, $a \in I$ et $n \in \mathbf{N}$. Supposons que

(H1) f est dérivable sur I

(H2) f' possède un $DL_n(a)$, i.e. qu'il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ tel que

$$f'(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \alpha_k (x - a)^k + o((x - a)^n)$$

Alors f possède un $DL_{n+1}(a)$ donné par

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{k+1} (x - a)^{k+1} + o((x - a)^{n+1})$$

DÉFINITION C17.51 (POLYNÔMES DE TAYLOR ASSOCIÉS À UNE FONCTION)

Soient I un intervalle ouvert de \mathbf{R} , $a \in I$, $n \in \mathbf{N}$ et $f: I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction admettant une dérivée d'ordre n au point a .

Le polynôme de Taylor d'ordre n de f au point a est défini par

$$T_{f,a,n} := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k$$

REMARQUE C17.52 — Soit $P \in \mathbf{R}[X] \setminus \{0_{\mathbf{K}[X]}\}$ et

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longrightarrow \sum_{k=0}^{\deg(P)} [P]_k x^k \end{array} \right.$$

la fonction polynomiale associée à P . D'après la formule de Taylor exacte pour les polynômes, pour tout $n \geq \deg(P)$, $T_{f,n,a}$ coïncide avec P .

EXEMPLE C17.53 — Pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\exp^{(k)}(0) = \exp(0) = 1$ et donc le polynôme de Taylor d'ordre n de la fonction exponentielle en 0 est

$$T_{\exp,0,n} = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$$

THÉORÈME C17.54 (FORMULE DE TAYLOR-YOUNG)

Soient I un intervalle ouvert de \mathbf{R} , $f: I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction, $a \in I$ et $n \in \mathbf{N}$. Supposons que

(H) la fonction f est de classe \mathcal{C}^n sur I .

Alors f possède un $DL_n(a)$ donné par

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k}_{\overline{T_{f,a,n}(x)}} + o((x-a)^n)$$

Démonstration — Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ le prédicat défini par

$$\mathcal{P}(n) : \forall f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbf{R}) \quad f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

• *Initialisation à $n = 0$.* L'assertion $\mathcal{P}(0)$ s'écrit

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{R}) \quad f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + o(1)$$

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{R})$. Par continuité de f en a , $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$. Nous en déduisons $f(x) - f(a) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$, i.e. $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + o(1)$.

• *Hérédité.* Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que l'assertion $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbf{R})$. Alors la fonction f est dérivable sur I et $f' \in \mathcal{C}^n(I, \mathbf{R})$. D'après l'hypothèse de récurrence appliquée à la fonction f'

$$\begin{aligned} f'(x) &\underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(f')^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n) \\ &\underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n) \end{aligned}$$

Par intégration d'un DL, nous en déduisons

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!} (x-a)^{k+1} + o((x-a)^{n+1}) \\ &\underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^{n+1}) \\ &\underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^{n+1}) \end{aligned}$$

Q.E.D.

EXERCICE C17.55 — Soit $n \in \mathbf{N}$.

- 1) Justifier que la fonction \exp admet un $DL_n(0)$ et le calculer.
- 2) En déduire que la fonction \ln possède un $DL_n(0)$ et le calculer.

EXERCICE C17.56 — 1) Justifier que la fonction \sin admet un $DL_3(0)$ et le calculer.

- 2) En déduire que la fonction

$$f \left| \begin{array}{l}]-\pi, \pi[\longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

est dérivable sur $]-\pi, \pi[$.

- 3) La fonction f est-elle de classe \mathcal{C}^1 sur $]-\pi, \pi[$?

§ 4. DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS USUELS

Dans le tableau ci-dessous, n désigne un entier naturel non nul et α un réel.

Développements limités	Indications pour retrouver les développements limités
$\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$	Si $x \neq 1$, alors $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.
$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot x^k + o(x^n)$	Composition par $x \mapsto -x$ à droite dans le $DL_{n-1}(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ et primitivation.
$\text{Arctan}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \cdot x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$	Composition par $x \mapsto -x^2$ à droite dans le $DL_n(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ et primitivation.
$\exp(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$	Formule de Taylor-Young et, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\exp^{(k)} = \exp$.
$\text{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$	ch est la partie paire de exp.
$\text{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$	sh est la partie impaire de exp.
$\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^{2k} + o(x^{2n+1})$	Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\cos(x) = \text{ch}(ix)$.
$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$	Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\sin(x) = \frac{\text{sh}(ix)}{i}$.
$\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$	Par dérivabilité $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x)$, par produit $\tan^2(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 + o(x^2)$, puis primitivation avec $\tan' = 1 + \tan^2$.
$(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\prod_{\ell=0}^{k-1} (\alpha - \ell)}{k!} \cdot x^k + o(x^n)$	Formule de Taylor-Young et, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, la dérivée k -ième de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est $x \mapsto \left(\prod_{\ell=0}^{k-1} (\alpha - \ell) \right) \cdot (1+x)^{\alpha-k}$ (récurrence sur k)

EXERCICE C17.57 — Donner le $DL_3(0)$ de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ lorsque au voisinage de 0.

EXERCICE C17.58 — Soit $n \in \mathbf{N}$. Justifier que la fonction Arcsin possède un $DL_n(0)$ et le calculer.

Démonstration — (1) Pour tout $x \in]-1, 1[$, $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ donc $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + x^n \cdot \frac{x}{1-x}$. Comme $\frac{x}{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$

$$\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$$

(2) Comme $-x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ nous pouvons effectuer la substitution $x \leftarrow -x$ dans le DL $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} x^k + o(x^{n-1})$ pour obtenir

$$\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cdot x^k + o(x^{n-1})$$

Par primitivation, il vient $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \ln(1+0) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} \cdot x^{k+1} + o(x^n)$ qui se réécrit

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot x^k + o(x^n)$$

(3) Comme $-x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ nous pouvons effectuer la substitution $x \leftarrow -x^2$ dans le DL $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$ pour obtenir

$$\frac{1}{1+x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot x^{2k} + o(x^{2n})$$

Par primitivation, il vient $\text{Arctan}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \text{Arctan}(0) + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \cdot x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$ qui se réécrit

$$(\star) \quad \text{Arctan}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \cdot x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$$

La fonction Arctan est de classe \mathcal{C}^{2n+2} , donc possède un DL à l'ordre $2n+2$ en 0 d'après la formule de Taylor-Young. Comme elle est impaire, le coefficient de degré $2n+2$ de la partie principale de son DL à l'ordre $2n+2$ est nul. Par unicité et troncature d'un DL, nous déduisons alors de (\star) que

$$\text{Arctan}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \cdot x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$$

(4) La fonction \exp est de classe \mathcal{C}^n sur \mathbf{R} , donc possède un DL à l'ordre n en 0 d'après la formule de Taylor-Young. Ce dernier est en outre donné par $\exp(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k + o(x^n)$. Comme, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\exp^{(k)}(0) = \exp(0) = 1$ nous obtenons

$$\exp(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

(5) Comme $-x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ nous pouvons effectuer la substitution $x \leftarrow -x$ dans le DL

$$\exp(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1}{k!} \cdot x^k + o(x^{2n+1})$$

pour obtenir

$$\exp(-x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot x^k + o(x^{2n+1})$$

En additionnant membre-à-membre les deux DL précédents, il vient

$$2 \cdot \text{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1+(-1)^k}{k!} \cdot x^k + o(x^{2n+1})$$

Comme $1 + (-1)^k$ vaut 2 si k est pair et 0 si k est impair, nous en déduisons $2 \cdot \text{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{2}{(2k)!} \cdot x^{2k} + o(x^{2n+1})$ puis

$$\text{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k)!} \cdot x^{2k} + o(x^{2n+1})$$

(6) Comme $-x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ nous pouvons effectuer la substitution $x \leftarrow -x$ dans le DL

$$\exp(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{1}{k!} \cdot x^k + o(x^{2n+2})$$

pour obtenir

$$\exp(-x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot x^k + o(x^{2n+2})$$

En soustrayant membre-à-membre les deux DL précédents, il vient

$$2 \cdot \text{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{1 - (-1)^k}{k!} \cdot x^k + o(x^{2n+2})$$

Comme $1 - (-1)^k$ vaut 0 si k est pair et 2 si k est impair, nous en déduisons $2 \cdot \text{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{2}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$ puis

$$\text{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$$

(7) La fonction \cos est de classe \mathcal{C}^{2n+1} sur \mathbf{R} , donc possède un DL à l'ordre $2n+1$ en 0 d'après la formule de Taylor-Young. Ce dernier est en outre donné par

$$(\star) \quad \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k + o(x^{2n+1})$$

Au moyen d'un raisonnement par récurrence, nous démontrons que, pour tout $k \in \mathbf{N}$

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad \cos^{(k)}(x) = \cos\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

Comme, pour tout $k \in \mathbf{N}$

$$\cos^{(k)}(0) = \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \text{Re}\left(e^{ik\frac{\pi}{2}}\right) = \text{Re}\left(i^k\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ impair} \\ i^k & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases}$$

nous déduisons de (\star) que

$$\begin{aligned} \cos(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{i^{2k}}{(2k)!} \cdot x^k + o(x^{2n+1}) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^k + o(x^{2n+1}) \end{aligned}$$

(8) La fonction \sin est de classe \mathcal{C}^{2n+2} sur \mathbf{R} , donc possède un DL à l'ordre $2n+2$ en 0 d'après la formule de Taylor-Young. Ce dernier est en outre donné par

$$(\star) \quad \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k + o(x^{2n+2})$$

Au moyen d'un raisonnement par récurrence, nous démontrons que, pour tout $k \in \mathbf{N}$

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad \sin^{(k)}(x) = \sin\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

Comme, pour tout $k \in \mathbf{N}$

$$\sin^{(k)}(0) = \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \text{Im}\left(e^{ik\frac{\pi}{2}}\right) = \text{Im}\left(i^k\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ pair} \\ i^{k-1} & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

nous déduisons de (\star) que

$$\begin{aligned} \sin(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{i^{2k}}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} + o(x^{2n+2}) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} + o(x^{2n+2}) \end{aligned}$$

(9) La fonction \tan est dérivable en 0, donc elle possède un $DL_1(0)$. Comme $\tan(0) = 0$ et $\tan'(0) = 1$, ce $DL_1(0)$ est donné par

$$\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x)$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned} \tan^2(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 + 2 \cdot x \cdot o(x) + o(x) \cdot o(x) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

puis $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x^2 + o(x^2)$. Par primitivation

$$\begin{aligned} \tan(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \tan(0) + x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \end{aligned}$$

(10) La fonction $f: x \mapsto (1+x)^\alpha = e^{\alpha \ln(1+x)}$ est de classe \mathcal{C}^n sur $] -1, 1[$, donc possède un DL à l'ordre n en 0 d'après la formule de Taylor-Young. Ce dernier est en outre donné par

$$(\star) \quad (1+x)^\alpha = f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k + o(x^n)$$

Au moyen d'un raisonnement par récurrence, nous démontrons que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$

$$\forall x \in] -1, 1[\quad f^{(k)}(x) = \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \dots \cdot (\alpha - (k - 1)) \cdot (1+x)^{\alpha-k} = \left(\prod_{\ell=0}^{k-1} (\alpha - \ell) \right) \cdot (1+x)^{\alpha-k}$$

Puisque $f(0) = 1$ et, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $f^{(k)}(0) = \prod_{\ell=0}^{k-1} (\alpha - \ell)$, nous déduisons de (\star) que

$$(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\prod_{\ell=0}^{k-1} (\alpha - \ell)}{k!} \cdot x^k + o(x^n)$$

Q.E.D.

§ 5. OPÉRATIONS SUR LES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

PROPOSITION C17.59 (COMBINAISON LINÉAIRE DE DEUX DL)

Soient λ_1, λ_2 deux réels, f_1, f_2 deux fonctions définies au voisinage d'un même réel a et $n \in \mathbf{N}^*$. On suppose que f_1 et f_2 possèdent un $DL_n(a)$, i.e. qu'il existe $P_1 \in \mathbf{R}_n[X]$ et $P_2 \in \mathbf{R}_n[X]$ tels que

$$f_1(x) \underset{x \rightarrow a}{=} P_1(x-a) + o((x-a)^n) \quad \text{et} \quad f_2(x) \underset{x \rightarrow a}{=} P_2(x-a) + o((x-a)^n)$$

Alors la fonction $\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2$, qui est définie au voisinage de a , possède un $DL_n(a)$ donné par

$$\lambda_1 \cdot f_1(x) + \lambda_2 \cdot f_2(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \lambda_1 \cdot P_1(x-a) + \lambda_2 \cdot P_2(x-a) + o((x-a)^n)$$

La partie principale du précédent DL est donc $\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2 \in \mathbf{R}_n[X]$.

EXEMPLE C17.60 — $\ln(1+x) - \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -1 + x + \frac{x^3}{3} - \frac{7}{24} \cdot x^4 + o(x^4)$

EXEMPLE C17.61 — $\sqrt{1+x} - 2\text{Arctan}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{3}{2} \cdot x - \frac{x^2}{8} + \frac{35}{48} \cdot x^3 + o(x^3)$

EXERCICE C17.62 — Démontrer que la fonction $f: x \mapsto \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ possède un $\text{DL}_4(0)$ et l'expliquer.

NOTATION C17.63 — Si $n \in \mathbb{N}$, l'opérateur de troncature à l'ordre n est l'application τ_n définie par

$$\tau_n \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}[X] \longrightarrow \mathbf{R}_n[X] \\ P \longmapsto \sum_{k=0}^n [P]_k \cdot X^k \end{array} \right.$$

EXEMPLE C17.64 — $\tau_3(X^5 - 2X^4 + 3X^3 - 7X^2 + 12X + 1) = 3X^3 - 7X^2 + 12X + 1$ et $\tau_3(X^2 - 7X + 3) = X^2 - 7X + 3$

PROPOSITION C17.65 (PRODUIT DE DEUX DL)

Soient f_1, f_2 deux fonctions définies au voisinage d'un même réel a et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que f_1 et f_2 possèdent un $\text{DL}_n(a)$, i.e. qu'il existe $P_1 \in \mathbf{R}_n[X]$ et $P_2 \in \mathbf{R}_n[X]$ tels que

$$f_1(x) \underset{x \rightarrow a}{=} P_1(x-a) + o((x-a)^n) \quad \text{et} \quad f_2(x) \underset{x \rightarrow a}{=} P_2(x-a) + o((x-a)^n)$$

Alors la fonction $f_1 \cdot f_2$, qui est définie au voisinage de a , possède un $\text{DL}_n(a)$ donné par

$$f_1(x) \cdot f_2(x) \underset{x \rightarrow a}{=} (\tau_n(P_1 \times P_2))(x-a) + o((x-a)^n)$$

La partie principale du précédent DL est donc $\tau_n(P_1 \times P_2) \in \mathbf{R}_n[X]$.

EXEMPLE C17.66 — $\sin(x) \cdot e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

EXEMPLE C17.67 — $\ln(1+x) \cdot \text{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{6} \cdot x^3 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$

EXERCICE C17.68 — Démontrer que la fonction $f: x \mapsto \ln^2(1+x)$ possède un $\text{DL}_4(0)$ et l'expliquer.

PROPOSITION C17.69 (COMPOSITION DE DEUX DL EN 0)

Soient f, g deux fonctions définies au voisinage d'un réel 0 et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

(H1) $f(0) = 0$

(H2) f et g possèdent un $\text{DL}_n(0)$, i.e. qu'il existe $P \in \mathbf{R}_n[X]$ et $Q \in \mathbf{R}_n[X]$ tels que

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} Q(x) + o(x^n)$$

Alors la fonction $g \circ f$, qui est définie au voisinage de 0, possède un $\text{DL}_n(0)$ donné par

$$g(f(0)) \underset{x \rightarrow 0}{=} (\tau_n(Q \circ P))(x) + o(x^n)$$

La partie principale du précédent DL est donc $\tau_n(Q \circ P) \in \mathbf{R}_n[X]$.

EXEMPLE C17.70 — $\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + o(x^4)$

EXEMPLE C17.71 — $(\cos(x))^{\sin(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^3}{2} + o(x^5)$

EXERCICE C17.72 — Démontrer que la fonction $f: x \mapsto x \cdot (\text{ch}(x))^{\frac{1}{x}}$ possède un $\text{DL}_4(0)$ et l'expliquer.

PROPOSITION C17.73 (INVERSE D'UN DL EN 0)

Soient f une fonction définie au voisinage de 0 et $n \in \mathbf{N}^*$. On suppose que

(H1) $f(0) \neq 0$

(H2) f possède un $DL_n(0)$, i.e. qu'il existe $P \in \mathbf{R}_n[X]$ tel que

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + o(x^n)$$

Alors la fonction $\frac{1}{f}$ qui est définie au voisinage de 0, possède un $DL_n(0)$ donné par

$$\frac{1}{f(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(\tau_n \left(\frac{1}{f(0)} \cdot \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{P}{f(0)} \right)^k \right) \right) (x) + o(x^n)$$

La partie principale du précédent DL est donc $\tau_n \left(\frac{1}{f(0)} \cdot \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{P}{f(0)} \right)^k \right) \in \mathbf{R}_n[X]$.

EXEMPLE C17.74 — $\frac{1}{\cos(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24} \cdot x^4 + o(x^4)$

EXEMPLE C17.75 — $\frac{\sin(x) - 1}{\cos(x) + 1} \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$

EXERCICE C17.76 — Démontrer que la fonction $f: x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{\sin(x)}$ possède un $DL_3(0)$ et l'expliciter.

§ 6. QUELQUES APPLICATIONS DES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

§ 6.1 RECHERCHES D'ÉQUIVALENTS

EXERCICE C17.77 — Déterminer un équivalent simple de $\ln(1+x) - \sin(x)$ lorsque x tend vers 0.

EXERCICE C17.78 — Déterminer un équivalent simple de $\operatorname{ch}(x) + \cos(x) - 2$ lorsque x tend vers 0.

EXERCICE C17.79 — Déterminer un équivalent simple de $\sqrt{1+x} - \frac{2}{2-x}$ lorsque x tend vers 0.

§ 6.2 ÉTUDES DE LIMITES

EXERCICE C17.80 — Étudier la limite éventuelle de $\frac{\sin(x) - x}{x^3}$ lorsque x tend vers 0.

EXERCICE C17.81 — Étudier la limite éventuelle de $\frac{1 + \ln(1+x) - e^x}{1 - \cos(x)}$ lorsque x tend vers 0.

EXERCICE C17.82 — Étudier la limite éventuelle de $\frac{2x}{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$ lorsque x tend vers 0.

EXERCICE C17.83 — Soient a et b des réels strictement positifs. Étudier la limite éventuelle de $\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ lorsque x tend vers 0.

EXERCICE C17.84 — Étudier la limite éventuelle de $\frac{\exp(\sin(x)) - \exp(\tan(x))}{\sin(x) - \tan(x)}$ lorsque x tend vers 0.

EXERCICE C17.85 — Étudier la limite éventuelle de $\frac{2}{\sin^2(x)} - \frac{1}{1 - \cos(x)}$ lorsque x tend vers 0.

EXERCICE C17.86 — Étudier la limite éventuelle de $\frac{2}{\sin^2(x)} - \frac{1}{1 - \cos(x)}$ lorsque x tend vers 0.

EXERCICE C17.87 — Étudier la limite éventuelle de $\frac{\sin(x) - \cos(x)}{1 - \tan(x)}$ lorsque x tend vers $\frac{\pi}{4}$.

§ 6.3 ÉTUDES DE FONCTIONS AU VOISINAGE D'UN POINT RÉEL

EXERCICE C17.88 — Soit la fonction

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{1 + e^x} \end{array} \right.$$

On munit le plan d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et on note \mathcal{C} la courbe représentative de f .

- 1) Démontrer que la fonction f possède un $DL_3(0)$ et l'expliciter.
- 2) En déduire que la courbe \mathcal{C} admet une tangente \mathcal{T}_0 au point d'abscisse 0, dont on précisera une l'équation réduite.
- 3) Démontrer que la courbe \mathcal{C} traverse la tangente \mathcal{T}_0 au point d'abscisse 0 (point d'inflexion).

EXERCICE C17.89 — Soit la fonction

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \ln(1 + x + x^2) \end{array} \right.$$

On munit le plan d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et on note \mathcal{C} la courbe représentative de f .

- 1) Démontrer que la courbe \mathcal{C} admet une tangente \mathcal{T}_0 au point d'abscisse 0, dont on précisera une l'équation réduite.
- 2) Déterminer la position de la courbe \mathcal{C} et de la tangente \mathcal{T}_0 au voisinage du point d'abscisse 0.
- 3) Démontrer que la courbe \mathcal{C} admet une tangente \mathcal{T}_1 au point d'abscisse 1, dont on précisera une l'équation réduite.
- 4) Déterminer la position de la courbe \mathcal{C} et de la tangente \mathcal{T}_1 au voisinage du point d'abscisse 1.

EXERCICE C17.90 — Soit la fonction

$$f \left| \begin{array}{l}]-\pi, 0[\cup]0, \pi[\longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \end{array} \right.$$

- 1) Démontrer que la fonction f se prolonge par continuité en 0 en une fonction notée \tilde{f} et préciser la valeur $\tilde{f}(0)$.
- 2) Démontrer que la fonction \tilde{f} est dérivable en 0 et préciser la valeur $\tilde{f}'(0)$.

EXERCICE C17.91 — Soit la fonction

$$f: x \longmapsto \frac{\cos(x)}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$$

- 1) Préciser le domaine de définition \mathcal{D} de la fonction f .
- 2) Démontrer que la fonction f se prolonge par continuité en 0 en une fonction notée \tilde{f} dérivable en 0.
- 3) On munit le plan d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Déterminer la position de la courbe \mathcal{C} représentative de la fonction \tilde{f} et de sa tangente \mathcal{T}_0 au point A d'abscisse 0, au voisinage de A .

§ 6.4 RECHERCHES D'ASYMPTOTES

EXERCICE C17.92 — Soit la fonction

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \\ x \longmapsto \sqrt{x^2 + x + 1} \end{array} \right. \mathbf{R}$$

On munit le plan d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et on note \mathcal{C} la courbe représentative de f .

1) Déterminer $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ tel que

$$f\left(\frac{1}{h}\right) \underset{h \rightarrow 0^+}{=} \frac{a}{h} + b + c \cdot h + o(h)$$

- 2) En déduire que \mathcal{C} possède une droite asymptote Δ en $+\infty$, dont on précisera l'équation réduite.
3) Que dire de la position relative de \mathcal{C} et Δ ?

EXERCICE C17.93 — Soit la fonction

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \\ x \longmapsto x^4 \cdot \left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \right) \end{array} \right. \mathbf{R}$$

On munit le plan d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et on note \mathcal{C} la courbe représentative de f .

- 1) En adaptant la démarche de l'exercice C17.92, démontrer que la courbe \mathcal{C} possède une droite asymptote Δ en $+\infty$, dont on précisera l'équation réduite.
2) Que dire de la position relative de \mathcal{C} et Δ ?

EXERCICE C17.94 — Soit la fonction

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \\ x \longmapsto \frac{x^2 \cdot e^{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}}{x+2} \end{array} \right. \mathbf{R}$$

On munit le plan d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et on note \mathcal{C} la courbe représentative de f .

- 1) En adaptant la démarche de l'exercice C17.92, démontrer que la courbe \mathcal{C} possède une droite asymptote Δ en $+\infty$, dont on précisera l'équation réduite.
2) Que dire de la position relative de \mathcal{C} et Δ ?

§ 7. EXTREMA LOCAUX EN UN POINT INTÉRIEUR ET DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

PROPOSITION C17.95 (CN ET CS D'EXTREMUM LOCAL EN UN POINT INTÉRIEUR)

Soient I un intervalle non vide et non réduit à un point, a un point de I qui n'est pas une extrémité, $f: I \longrightarrow \mathbf{R}$. On suppose que f possède un $DL_2(a)$, i.e. qu'il existe des réels $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ tels que

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \alpha_0 + \alpha_1 \cdot (x - a) + \alpha_2 \cdot (x - a)^2 + o((x - a)^2)$$

- 1) Si f atteint un extremum local en a alors $\alpha_1 = 0$.
2) Si $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 \neq 0$ alors f atteint un extremum local en a .

EXERCICE C17.96 — Soient la fonction f définie par

$$f: x \longmapsto \ln(1+x) - e^{-x}$$

- 1) Justifier que f possède un $DL_2(0)$ et calculer ce dernier.
2) Que déduire de Q1 quant au point 0?

EXERCICE C17.97 — Soient I un intervalle ouvert et $f: I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur I . Que dire d'un point $a \in I$ tel que $f'(0) = 0$ et $f''(0) > 0$?

EXERCICE C17.98 — Soient la fonction f définie par

$$f : x \mapsto x \cdot \sqrt{1+x} - \ln(1+x) + 2 \cdot \cos(x) - 2$$

- 1) Justifier que f possède un $DL_3(0)$ et calculer ce dernier.
- 2) Que déduire de Q1 quant au point 0?

§ 8. RELATIONS DE COMPARAISON : CAS DES SUITES

DÉFINITION C17.99 (NOTATIONS DE LANDAU POUR LES SUITES)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels.

- 1) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dominée par la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ce que l'on note $u_n = O(v_n)$ si

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists (b_n)_{n \geq n_0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_{\geq n_0}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall n \geq n_0 \quad u_n = b_n \cdot v_n \\ (b_n)_{n \geq n_0} \text{ est bornée} \end{array} \right. \text{ et}$$

- 2) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est négligeable devant la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ce que l'on note $u_n = o(v_n)$ si

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists (\varepsilon_n)_{n \geq n_0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_{\geq n_0}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall n \geq n_0 \quad u_n = \varepsilon_n \cdot v_n \\ \varepsilon_n \longrightarrow 0 \end{array} \right. \text{ et}$$

- 3) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalente à la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ce que l'on note $u_n \sim v_n$ si

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists (\varepsilon_n)_{n \geq n_0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_{\geq n_0}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall n \geq n_0 \quad u_n = (1 + \varepsilon_n) \cdot v_n \\ \varepsilon_n \longrightarrow 0 \end{array} \right. \text{ et}$$

REMARQUE C17.100 — Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels est équivalents à la suite nulle si et seulement si elle est nulle à partir d'un certain rang.

PROPOSITION C17.101 (EXPRESSION DES NOTATIONS DE LANDAU À L'AIDE DE QUOTIENTS)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels. On suppose que

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad v_n \neq 0$$

- 1) $u_n = O(v_n)$ si et seulement si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq n_0}$ est bornée.
- 2) $u_n = o(v_n)$ si et seulement si la suite $\frac{u_n}{v_n} \longrightarrow 0$.
- 3) $u_n \sim v_n$ si et seulement si la suite $\frac{u_n}{v_n} \longrightarrow 1$.

EXEMPLE C17.102 — $n^2 = O(\sin(n) \cdot n^2)$, $n^2 = O(3^n)$ et $n^2 \sim n^2 + n \cdot \ln(n)$

EXERCICE C17.103 — Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites de nombres réels.

- 1) Si $a_n \sim b_n$ et $c_n \sim d_n$, l'assertion $a_n + c_n \sim b_n + d_n$ est-elle nécessairement vraie?
- 2) Si $a_n \sim b_n$ et $c_n \sim d_n$, l'assertion $a_n \cdot c_n \sim b_n \cdot d_n$ est-elle nécessairement vraie?
- 3) S'il existe $\ell \in \mathbb{R}^*$ tel que $a_n \longrightarrow \ell$ et $b_n \longrightarrow \ell$, l'assertion $a_n \sim b_n$ est-elle nécessairement vraie?
- 4) Si $a_n \longrightarrow 0$ et $b_n \longrightarrow 0$, l'assertion $a_n \sim b_n$ est-elle nécessairement vraie?
- 5) Si $a_n \sim b_n$, l'assertion $a_n^{2023} \sim b_n^{2023}$ est-elle nécessairement vraie?
- 6) Si $a_n \sim b_n$, l'assertion $a_n^n \sim b_n^n$ est-elle nécessairement vraie?
- 7) Si $a_n \sim b_n$, l'assertion $e^{a_n} \sim e^{b_n}$ est-elle nécessairement vraie?
- 8) Si la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a tous ses termes non nuls, l'assertion $a_{n+1} \sim a_n$ est-elle nécessairement vraie?

REMARQUE C17.104 — Les propriétés des notations O , o et \sim énoncées dans le cadre des fonctions en C17.16, C17.18 et C17.20 s'étendent *mutatis mutandis* au cadre des suites.

EXERCICE C17.105 — Démontrer $\ln(n+1) \sim \ln(n)$.

EXERCICE C17.106 — Donner un équivalent $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e$ lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE C17.107 — Étudier la limite éventuelle de $\left(\cos\left(\frac{2}{n}\right)\right)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE C17.108 — Donner un équivalent $\sqrt[n]{n} - \sqrt[n]{n+1}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE C17.109 — Étudier la limite éventuelle de $(3 \cdot \sqrt[n]{2} - 2 \cdot \sqrt[n]{3})^n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE C17.110 — Étudier la limite éventuelle de $n^2 \cdot \left(e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

§ 9. QUELQUES PROBLÈMES D'ÉTUDES ASYMPTOTIQUES

EXERCICE C17.111 — On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ définie par, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n := \ln(n+1)$.

1) Donner un équivalent simple a_n de u_n , de sorte que

$$u_n = a_n + o(a_n) \quad [\text{développement asymptotique à 1 terme de } u_n]$$

2) Donner un équivalent simple b_n de $u_n - a_n$, de sorte que

$$u_n = a_n + b_n + o(b_n) \quad [\text{développement asymptotique à 2 termes de } u_n]$$

3) Donner un équivalent simple c_n de $u_n - a_n - b_n$, de sorte que

$$u_n = a_n + b_n + c_n + o(c_n) \quad [\text{développement asymptotique à 3 termes de } u_n]$$

4) Proposer une démarche pour obtenir un développement asymptotique à 4 termes de u_n .

EXERCICE C17.112 — On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ définie par, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Donner un développement asymptotique de u_n à 3 termes.

EXERCICE C17.113 — Soit f la fonction définie par

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto x \cdot \exp(x^2) \end{array} \right.$$

- 1) Démontrer que f est bijective.
- 2) Justifier que f^{-1} possède un $DL_4(0)$.
- 3) Donner le $DL_4(0)$ de f .

EXERCICE C17.114 — Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

- 1) Démontrer que $u_n \longrightarrow +\infty$.
- 2) En étudiant $(x_{n+1}^2 - x_n^2)_{n \in \mathbf{N}}$ et en appliquant le théorème de Cesàro (énoncé et démontré dans le DS6), démontrer $x_n \sim \sqrt{2n}$.

EXERCICE C17.115 — On considère, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'équation

$$(E_n) : e^x + x = n$$

d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.

- 1) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'équation (E_n) possède une unique solution que l'on notera x_n .
- 2) Démontrer que $x_n \longrightarrow +\infty$.
- 3) Démontrer $x_n \sim \ln(n)$.
- 4) En étudiant $(x_n - \ln(n))_{n \in \mathbf{N}^*}$, démontrer

$$x_n = \ln(n) - \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \quad [\text{développement asymptotique à 2 termes}]$$

EXERCICE C17.116 — 1) Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'équation

$$x = \cotan(x)$$

admet une unique solution x_n dans l'intervalle $]n\pi, (n+1)\pi[$.

- 2) Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_n = n\pi + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x_n}\right)$.
- 3) Déterminer un équivalent de x_n , puis un développement asymptotique à deux termes de x_n .

§ 10. FORMULE DE STIRLING

EXERCICE C17.117 — Soit $n \in \mathbf{N}$. On appelle intégrale de Wallis de rang n le nombre réel

$$W_n := \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt$$

- 1) Justifier que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $W_n > 0$.
- 2) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} \cdot W_n$$

- 3) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$W_{2n} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n)!}{2^{2n} \cdot (n!)^2}$$

- 4) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $n W_n W_{n-1}$ est constante, en précisant la valeur.
- 5) Démontrer que la suite $(W_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est décroissante et en déduire

$$W_{n+1} \sim W_n$$

- 6) Déduire de Q4 et Q5 que

$$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

LEMME C17.118 (ÉQUIVALENT PARTIEL DE LA FACTORIELLE)

Il existe une constante réelle $C > 0$ telle que

$$n! \sim C \cdot \sqrt{n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Ce lemme sera démontré dans le chapitre dédié aux séries numériques.

THÉORÈME C17.119 (FORMULE DE STIRLING)

$$n! \sim \sqrt{2 \cdot \pi \cdot n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$