Chapitre n°15
Limites, continuité et dérivabilité

§ 1. Limite d'une fonction en un point

Rappel C15.1 — Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombre réel et $\ell \in \mathbf{R}$.
1) On dit que u_n tend vers ℓ lorsque n tend vers $+\infty$ si u_n est arbitrairement proche de ℓ lorsque n est suffisamment proche de $+\infty$, ce qui s'écrit formellement

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon\,.$$

2) On dit que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ si u_n est arbitrairement proche de $+\infty$ lorsque n est suffisamment proche de $+\infty$, ce qui s'écrit formellement

$$\forall A \in \mathbf{R} \quad \exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad n \geqslant N \Longrightarrow u_n \geqslant A\,.$$

3) On dit que u_n tend vers $-\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ si u_n est arbitrairement proche de $-\infty$ lorsque n est suffisamment proche de $+\infty$, ce qui s'écrit formellement

$$\forall B \in \mathbf{R} \quad \exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad n \geqslant N \Longrightarrow u_n \leqslant B\,.$$

Objectif C15.2 — Nous souhaitons définir la notion de limite pour une fonction, en nous inspirant des trois définitions rappelées ci-dessous. Considérons une fonction $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ définie sur un intervalle I non vide et non réduit à un point. Nous souhaitons donner un sens précis à l'assertion

$$f(x) \text{ tend vers } b \text{ lorsque } x \text{ tend vers } a$$

où a et b sont deux éléments de $\overline{\mathbf{R}}$. Pour que « x tende vers a », il apparaît pertinent qu'un élément x de I puisse se rapprocher de a. C'est pourquoi nous imposerons toujours à a d'être un point de I ou une de ses extrémités. Neuf définitions sont à préciser, suivant que a (resp. b) égale un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.
Avec la notion de limite pour une fonction, nous pourrons définir la notion de continuité et de dérivabilité, puis démontrer de jolis théorèmes. Mentionnons en trois.

1) *Théorème des valeurs intermédiaires.* Si I est un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction continue sur I, alors $f(I)$ est un intervalle.

2) *Théorème des bornes atteintes.* Si a, b sont des réels tels que $a < b$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction continue sur $[a,b]$, alors f est bornée et atteint ses bornes, i.e. il existe $(x_m, x_M) \in [a,b]^2$ tel que

$$\forall x \in [a,b] \quad f(x_m) \leqslant f(x) \leqslant f(x_M)\,.$$

3) *Théorème de Rolle.* Si a, b sont des réels tels que $a < b$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, vérifiant $f(a) = f(b)$ alors

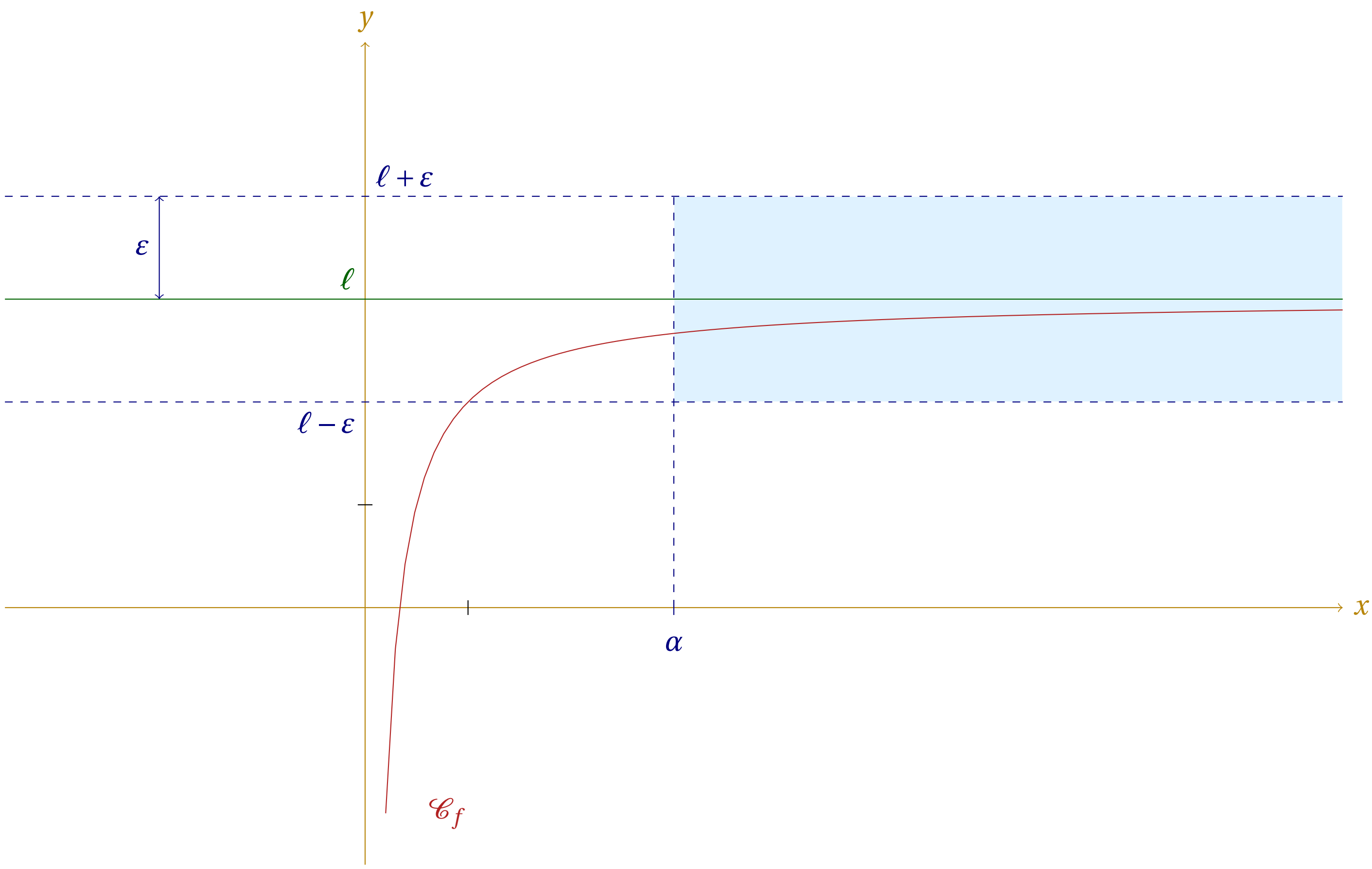
$$\exists c \in]a,b[\quad f'(c) = 0\,.$$

DÉFINITION C15.3 (LIMITE FINIE EN $+\infty$ POUR UNE FONCTION)
Soients
(a) un intervalle $I = (?, +\infty[$ où $? \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$;
(b) une fonction $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$;
(c) $\ell \in \mathbf{R}$.

On dit que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers $+\infty$ et on note, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$, si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha \in \mathbf{R} \quad \forall x \in I \quad x \geqslant \alpha \Longrightarrow \left|f(x) - \ell\right| \leqslant \varepsilon\,.$$

ILLUSTRATION D'UNE FONCTION AYANT UNE LIMITE FINIE EN $+\infty$



EXEMPLE C15.4 — Soit la fonction $f\colon]2,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}\,,\ x \longmapsto \dfrac{x-1}{x-2}$. Alors $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$, i.e. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que, pour tout $x \in]2,+\infty[\cap]\alpha,+\infty[$

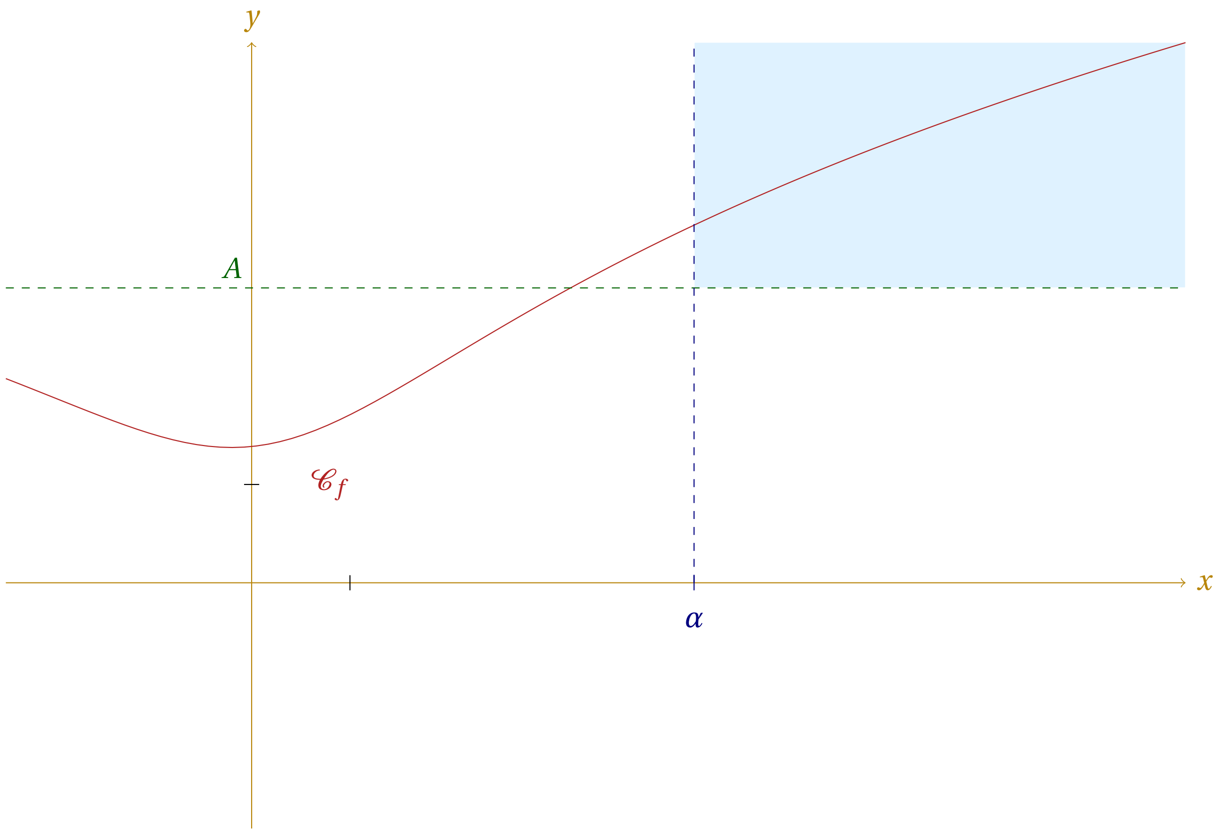
$$\left|f(x) - 1\right| = \frac{1}{x-2} \leqslant \varepsilon\,.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\alpha = 2 + \dfrac{1}{\varepsilon}$. Soit $x \geqslant \alpha$. Alors $x - 2 \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$. Comme la fonction inverse est décroissante sur $]0,+\infty[$, nous en déduisons $\dfrac{1}{x-2} \leqslant \varepsilon$.

DÉFINITION C15.5 (LIMITE $+\infty$ EN $+\infty$ POUR UNE FONCTION)
Soient
(a) un intervalle $I = (?, +\infty[$ où $? \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$;
(b) une fonction $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$.
On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ et on note, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, si

$$\forall A \in \mathbf{R} \quad \exists \alpha \in \mathbf{R} \quad \forall x \in I \quad x \geqslant \alpha \Longrightarrow f(x) \geqslant A\,.$$

ILLUSTRATION D'UNE FONCTION AYANT POUR LIMITE $+\infty$ EN $+\infty$



EXEMPLE C15.6 — Soit la fonction $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}\,,\ x \longmapsto x^2 - x + \sin(x)$. Alors $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, i.e. pour tout $A \in \mathbf{R}$ (ou pour tout réel A suffisamment grand), il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \geqslant \alpha$

$$f(x) = x^2 - x + \sin(x) \geqslant A\,.$$

Soit $A \geqslant -\frac{5}{4}$. Posons $\alpha = \frac{1}{2} + \sqrt{A + \frac{5}{4}}$. Soit $x \geqslant A$. Alors $x - \frac{1}{2} \geqslant \sqrt{A + \frac{5}{4}}$. Comme la fonction carrée est croissante sur $\mathbf{R}_+$

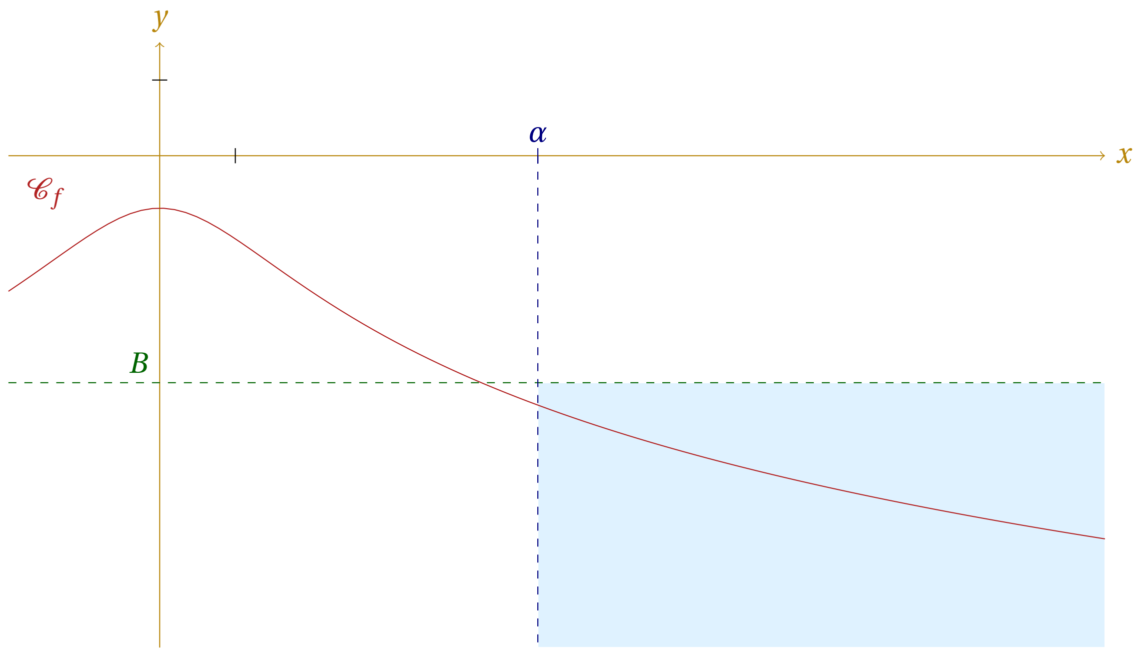
$$x^2 - x + \frac{1}{4} \geqslant A + \frac{5}{4}\,.$$

Nous en déduisons $x^2 - x + \sin(x) \geqslant x^2 - x - 1 \geqslant A$.

DÉFINITION C15.7 (LIMITE $-\infty$ EN $+\infty$ POUR UNE FONCTION)
Soients
(a) un intervalle $I = (?, +\infty[$ où $? \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$;
(b) une fonction $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$.
On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ et on note, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$, si

$$\forall B \in \mathbf{R} \quad \exists \alpha \in \mathbf{R} \quad \forall x \in I \quad x \geqslant \alpha \Longrightarrow f(x) \leqslant B\,.$$

ILLUSTRATION D'UNE FONCTION AYANT POUR LIMITE $-\infty$ EN $+\infty$



EXEMPLE C15.8 — Soit la fonction $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto \frac{x}{2} - \sqrt{x^2-1}$. Alors $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$, i.e. pour tout $B \in \mathbf{R}$ (ou pour tout réel B suffisamment petit), il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in [1, +\infty[\cap [A, +\infty[$

$$f(x) = \frac{x}{2} - \sqrt{x^2-1} = \frac{-\frac{3}{4}x^2+1}{\frac{x}{2}+\sqrt{x^2-1}} \leqslant B\,.$$

Soit $B \leqslant 1$. Posons $\alpha = \max\left\{2, 2\sqrt{\frac{1-B}{3}}\right\}$. Soit $x \geqslant \alpha$. Comme $x \geqslant 2$

$$(\star) \qquad \frac{x}{2} + \sqrt{x^2-1} \geqslant 1\,.$$

De $x \geqslant 2\sqrt{\frac{1-B}{3}}$ et de la croissance de la fonction carrée sur $\mathbf{R}_+$ nous déduisons $\frac{3}{4}x^2 - 1 \geqslant -B$ puis

$$(\star\star) \qquad 1 - \frac{3}{4}x^2 \leqslant B\,.$$

D'après $(\star)$ et $(\star\star)$, $f(x) \leqslant B$.

DÉFINITION C15.9 (LIMITE FINIE EN $-\infty$ POUR UNE FONCTION)

Soient

(a) un intervalle $I =]-\infty, ?)$ où $? \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$;

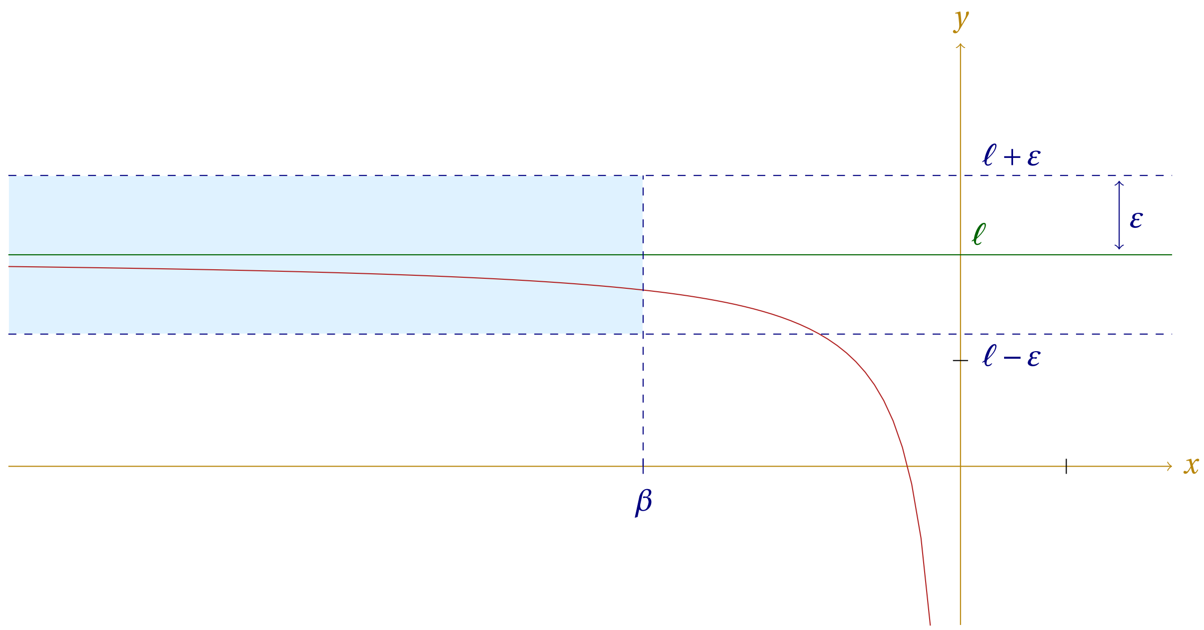
(b) une fonction $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$;

(c) $\ell \in \mathbf{R}$.

On dit que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers $-\infty$ et on note, $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} \ell$, si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \beta \in \mathbf{R} \quad \forall x \in I \quad x \leqslant \beta \Longrightarrow \left| f(x) - \ell \right| \leqslant \varepsilon \, .$$

ILLUSTRATION D'UNE FONCTION AYANT UNE LIMITE FINIE EN $-\infty$



EXEMPLE C15.10 — Soit la fonction $f :]-\infty, 0[\longrightarrow \mathbf{R}\,,\ x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{x}$. Alors $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$, i.e. pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\beta \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in]-\infty, 0[\cap]-\infty, \beta]$

$$\left| f(x) - 0 \right| = -\frac{|\cos(x)|}{x} \leqslant \varepsilon \, .$$

Soit $\varepsilon > 0$. Posont $B = -\dfrac{1}{\varepsilon}$. Soit $x \leqslant B$. Alors $\dfrac{1}{\varepsilon} \leqslant -x$. Comme la fonction inverse est décroissante sur $]0, +\infty[$

$$-\frac{1}{x} \leqslant \varepsilon \, .$$

Comme $|\cos(x)| \geqslant 0$ il vient

$$(\star) \qquad -\frac{|\cos(x)|}{x} \leqslant |\cos(x)| \cdot \varepsilon \, .$$

En multipliant membre-à-mebre $|\cos(x)| \leqslant 1$ par $\varepsilon > 0$ nous obtenons

$$(\star\star) \qquad |\cos(x)| \cdot \varepsilon \leqslant \varepsilon \, .$$

D'après $(\star)$ et $(\star\star)$, $\left| f(x) - 0 \right| \leqslant \varepsilon$.

DÉFINITION C15.11 (LIMITE $+\infty$ EN $-\infty$ POUR UNE FONCTION)

Soient

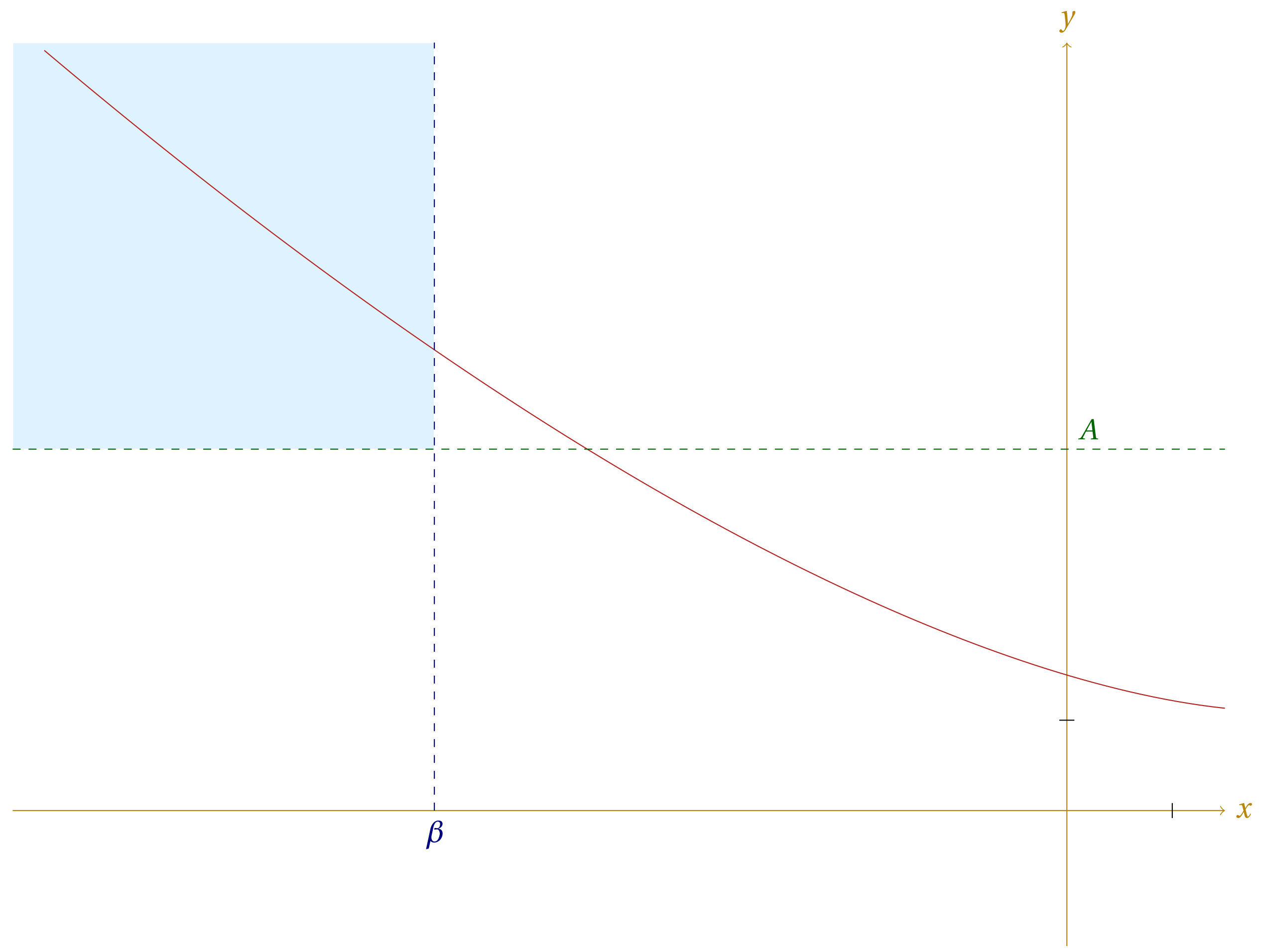
(a) un intervalle $I =]-\infty, ?)$ où $? \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$;

(b) une fonction $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$.

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ et on note, $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$, si

$$\forall A \in \mathbf{R} \quad \exists \beta \in \mathbf{R} \quad \forall x \in I \quad x \leqslant \beta \Longrightarrow f(x) \geqslant A\,.$$

ILLUSTRATION D'UNE FONCTION AYANT POUR LIMITE $+\infty$ EN $-\infty$



EXEMPLE C15.12 — Soit la fonction $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}\,,\; x \longmapsto x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Alors $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$

DÉFINITION C15.13 (LIMITE $-\infty$ EN $-\infty$ POUR UNE FONCTION)
Soient
(a) un intervalle $I =]-\infty, ?)$ où $? \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$;
(b) une fonction $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$.
On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ et on note, $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$, si

$$\forall B \in \mathbf{R} \quad \exists \beta \in \mathbf{R} \quad \forall x \in I \quad x \leqslant \beta \Longrightarrow f(x) \leqslant B\,.$$

ILLUSTRATION D'UNE FONCTION AYANT POUR LIMITE $-\infty$ EN $-\infty$

EXEMPLE C15.14 — Soit la fonction $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}\,,\, x \longmapsto 2x - \lfloor x \rfloor$. Alors $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$

DÉFINITION C15.15 (LIMITE FINIE EN UN POINT RÉEL POUR UNE FONCTION)
Soient
(a) un intervalle I un intervalle non vide et non réduit à un point ;
(b) a un réel qui est un point de I ou une de ses extrémités ;
(c) une fonction $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$;
(d) $\ell \in \mathbf{R}$.
On dit que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a et on note, $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$, si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - a| \leqslant \delta \Longrightarrow \left| f(x) - \ell \right| \leqslant \varepsilon .$$

ILLUSTRATION D'UNE FONCTION AYANT UNE LIMITE FINIE EN UN POINT RÉEL

EXEMPLE C15.16 — Soit la fonction $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto x^2 - 3x + 4$. Alors $f(x) \xrightarrow[x \to 1]{} 2$.

DÉFINITION C15.17 (LIMITE $+\infty$ EN UN POINT RÉEL POUR UNE FONCTION)

Soient

(a) un intervalle I un intervalle non vide et non réduit à un point;

(b) a un réel qui est un point de I ou une de ses extrémités;

(c) une fonction $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$.

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a et on note, $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$, si

$$\forall\, A \in \mathbf{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall\, x \in I \quad |x-a| \leqslant \delta \Longrightarrow f(x) \geqslant A\,.$$

ILLUSTRATION D'UNE FONCTION AYANT POUR LIMITE $+\infty$ EN UN POINT RÉEL

EXEMPLE C15.18 — Soit la fonction $f :]2,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}\,,\ x \longmapsto \dfrac{x+1}{x^2-4}$. Alors $f(x) \xrightarrow[x \to 2]{} +\infty$.

DÉFINITION C15.19 (LIMITE $-\infty$ EN UN POINT RÉEL POUR UNE FONCTION)
Soients
(a) un intervalle I un intervalle non vide et non réduit à un point ;
(b) a un réel qui est un point de I ou une de ses extrémités ;
(c) une fonction $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$.
On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a et on note, $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$, si

$$\forall B \in \mathbf{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x-a| \leqslant \delta \Longrightarrow f(x) \leqslant B\,.$$

ILLUSTRATION D'UNE FONCTION AYANT POUR LIMITE $-\infty$ EN UN POINT RÉEL

EXEMPLE C15.20 — Soit la fonction $f :]-\infty, 1[\longrightarrow \mathbf{R}\,,\ x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+x-2}$. Alors $f(x) \xrightarrow[x \to 1]{} -\infty$.

PROPOSITION C15.21 (UNICITÉ DE LA LIMITE)
Soient
(a) I un intervalle non vide et non réduit à un point ;
(b) a un point de I ou une de ses extrémités ;
(c) $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction ;
(f) $(b_1, b_2) \in \overline{\mathbf{R}}^2$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b_1 \\ \\ f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow b_1 = b_2 .$$

DÉFINITION C15.22 (LIMITE D'UNE FONCTION EN UN POINT DE $\overline{\mathbf{R}}$)
Soient
(a) I un intervalle non vide et non réduit à un point ;
(b) a un point de I ou une de ses extrémités ;
(c) $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction ;
(d) $b \in \overline{\mathbf{R}}$.
Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$ alors b est appelé limite de f en a et est noté $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

PROPOSITION C15.23 (FONCTION DÉFINIE EN UN POINT a POSSÉDANT UNE LIMITE EN a)
Soient
(a) I un intervalle non vide et non réduit à un point ;
(b) $a \in I$;
(c) $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction.
Si f possède une limite en a alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

DÉFINITION C15.24 (PROPRIÉTÉ VRAIE AU VOISINAGE D'UN POINT DE $\overline{\mathbf{R}}$)
Soient
(a) I un intervalle non vide et non réduit à un point ;
(b) a un point de I ou une de ses extrémités ;
(c) $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction
(d) P une assertion portant sur une fonction.
1) Si $a \in \mathbf{R}$, on dit que la propriété P est vraie au voisinage du réel a s'il existe $\delta > 0$ tel que la propriété est vraie pour la restriction de f à $I \cap]a-\delta, a+\delta[$.
2) Si $a = +\infty$, on dit que la propriété P est vraie au voisinage de $+\infty$ s'il existe $A \in \mathbf{R}$ tel que la propriété est vraie pour la restriction de f à $I \cap]A, +\infty[$.
3) Si $a = -\infty$, on dit que la propriété P est vraie au voisinage de $-\infty$ s'il existe $B \in \mathbf{R}$ tel que la propriété est vraie pour la restriction de f à $I \cap]-\infty, B[$.

EXEMPLE C15.25 — La fonction ln est strictement positive au voisinage de tout point $a \in]1, +\infty[$.

EXEMPLE C15.26 — La fonction sin ne s'annule pas au voisinage de tout point $a \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi \ : \ k \in \mathbf{Z}\}$.

EXERCICE C15.27 — Démontrer que la fonction exp est bornée au voisinage de $-\infty$.

PROPOSITION C15.28 (ADMETTRE UNE LIMITE FINIE VS. ÊTRE LOCALEMENT BORNÉE)
Soient
(a) I un intervalle non vide et non réduit à un point;
(b) a un point de I ou une de ses extrémités;
(c) $f: I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction.
Si f possède une limite en a alors f est bornée au voisinage de a.

EXERCICE C15.29 — Soient a, b des réels tels que $a < b$ et $f:]a, b[\longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction. On suppose que la fonction f admet une limite finie $\ell > 0$ en b. Démontrer que la fonction f est strictement positive au voisinage de b.

THÉORÈME C15.30 (CARACTÉRISATION SÉQUENTIELLE DE LA LIMITE)
Soient
(a) I un intervalle non vide et non réduit à un point;
(b) a un point de I ou une de ses extrémités;
(c) $f: I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction;
(d) $b \in \overline{\mathbf{R}}$.
Alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$ si et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in I^{\mathbf{N}}$ telle que $u_n \longrightarrow a$, $f(u_n) \longrightarrow b$.

EXERCICE C15.31 — Démontrer que la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array} \right.$$

ne possède aucune limite dans $\overline{\mathbf{R}}$ en $+\infty$.

EXERCICE C15.32 — Démontrer que la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sin\left(\frac{1}{x}\right) \end{array} \right.$$

ne possède aucune limite finie ou infinie en 0.

THÉORÈME C15.33 (COMPOSITION DE LIMITES)
Soients
(a) I et J des intervalles non vides et non réduits à un point;
(b) a un point de I ou une de ses extrémités;
(c) b un point de J ou une de ses extrémités;
(d) $f: I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction;
(d) $g: J \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction telle que $f(I) \subset J$;
(e) $c \in \overline{\mathbf{R}}$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b \\ \\ g(x) \xrightarrow[x \to b]{} c \end{array} \right\} \Longrightarrow g(f(x)) \xrightarrow[x \to a]{} c\,.$$

Proposition C15.34 (opérations sur les limites)
Soient un intervalle I non vide et non réduit à un point, deux fonctions $f: I \longrightarrow \mathbf{R}$ et $g: I \longrightarrow \mathbf{R}$, $a \in \overline{\mathbf{R}}$ qui est un point de I ou une de ses extrémités, $(\ell_1, \ell_2) \in \mathbf{R}^2$ et $(\ell_1^*, \ell_2^*) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}^*$.

1) *Addition*
   (a) Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_1$ et $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_2$ alors $f(x) + g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_1 + \ell_2$.
   (b) Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_1$ et $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$ alors $f(x) + g(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$.
   (c) Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_1$ et $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$ alors $f(x) + g(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$.
   (d) Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$ et $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$ alors $f(x) + g(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$.
   (e) Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$ et $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$ alors $f(x) + g(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$.

2) *Multiplication par un scalaire λ non nul*
   (a) Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_1$ alors $\lambda f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \lambda \times \ell_1$.
   (b) Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$ alors $\lambda f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \mathrm{sgn}(\lambda) \times +\infty$.
   (c) Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$ alors $\lambda f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \mathrm{sgn}(\lambda) \times -\infty$.

3) *Multiplication de deux fonctions*
   (a) Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_1$ et $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_2$ alors $f(x)g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_1 \ell_2$.
   (b) Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_1^*$ et $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$ alors $f(x)g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \mathrm{sgn}(\ell_1^*) \times +\infty$.
   (c) Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_1^*$ et $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$ alors $f(x)g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \mathrm{sgn}(\ell_1^*) \times -\infty$.
   (d) Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$ et $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$ alors $f(x)g(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$.
   (e) Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$ et $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$ alors $f(x)g(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$.
   (f) Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$ et $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$ alors $f(x)g(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$.

4) *Quotient de deux fonctions*
   (a) Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_1$ et $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_2^*$ alors $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} \dfrac{\ell_1}{\ell_2^*}$.
   (b) Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_1$ et $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$ alors $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 0$.
   (c) Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_1$ et $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$ alors $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 0$.
   (d) Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$ et $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_2^*$ alors $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} \mathrm{sgn}(\ell_2^*) \times +\infty$.
   (e) Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$ et $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_2^*$ alors $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} \mathrm{sgn}(\ell_2^*) \times -\infty$.

EXERCICE C15.35 — 1) Soit $\alpha \in \mathbf{R}^*$. Démontrer que $\dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ à l'aide de la notion de dérivabilité.

2) Démontrer que $\dfrac{\sqrt{1+\sin(x)}-1}{\ln(1+2x)} \xrightarrow[x\to 0]{} \dfrac{1}{4}$.

EXERCICE C15.36 — Étudier la limite éventuelle de $\left(3\times 2^{\frac{1}{x}} - 2\times 3^{\frac{1}{x}}\right)^x$ lorsque x tend vers ∞.

PROPOSITION C15.37 (PASSAGE À LA LIMITE DANS UNE INÉGALITÉ LARGE)
Soient
(a) I un intervalle non vide et non réduit à un point;
(b) a un point de I ou une de ses extrémités;
(c) $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$, $g\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ et $h\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ des fonctions;
(d) $(\ell_1, \ell_2, \ell_3) \in \overline{\mathbf{R}} \times \overline{\mathbf{R}} \times \overline{\mathbf{R}}$.
Si $f \leqslant g \leqslant h$ au voisinage de a, $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_1$, $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_2$ et $h(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_3$ alors $\ell_1 \leqslant \ell_2 \leqslant \ell_3$.

EXERCICE C15.38 — Soient les fonctions

$$f \left| \begin{array}{ccc}]3,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right. \qquad g \left| \begin{array}{ccc}]3,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2+x-3 \end{array} \right. .$$

Justifier $f < g$, étudier les limites éventuelles de f et g en 3, puis commenter.

PROPOSITION C15.39 (EXISTENCE D'UNE LIMITE FINIE PAR ENCADREMENT)
Soient
(a) I un intervalle non vide et non réduit à un point;
(b) a un point de I ou une de ses extrémités;
(c) $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$, $g\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ et $h\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ des fonctions;
(d) $\ell \in \mathbf{R}$.
Si $f \leqslant g \leqslant h$ au voisinage de a, $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ et $h(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ alors $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.

EXERCICE C15.40 — Soit la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \end{array} \right. .$$

Étudier les limites éventuelles de f en 0 et en $+\infty$.

PROPOSITION C15.41 (CRITÈRE POUR AVOIR LA LIMITE $+\infty$ PAR MINORATION)
Soient
(a) I un intervalle non vide et non réduit à un point;
(b) a un point de I ou une de ses extrémités;
(c) $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ et $g\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ des fonctions.
Si $f \leqslant g$ au voisinage de a, $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$, alors $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$.

EXERCICE C15.42 — Soit la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 3x - \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \cos\left(x^2 - 1\right) \end{array} \right. .$$

Étudier la limite éventuelle de f en $+\infty$.

PROPOSITION C15.43 (CRITÈRE POUR AVOIR LA LIMITE $-\infty$ PAR MAJORATION)
Soient
(a) I un intervalle non vide et non réduit à un point;
(b) a un point de I ou une de ses extrémités;
(c) $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ et $g\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ des fonctions.
Si $f \leqslant g$ au voisinage de a, $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$, alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$.

THÉORÈME C15.44 (DE LA LIMITE MONOTONE)
Soient $(a, b) \in \overline{\mathbf{R}} \times \overline{\mathbf{R}}$ tel que $a < b$ et $I :=]a, b[$.
1) Soit $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction croissante sur I.

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \begin{cases} \inf\limits_I f \in \mathbf{R} & \text{si } f \text{ est minorée sur } I \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad f(x) \xrightarrow[x \to b]{} \begin{cases} \sup\limits_I f \in \mathbf{R} & \text{si } f \text{ est majorée sur } I \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

2) Soit $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction décroissante sur I.

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \begin{cases} \sup\limits_I f \in \mathbf{R} & \text{si } f \text{ est majorée sur } I \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad f(x) \xrightarrow[x \to b]{} \begin{cases} \inf\limits_I f \in \mathbf{R} & \text{si } f \text{ est minorée sur } I \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

EXERCICE C15.45 — Justifier que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $-1 < \operatorname{th}(x) < 1$.

EXERCICE C15.46 — Soit la fonction

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} \, \mathrm{d}t \end{array} \right. .$$

1) Étudier la parité de la fonction φ puis ses variations sur $\mathbf{R}_+$.
2) Justifier que, pour tout $t \geqslant 1$, $e^{-t^2} \leqslant e^{-t}$ et en déduire que la fonction φ est bornée sur $\mathbf{R}$.
3) Que peut-on dire des limites éventuelles de la fonction φ en $-\infty$ et en $+\infty$?

EXERCICE C15.47 — Soient deux fonctions $f\colon]0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ et $g\colon]0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ telles que
(a) g est décroissante sur $]0, +\infty[$;
(b) $f \leqslant g$ sur $]0, +\infty[$;
(c) f possède une limite finie en 0.
Démontrer que g possède une limite finie en 0, puis comparer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$.

EXERCICE C15.48 — Soit $A := \left\{ \displaystyle\int_\varepsilon^1 \ln(t) \, \mathrm{d}t \ : \ \varepsilon \in]0, 1] \right\}$. Justifier que $\inf(A)$ et $\sup(A)$ existent dans $\mathbf{R}$, puis déterminer ces deux nombres.

§ 2. QUELQUES OUTILS POUR ÉTUDIER UNE LIMITE DE FONCTION

Supposons donnée une fonction f définie sur un voisinage d'un point $a \in \overline{\mathbf{R}}$ et prenant des valeurs réels. Pour étudier l'existence de la limite de f en a et la calculer, le cas échéant, on peut appliquer les outils suivants.

(1) La continuité des fonctions usuelles.

(2) Les limites des fonctions usuelles aux bornes de leurs ensembles de définition.

(3) Les opérations algébriques licites sur les limites, cf. C15.34. $0 \times \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ et $1^{+\infty}$ sont indéterminées.

(4) Le théorème sur les compositions de limites, à appliquer avec soin, cf. C15.33.

(5) La dérivabilité d'une fonction en un point : si f est une fonction définie au voisinage d'un réel x_0 et dérivable en x_0 alors

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} f'(x_0)\,.$$

Ce résultat livre une information précieuse sur la vitesse à laquelle la quantité $f(x)-f(x_0)$ tend vers 0 lorsque x tend vers x_0. Des cas particuliers, fort utiles pour lever des indéterminations du type $\frac{0}{0}$, sont

$$\frac{e^x-1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \qquad \frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \qquad \frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \qquad \frac{(1+x)^\alpha-1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \alpha$$

où $\alpha \in \mathbf{R}^*$.

(6) Les limites

$$\frac{1-\cos(x)}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{ch}(x)-1}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}$$

qui ont été établies respectivement dans les exercices TD2.21 et C15.62 sont aussi précieuses pour pour lever des indéterminations du type $\frac{0}{0}$.

(7) Les résultats sur les croissances comparées, cf. propriété C8.116 : si $(\alpha,\beta) \in \mathbf{R}_{>0} \times \mathbf{R}_{>0}$ alors

$$\frac{\exp(\alpha x)}{x^\beta} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \qquad |x|^\alpha e^{\beta x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0 \qquad \frac{\ln^\alpha(x)}{x^\beta} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \qquad |x|^\alpha\,|\ln(x)|^\beta \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0\,.$$

EXERCICE C15.49 — Étudier la limite éventuelle de $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)}$ en $+\infty$.

EXERCICE C15.50 — Étudier la limite éventuelle de $f : x \longmapsto x^{\frac{1}{x-1}}$ lorsque x tend vers 1.

EXERCICE C15.51 — Étudier la limite éventuelle de $f : x \longmapsto \dfrac{\cos(3x)-1}{\sin^2(2x)}$ en 0.

EXERCICE C15.52 — Étudier la limite éventuelle de $f : x \longmapsto \dfrac{2^x-1}{3^x-1}$ en 0.

Exercice C15.53 — Étudier la limite éventuelle de $f\colon x \longmapsto \mathrm{sh}(2x)\,(\mathrm{th}(x)-1)$ en $-\infty$.

Exercice C15.54 — Étudier la limite éventuelle de $f\colon x \longmapsto \dfrac{1-\cos(x)}{\sin(x)\left(\sqrt{1+x}-1\right)}$ en 0.

Exercice C15.55 — Étudier la limite éventuelle de $f\colon x \longmapsto \ln(x)\left(1-e^{\frac{1}{x}}\right)$ en $+\infty$.

Exercice C15.56 — Étudier la limite éventuelle de $f\colon x \longmapsto \dfrac{2\tan(x)-\sin(2x)}{\sin^3(x)}$ en 0.

Exercice C15.57 — Étudier la limite éventuelle de $f\colon x \longmapsto \dfrac{\mathrm{Arcsin}\,(\ln(1+3x))}{\mathrm{Arctan}\left(\sqrt[3]{1+x}-1\right)}$ en 0.

Exercice C15.58 — Étudier la limite éventuelle de $f\colon x \longmapsto (\ln(x)-1)\ln(x-e)$ lorsque x tend vers e^+.

Exercice C15.59 — Étudier la limite éventuelle de $f\colon x \longmapsto x^2 - x\lfloor x\rfloor$ en $+\infty$.

Exercice C15.60 — Étudier la limite éventuelle de $f\colon x \longmapsto \left(\mathrm{Arctan}(x)-\dfrac{\pi}{2}\right)e^x$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice C15.61 — Étudier la limite éventuelle de $f\colon x \longmapsto \left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice C15.62 — 1) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{ch}(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{sh}(t)}{2}(x-t)^2\,\mathrm{d}t$.

2) En déduire que, pour tout $x>0$, $0 \leqslant \dfrac{\mathrm{ch}(x)-1}{x^2} - \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{x\,\mathrm{sh}(x)}{2}$.

3) Démontrer $\dfrac{\mathrm{ch}(x)-1}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} \dfrac{1}{2}$.

4) Étudier la limite éventuelle de $f\colon x \longmapsto \dfrac{\mathrm{ch}(x)-1}{\mathrm{sh}^2(x)}$ en 0.

§ 3. Limite d'une fonction à droite (resp. à gauche)

Définition C15.63 (limite finie en un point réel à droite pour une fonction)
Soient
(a) un intervalle I un intervalle non vide et non réduit à un point ;
(b) a un réel qui est un point de I ou son extrémité gauche ;
(c) une fonction $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$;
(d) $\ell \in \mathbf{R}$.
On dit que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a par la droite et on note, $f(x) \xrightarrow[x\to a^+]{} \ell$, si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad a < x \leqslant a + \delta \Longrightarrow \left| f(x) - \ell \right| \leqslant \varepsilon .$$

Illustration d'une fonction ayant une limite finie en un point réel à droite

Exemple C15.64 — Soit la fonction $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$. Alors $f(x) \xrightarrow[x\to 2^+]{} 2$.

Définition C15.65 (limite $+\infty$ en un point réel à droite pour une fonction)
Soient
(a) un intervalle I un intervalle non vide et non réduit à un point ;
(b) a un réel qui est un point de I ou son extrémité gauche ;
(c) une fonction $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$.
On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a par la droite et on note, $f(x) \xrightarrow[x \to a^+]{} +\infty$, si

$$\forall\, A \in \mathbf{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall\, x \in I \quad a < x \leqslant a + \delta \Longrightarrow f(x) \geqslant A\,.$$

Illustration d'une fonction ayant $+\infty$ pour limite en un point réel à droite

Exemple C15.66 — Soit la fonction $f :]1, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}\,,\ x \longmapsto \dfrac{2}{x-1}$. Alors $f(x) \xrightarrow[x \to 1^+]{} +\infty$.

DÉFINITION C15.67 (LIMITE $-\infty$ EN UN POINT RÉEL À DROITE POUR UNE FONCTION)
Soient
(a) un intervalle I un intervalle non vide et non réduit à un point;
(b) a un réel qui est un point de I ou son extrémité gauche;
(c) une fonction $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$.
On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a par la droite et on note, $f(x) \xrightarrow[x\to a^+]{} -\infty$, si

$$\forall B \in \mathbf{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad a < x \leqslant a+\delta \Longrightarrow f(x) \leqslant B\,.$$

ILLUSTRATION D'UNE FONCTION AYANT POUR LIMITE $-\infty$ EN UN POINT RÉEL À DROITE

EXEMPLE C15.68 — Soit la fonction $f :]3,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}\,,\ x \longmapsto \dfrac{1}{3-x}$. Alors $f(x) \xrightarrow[x\to 3^+]{} -\infty$.

DÉFINITION C15.69 (LIMITE FINIE EN UN POINT RÉEL À GAUCHE POUR UNE FONCTION)

Soient

(a) un intervalle I un intervalle non vide et non réduit à un point ;

(b) a un réel qui est un point de I ou son extrémité droite ;

(c) une fonction $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$;

(d) $\ell \in \mathbf{R}$.

On dit que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a par la gauche et on note, $f(x) \xrightarrow[x \to a^-]{} \ell$, si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad a - \delta \leqslant x < a \Longrightarrow \left| f(x) - \ell \right| \leqslant \varepsilon \,.$$

ILLUSTRATION D'UNE FONCTION AYANT UNE LIMITE FINIE EN UN POINT RÉEL À GAUCHE

EXEMPLE C15.70 — Soit la fonction $f :]-\infty, 0[\longrightarrow \mathbf{R}\,,\ x \longmapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Alors $f(x) \xrightarrow[x \to 0^-]{} 0$.

DÉFINITION C15.71 (LIMITE $+\infty$ EN UN POINT RÉEL À GAUCHE POUR UNE FONCTION)
Soient
(a) un intervalle I un intervalle non vide et non réduit à un point ;
(b) a un réel qui est un point de I ou son extrémité droite ;
(c) une fonction $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$.
On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a par la gauche et on note, $f(x) \xrightarrow[x \to a^-]{} +\infty$, si

$$\forall A \in \mathbf{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad a - \delta \leqslant x < a \Longrightarrow f(x) \geqslant A\,.$$

ILLUSTRATION D'UNE FONCTION AYANT POUR LIMITE $+\infty$ EN UN POINT RÉEL À GAUCHE

EXEMPLE C15.72 — Soit la fonction $f :]-\infty, 2[\longrightarrow \mathbf{R}\,,\ x \longmapsto \dfrac{1}{(x-2)^2}$. Alors $f(x) \xrightarrow[x \to 2^-]{} +\infty$.

DÉFINITION C15.73 (LIMITE $-\infty$ EN UN POINT RÉEL À GAUCHE POUR UNE FONCTION)
Soients
(a) un intervalle I un intervalle non vide et non réduit à un point;
(b) a un réel qui est un point de I ou son extrémité droite;
(c) une fonction $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$.
On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a par la gauche et on note, $f(x) \xrightarrow[x\to a^-]{} -\infty$, si

$$\forall B \in \mathbf{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad a-\delta \leqslant x < a \Longrightarrow f(x) \leqslant B\,.$$

ILLUSTRATION D'UNE FONCTION AYANT POUR LIMITE $-\infty$ EN UN POINT RÉEL À GAUCHE

EXEMPLE C15.74 — Soit la fonction $f\colon]\pi,2\pi[\longrightarrow \mathbf{R}\,,\ x \longmapsto \dfrac{1}{\sin(x)}$. Alors $f(x) \xrightarrow[x\to 2\pi^-]{} -\infty$.

PROPOSITION-DÉFINITION C15.75 (LIMITE À DROITE/GAUCHE)
Soient
(a) un intervalle I un intervalle non vide et non réduit à un point ;
(b) a un réel qui est un point de I ou son extrémité gauche ;
(c) b un réel qui est un point de I ou son extrémité droite ;
(d) une fonction $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$.
Alors
1) si f possède une limite en a à droite alors celle-ci est unique et on la note $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$;
2) si f possède une limite en b à gauche alors celle-ci est unique et on la note $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x)$.

REMARQUE C15.76 — Soient I un intervalle non vide et non réduit à un point, $a \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction. Alors

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(f(x) \xrightarrow[x\to a-]{} f(a) \text{ et } f(x) \xrightarrow[x\to a+]{} f(a) \right).$$

§ 4. CONTINUITÉ EN UN POINT

DÉFINITION C15.77 (CONTINUITÉ EN UN POINT)
Soient
(a) un intervalle I un intervalle non vide et non réduit à un point ;
(b) a un point de I ;
(c) une fonction $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$.
La fonction f est dite continue au point a si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a)$.

PROPOSITION C15.78 (CONTINUITÉ DES FONCTIONS USUELLES)
(a) Une fonction polynomiale est continue sur $\mathbf{R}$.
(b) Une fontion rationnelle (quotient de deux fonctions polynomiales) est continue en tout point de son ensemble de définition.
(c) La fonction $\exp_a$ $(a > 0)$ est continue en tout point de $\mathbf{R}$.
(d) La fonction $\log_a$ $(a > 1)$ est continue en tout point de $]0, +\infty$.
(e) La fonction $x \longmapsto x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbf{R})$ est continue en tout point de $]0, +\infty[$.
(f) Les fonctions $\cos, \sin, \mathrm{sh}, \mathrm{ch}$ et th sont continues en tout point de $\mathbf{R}$.
(g) Les fonctions Arccos et Arcsin sont continues en tout point de $[-1, 1]$.
(h) La fonction tan est continue en tout point de $\mathbf{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbf{Z} \right\}$.
(i) La fonction Arctan est continue en tout point de $\mathbf{R}$.

EXEMPLE C15.79 — La fonction partie entière

$$\lfloor \cdot \rfloor \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \text{l'unique entier relatif } n \text{ tel que } n \leqslant x < n+1 \end{array} \right.$$

est continue en tout point de $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ et discontinue en tout point de $\mathbf{Z}$.

Exercice C15.80 — Étudier la continuité en chaque point de $\mathbf{R}$ de la fonction suivante.

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

Exercice C15.81 — Étudier la continuité en chaque point de $\mathbf{R}$ de la fonction suivante.

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

Définition C15.82 (fonction prolongeable par continuité)
Soient
(a) I un intervalle de $\mathbf{R}$ non vide et non réduit à un point ;
(b) a un point de I ou une de ses extrémités ;
(c) $f : I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction.
Alors
1) si $a \in I$ alors on dit que f est prolongeable par continuité en a s'il existe $\ell \in \mathbf{R}$ tel que

$$f(x) \xrightarrow[x \to a^-]{} \ell \text{ et } f(x) \xrightarrow[x \to a^+]{} \ell$$

2) si a est la borne gauche de I alors on dit que f est prolongeable par continuité en a s'il existe $\ell \in \mathbf{R}$ tel que

$$f(x) \xrightarrow[x \to a^+]{} \ell$$

3) si a est la borne droite de I alors on dit que f est prolongeable par continuité en a s'il existe $\ell \in \mathbf{R}$ tel que

$$f(x) \xrightarrow[x \to a^-]{} \ell\,.$$

Dans le cas où la fonction f est prolongeable par continuité en a, on définit le prolongement par continuité de f par

$$\tilde{f} \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases} \end{array} \right.$$

où ℓ est le nombre réel introduit en 1) ou 2) ou 3).

Exercice C15.83 — Les fonctions

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \end{array} \right.$$

sont-elles prolongeables par continuité ?

DÉFINITION C15.84 (CONTINUITÉ EN UN POINT À DROITE/GAUCHE)
Soient
(a) un intervalle I un intervalle non vide et non réduit à un point;
(b) une fonction $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$.
1) Soit a un point de I qui n'est pas l'extrémité droite de I. La fonction f est dite continue au point a à droite si $f(x) \xrightarrow[x\to a^+]{} f(a)$;
2) Soit a un point de I qui n'est pas l'extrémité gauche de I. La fonction f est dite continue au point a à gauche si $f(x) \xrightarrow[x\to a^-]{} f(a)$;

EXEMPLE C15.85 — La fonction partie entière est continue à droite en tout point de $\mathbf{R}$.

EXERCICE C15.86 — Étudier la continuité à droite et à gauche en 0 de la fonction suivante.

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \sqrt{x}\ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1-\cos(x)}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

PROPOSITION C15.87 (CARACTÉRISATION SÉQUENTIELLE DE LA CONTINUITÉ)
Soient
(a) un intervalle I un intervalle non vide et non réduit à un point;
(b) a un point de I;
(c) une fonction $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$.
Alors la fonction f est continue au point a si et seulement si, pour tout $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in I^{\mathbf{N}}$ telle que $u_n \longrightarrow a$, $f(u_n) \longrightarrow f(a)$.

EXERCICE C15.88 — Démontrer que la fonction suivante n'est continue en aucun point de $\mathbf{R}$.

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbf{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbf{Q} \end{cases} \end{array} \right.$$

THÉORÈME C15.89 (OPÉRATIONS ALGÉBRIQUES SUR LES FONCTIONS CONTINUES)
Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$, $a \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$, $g : I \longrightarrow \mathbf{R}$ des fonctions continues en a.
1) Si $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$ alors la fonction $\lambda f + \mu g$ est continue au point a.
2) La fonction $f \times g$ est continue au point a.
3) Si la fonction g ne s'annule pas sur I alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue au point a.

THÉORÈME C15.90 (COMPOSÉE DE DEUX FONCTIONS CONTINUES)
Soient
(a) I et J des intervalles ;
(b) $a \in I$;
(c) $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction telle que $f(I) \subset J$;
(c) $g : J \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction.
Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$, alors la fonction $g \circ f$ est continue en a.

EXERCICE C15.91 — Justifier la continuité de la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \cos(3x+2) - \dfrac{\operatorname{Arctan}(x)}{x^2+1} + x^2 \ln(x) \end{array} \right.$$

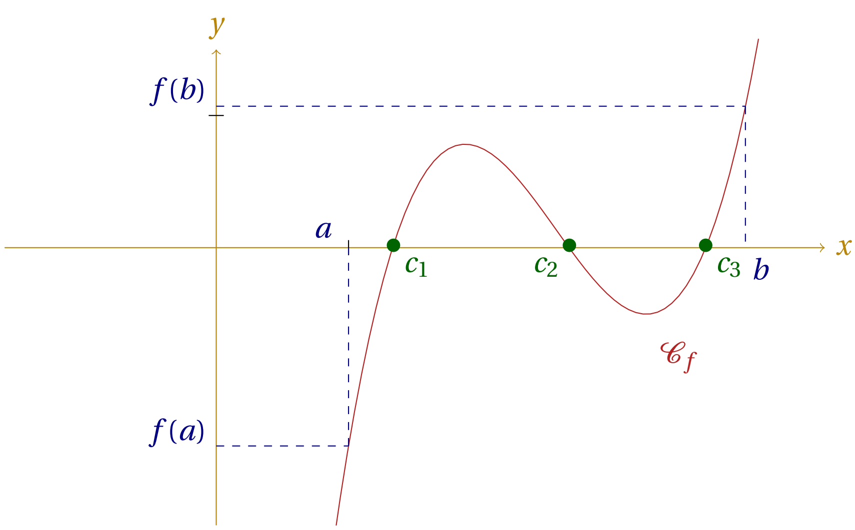
au point a, pour tout $a > 0$.

§ 5. CONTINUITÉ SUR UN INTERVALLE

DÉFINITION C15.92 (FONCTION CONTINUE SUR UN INTERVALLE)
Soient I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction. On dit que la fonction f est continue sur I si elle est continue en tout point de I.

THÉORÈME C15.93 (DES VALEURS INTERMÉDIAIRES)
Soient
(a) I un intervalle non vide et non réduit à un point ;
(b) $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur l'intervalle I ;
(c) a et b des points de I tel que $a < b$;
(d) y un point de $\mathbf{R}$ compris entre les valeurs $f(a)$ et $f(b)$ de f.
Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = y$.

ILLUSTRATION DU THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES



COROLLAIRE C15.94 (IMAGE CONTINUE D'UN INTERVALLE)
Si I est un intervalle non vide et $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction continue sur I alors

$$f(I) = \left\{f(x) \;:\; x \in I\right\}$$

est un intervalle.

EXERCICE C15.95 — Démontrer que l'équation $\dfrac{e^x}{2} = \cos(x)$ d'inconnue $x \in \mathbf{R}$ possède une solution.

EXERCICE C15.96 — Soient I un intervalle et $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur I, qui ne s'annule pas sur I. Démontrer que f garde un signe constant sur I.

EXERCICE C15.97 — Soit une fonction $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur $\mathbf{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = -1$ ou $f(x) = 1$. Démontrer que la fonction f est constante.

EXERCICE C15.98 — On définit la fonction f par

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 1 + \dfrac{1}{4}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \end{array} \right. .$$

Démontrer que $f(\mathbf{R}^*) = \left[\dfrac{3}{4}, \dfrac{5}{4}\right]$.

COROLLAIRE C15.99 (IMAGE D'UN INTERVALLE PAR UNE FONCTION CONTINUE STRICTEMENT MONOTONE)
Soit $(a,b) \in \overline{\mathbf{R}}$ tel que $a < b$.

1) Si $f\colon]a,b[\to \mathbf{R}$ est une fonction continue, strictement croissante alors $f(]a,b[) = \left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$.
2) Si $f\colon [a,b[\to \mathbf{R}$ est une fonction continue, strictement croissante alors $f([a,b[) = \left[f(a), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$.
3) Si $f\colon]a,b] \to \mathbf{R}$ est une fonction continue, strictement croissante alors $f(]a,b]) = \left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x), f(b)\right]$.
4) Si $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ est une fonction continue, strictement croissante alors $f([a,b]) = \left[f(a), f(b)\right]$.
5) Si $f\colon]a,b[\to \mathbf{R}$ est une fonction continue, strictement décroissante alors $f(]a,b[) = \left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x), \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$.
6) Si $f\colon [a,b[\to \mathbf{R}$ est une fonction continue, strictement décroissante alors $f([a,b[) = \left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x), f(a)\right]$.
7) Si $f\colon]a,b] \to \mathbf{R}$ est une fonction continue, strictement croissante alors $f(]a,b]) = \left[f(b), \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$.
8) Si $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ est une fonction continue, strictement croissante alors $f([a,b]) = \left[f(b), f(a)\right]$.

EXERCICE C15.100 — On définit la fonction f par

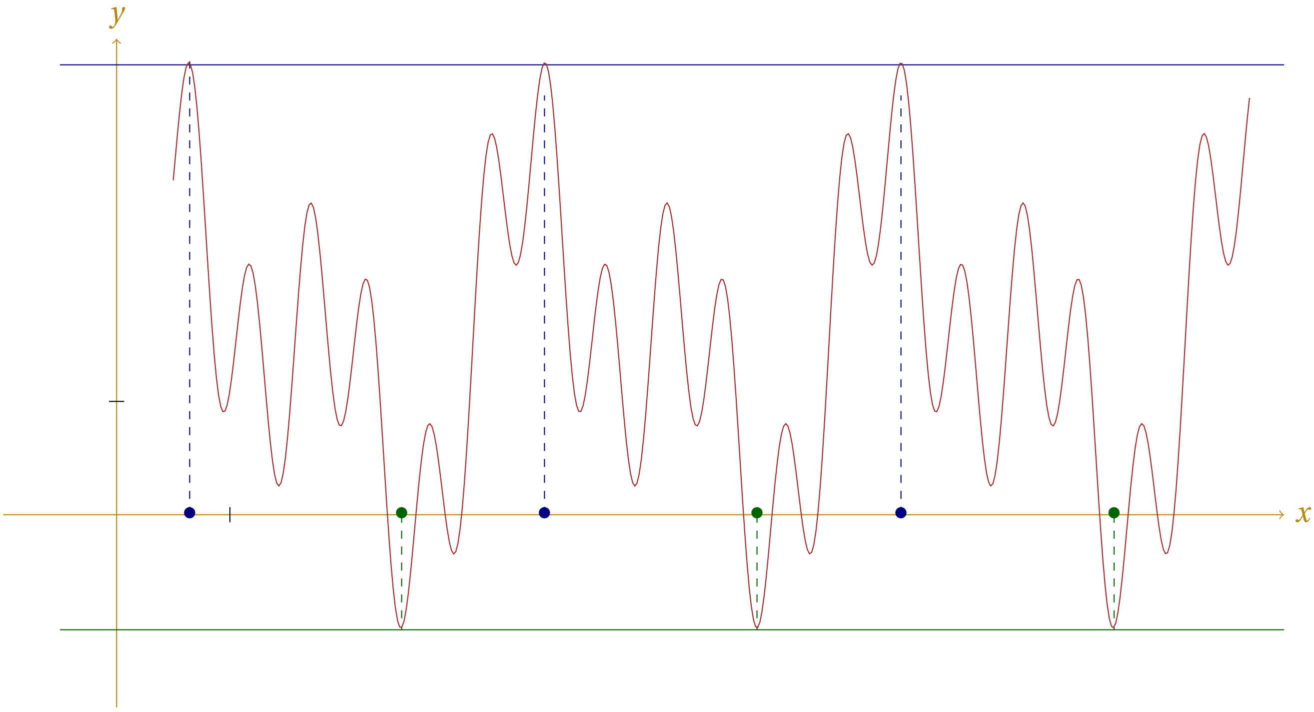
$$f \left| \begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & xe^{-x} \end{array} \right. .$$

Déterminer $f(]-1,+\infty[)$.

Théorème C15.101 (des bornes atteintes)
Soient a et b des réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur le segment $[a,b]$. Alors la fonction f est bornée et atteint ses bornes, i.e.

$$\exists (x_m, x_M) \in [a,b]^2 \quad \forall x \in [a,b] \quad f(x_m) \leqslant f(x) \leqslant f(x_M)\,.$$

Illustration du théorème des bornes atteintes



Exercice C15.102 — Soient a et b des réels tels que $a < b$.
1) Une fonction continue sur l'intervalle $[a,b[$ est-elle nécessairement bornée ?
2) Une fonction définie sur $[a,b]$ est-elle nécessairement bornée ?

Exercice C15.103 — Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur $[0,+\infty[$ qui possède une limite en $+\infty$.
1) Démontrer que la fonction f est bornée sur $[0,+\infty[$.
2) La fonction f atteint-elle nécessairement ses bornes sur $[0,+\infty[$?

Théorème C15.104 (image continue d'un segment)
Soient a et b des réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur le segment $[a,b]$. Alors

$$f([a,b]) = \left[\min_{[a,b]} f\,,\, \max_{[a,b]} f\right].$$

LEMME C15.105 (CRITÈRE POUR QU'UNE FONCTION SOIT STRICTEMENT MONOTONE)
Soient I un intervalle et $f: I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction. La fonction f est strictement monotone sur I si et seulement si, pour tout triplet (x, y, z) de points de I deux-à-deux distincts les trois rapports

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \quad , \quad \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \quad , \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

ont le même signe.

THÉORÈME C15.106 (FONCTION CONTINUE ET INJECTIVE SUR UN INTERVALLE)
Soient I un intervalle et $f: I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur I et injective. Alors la fonction f est strictement monotone sur I.

THÉORÈME C15.107 (DE LA BIJECTION ENRICHI)
Soient I un intervalle et $f: I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur I et strictement monotone. Alors f induit une bijection

$$\widetilde{f} \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & f(I) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

de I sur $f(I)$ et sa bijection réciproque

$$\widetilde{f}^{-1} \left| \begin{array}{ccc} f(I) & \longrightarrow & I \\ y & \longmapsto & \text{l'unique solution de l'équation } y = f(x) \text{ d'inconnue } x \text{ dans } I \end{array} \right.$$

est bijective, de même strictement monotonie que f et est continue sur l'intervalle $f(I)$.

Démonstration — • Considérons deux points y_1, y_2 de $f(I)$ tels que $y_1 \neq y_2$ et posons $x_1 := \widetilde{f}^{-1}(y_1) \in I$ et $x_2 := \widetilde{f}^{-1}(y_2) \in I$. Comme

$$\frac{\widetilde{f}^{-1}(y_2)-\widetilde{f}^{-1}(y_1)}{y_2-y_1} = \frac{\widetilde{f}^{-1}(y_2)-\widetilde{f}^{-1}(y_1)}{f\left(\widetilde{f}^{-1}(y_2)\right)-f\left(\widetilde{f}^{-1}(y_1)\right)} = \left(\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right)^{-1}$$

les deux quotients $\dfrac{\widetilde{f}^{-1}(y_2)-\widetilde{f}^{-1}(y_1)}{y_2-y_1}$ et $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ ont même signe. Ainsi si f est strictement croissante (resp. décroissante) alors $\widetilde{f}^{-1}$ est strictement croissante (resp. décroissante).
• Démontrons que l'application $\widetilde{f}^{-1}$ est continue sur $f(I)$ dans le cas particulier où $I =]a, b[$ avec $a < b$ réels et $f:]a, b[\longrightarrow \mathbf{R}$ est strictement croissante. Notons $A := \lim\limits_{a^+} f \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ $B := \lim\limits_{b^-} f \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$.
Soit $y_0 \in f(I) =]A, B[$ (cf. C15.99). Démontrons

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall y \in]A, B[\quad |y - y_0| \leqslant \delta \implies \left|\widetilde{f}^{-1}(y) - \widetilde{f}^{-1}(y_0)\right| \leqslant \varepsilon\,.$$

Soit $\varepsilon > 0$ que l'on peut supposer inférieur strictement à $\min\left\{\dfrac{\widetilde{f}^{-1}(y_0)-a}{2}, \dfrac{b-\widetilde{f}^{-1}(y_0)}{2}\right\} > 0$, de sorte que $\widetilde{f}^{-1}(y_0) - \varepsilon \in]a, b[$ et $\widetilde{f}^{-1}(y_0) + \varepsilon \in]a, b[$. Posons

$$\delta := \min\left\{y_0 - f\left(\widetilde{f}^{-1}(y_0)-\varepsilon\right), f\left(\widetilde{f}^{-1}(y_0)+\varepsilon\right) - y_0\right\} > 0 \qquad [f \text{ est strictement croissante}]\,.$$

Si $y \in [y_0 - \delta, y_0 + \delta] \subset \left[f\left(\widetilde{f}^{-1}(y_0)-\varepsilon\right), f\left(\widetilde{f}^{-1}(y_0)+\varepsilon\right)\right] \subset]A, B[= f(I)$ alors, comme $\widetilde{f}^{-1}$ est croissante

$$\widetilde{f}^{-1}(y_0) - \varepsilon \leqslant \widetilde{f}^{-1}(y) \leqslant \widetilde{f}^{-1}(y_0) + \varepsilon\,.$$

§ 6. Continuité des fonctions complexes

Définition C15.108 (continuité d'une fonction complexe)
Soient I un intervalle et $f\colon I \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction. La fonction f est continue sur I si

$$\forall\, t_0 \in I \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall\, t \in I \quad |t - t_0| \leqslant \delta \implies \left|f(t) - f(t_0)\right| \leqslant \varepsilon\,.$$

Proposition C15.109 (caractérisation de la continuité d'une fonction complexe)
Soient I un intervalle et $f\colon I \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction. On lui associe ses parties réelle et imaginaire définies par

$$\mathrm{Re}(f) \left|\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \mathrm{Re}(f(t)) \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(f) \left|\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \mathrm{Im}(f(t)) \end{array}\right. .$$

La fonction f est continue sur I si et seulement si les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont continues sur I.

Remarque C15.110 — 1) Les opérations (combinaison linéaire, produit, quotient, composition) établies pour les fonctions continues réelles se généralisent sans peine aux fonctions continues complexes.
2) En revanche, on ne peut pas étendre les résultats sur les fonctions continues réelles mettant en jeu l'ordre $\leqslant$ sur $\mathbf{R}$ (e.g. tout énoncé évoquant la monotonie) aux fonctions continues complexes.

Exercice C15.111 — Soit la fonction

$$f \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & e^{it} \end{array}\right. .$$

1) Démontrer que la fonction f est continue sur $\mathbf{R}$.
2) Justifier que la fonction f prend les valeurs -1 et 1, mais qu'elle ne prend pas la valeur 0. Commenter.

§ 7. Nombre dérivé, fonction dérivée

Définition C15.112 (dérivabilité en un point et nombre dérivé)
Soient
(a) I un intervalle non vide et non réduit à un point;
(b) a un point de I;
(c) $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction.

On dit que la fonction f est dérivable au point a si la fonction

$$\tau_a(f) \left|\begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array}\right.$$

possède une limite finie lorsque x tend vers a. Si tel est le cas, on appelle nombre dérivé de f en a le réel noté $f'(a)$ défini par

$$f'(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\,.$$

EXERCICE C15.113 — Soient la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 4x^3+3x^2+2x+1 \end{array} \right.$$

et $a \in \mathbf{R}$. Démontrer que la fonction f est dérivable en a et calculer $f'(a)$.

EXERCICE C15.114 — Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Étudier la dérivabilité de la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} |x|^\alpha \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

en 0.

DÉFINITION C15.115 (DÉVELOPPEMENT LIMITÉ À L'ORDRE 1)
Soient
(a) I un intervalle non vide et non réduit à un point;
(b) a un point de I;
(c) $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction.
On dit que f possède un développement limité à l'ordre 1 en a si

$$\exists (\alpha_0, \alpha_1) \in \mathbf{R}^2 \quad \exists \delta > 0 \quad \exists \varepsilon \in \mathbf{R}^{[a-\delta, a+\delta]} \quad \begin{cases} \forall x \in I \cap [a-\delta, a+\delta] \quad f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + (x-a)\varepsilon(x) \\ \text{et} \\ \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0\,. \end{cases}$$

PROPOSITION C15.116 (DÉRIVABILITÉ, NOMBRE DÉRIVÉ ET DL1)
Soient
(a) I un intervalle non vide et non réduit à un point;
(b) a un point de I;
(c) $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction.
Alors f est dérivable en a si et seulement si f possède un DL1 en a. Plus précisément
1) si f est dérivable en a, alors

$$\exists \delta > 0 \quad \exists \varepsilon \in \mathbf{R}^{[a-\delta, a+\delta]} \quad \begin{cases} \forall x \in I \cap [a-\delta, a+\delta] \quad f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon(x) \\ \text{et} \\ \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0\,. \end{cases}$$

2) si f possède le DL1 en a suivant

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + (x-a)\varepsilon(x) \quad \text{où} \quad \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0 \text{ et } (\alpha_0, \alpha_1) \in \mathbf{R}^2$$

alors $\alpha_0 = f(a)$, f est dérivable en a et $\alpha_1 = f'(a)$.

EXEMPLE C15.117 — La fonction $f : x \longmapsto \sqrt{1+x}$ est dérivable en 0 avec pour nombre dérivé $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.
Elle admet donc le DL1 en 0 suivant

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + x\varepsilon(x) \quad \text{où} \quad \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0\,.$$

Proposition C15.118 (la dérivabilité implique la continuité)
Soient
(a) I un intervalle non vide et non réduit à un point;
(b) a un point de I;
(c) $f: I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction.
Si la fonction f est dérivable au point a, alors elle est continue au point a.

Remarque C15.119 — Une fonction continue en un point n'est pas nécessairement dérivable en ce point. Un contre-exemple est donné par la fonction valeur absolue en 0.

Définition C15.120 (dérivabilité en un point à droite/gauche)
Soient
(a) un intervalle I un intervalle non vide et non réduit à un point;
(b) une fonction $f: I \longrightarrow \mathbf{R}$.
1) Soit a un point de I qui n'est pas l'extrémité droite de I. La fonction f est dite dérivable au point a à droite s'il existe $\delta \in \mathbf{R}$ tel que

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x \to a^+]{} \delta\,.$$

Si tel est le cas, on appelle nombre dérivé de f en a à droite le nombre noté $f'_d(x)$ défini par

$$f'_d(a) := \lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\,.$$

2) Soit a un point de I qui n'est pas l'extrémité gauche de I. La fonction f est dite dérivable au point a à gauche s'il existe $\gamma \in \mathbf{R}$ tel que

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x \to a^-]{} \gamma\,.$$

Si tel est le cas, on appelle nombre dérivé de f en a à gauche le nombre noté $f'_g(x)$ défini par

$$f'_g(a) := \lim_{\substack{x \to a \\ x<a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\,.$$

Remarque C15.121 — Soient un intervalle I un intervalle non vide et non réduit à un point, une fonction $f: I \longrightarrow \mathbf{R}$ et $a \in I$. La fonction f est dérivable au point I si et seulement si elle est dérivable à droite et à gauche en a avec $f'_g(a) = f'_d(a)$.

Exercice C15.122 — Soient $\alpha > 0$ et la fonction $f: x \longrightarrow x^\alpha$.
1) Préciser le domaine de définition de f.
2) Justifier que f est prolongeable par continuité en 0.
3) Étudier la dérivabilité en 0 à droite du prolongement par continuité de f en 0.

Exercice C15.123 — Soit $(a,b,c,d) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$. Étudier la dérivabilité en 0 de la fonction suivante.

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} ax^2+bx+1 & \text{si } x<0 \\ c & \text{si } x=0 \\ \sqrt{1+dx} & \text{si } x>0 \end{cases} \end{array} \right.$$

DÉFINITION C15.124 (DÉRIVABILITÉ SUR UN INTERVALLE ET FONCTION DÉRIVÉE)

Soient

(a) un intervalle I un intervalle non vide et non réduit à un point ;

(b) une fonction $f: I \longrightarrow \mathbf{R}$.

1) La fonction f est dite dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I.

2) Si f est dérivable sur I alors la fonction dérivée de f est la fonction notée f' définie par

$$f' \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) := \lim\limits_{\substack{y \to x \\ y \neq x}} \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \end{array} \right. .$$

THÉORÈME C15.125 (OPÉRATIONS ALGÉBRIQUES SUR LES FONCTIONS DÉRIVABLES)

Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$, $a \in I$ et $f: I \longrightarrow \mathbf{R}$, $g: I \longrightarrow \mathbf{R}$ des fonctions dérivables au point a.

1) Si $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$ alors la fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable au point a et

$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a) .$$

2) La fonction $f \times g$ est dérivable au point a et

$$(f \times g)'(a) = f'(a) \times g(a) + f(a) \times g'(a) .$$

3) Si la fonction g ne s'annule pas sur I alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue au point a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \times g(a) - f(a) \times g'(a)}{g(a)^2} .$$

THÉORÈME C15.126 (COMPOSÉE DE DEUX FONCTIONS DÉRIVABLES)

Soient

(a) I et J des intervalles ;

(b) $a \in I$;

(c) $f: I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction telle que $f(I) \subset J$;

(c) $g: J \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction.

Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$, alors la fonction $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a)) .$$

THÉORÈME C15.127 (DÉRIVABILITÉ ET DÉRIVÉE D'UNE RÉCIPROQUE)

Soient

1) I et J deux intervalles de $\mathbf{R}$;

2) $f: I \longrightarrow J$ une fonction bijective et dérivable sur I ;

3) $y_0 \in J$.

Alors

1) la fonction $f^{-1}: J \longrightarrow I$ est dérivable en y_0 si et seulement si $f'\left(f^{-1}(y_0)\right) \neq 0$;

2) si f^{-1} est dérivable en y_0 alors

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)} .$$

Rappel C15.128 — Les résultats sur la dérivabilités et les dérivées usuelles sont énoncés ci-dessous.

Fonction f	Nombre dérivé $f'(x)$ de f en $x \in \mathscr{D}'_f$	$\mathscr{D}'_f$
$f : x \longmapsto a \qquad (a \in \mathbf{R})$	$f'(x) = 0$	$\mathbf{R}$
$f : x \longmapsto x^n \qquad (n \in \mathbf{N}^*)$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbf{R}$
$f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^n} = x^{-n} \qquad (n \in \mathbf{N}^*)$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$	$\mathbf{R}^*$
$f : x \longmapsto x^\alpha := e^{\alpha \ln(x)} \qquad (\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z})$	$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbf{R}_{>0}$
$f : x \longmapsto \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbf{R}_{>0}$
$f : x \longmapsto \ln(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbf{R}_{>0}$
$f : x \longmapsto e^x$	$f'(x) = e^x$	$\mathbf{R}$
$f : x \longmapsto \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$\mathbf{R}$
$f : x \longmapsto \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	$\mathbf{R}$
$f : x \longmapsto \tan(x) := \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left] -\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi \right[$
$f : x \longmapsto \mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$	$f'(x) = \mathrm{sh}(x)$	$\mathbf{R}$
$f : x \longmapsto \mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$	$f'(x) = \mathrm{ch}(x)$	$\mathbf{R}$
$f : x \longmapsto \mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	$f'(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1 - \mathrm{th}^2(x)$	$\mathbf{R}$
Arcsin	$\mathrm{Arcsin}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1, 1[$
Arccos	$\mathrm{Arccos}'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1, 1[$
Arctan	$\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbf{R}$

Rappel C15.129 — Nous énonçons des résultats sur la dérivabilité et la dérivée de certaines composées usuelles. Les lettres I et J désignent des intervalles de $\mathbf{R}$

Nombre dérivé en $x \in I$	Contexte et hypothèse
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u(ax+b)) = a \times u'(ax+b) \qquad ((a,b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R})$	$x \in I \longmapsto ax+b \in J$, $u\colon J \longrightarrow \mathbf{R}_{>0}$ dérivable sur I
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u^{\alpha}(x)) = \alpha \times u'(x) \times u^{\alpha-1}(x) \qquad (\alpha \in \mathbf{R})$	$u\colon I \longrightarrow \mathbf{R}_{>0}$ dérivable sur I
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sqrt{u(x)}\right) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$u\colon I \longrightarrow \mathbf{R}_{>0}$ dérivable sur I
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin(u(x))) = u'(x) \times \cos(u(x))$	$u\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ dérivable sur I
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos(u(x))) = -u'(x) \times \sin(u(x))$	$u\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ dérivable sur I
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{u(x)}\right) = u'(x) \times e^{u(x)}$	$u\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ dérivable sur I
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln(u(x))) = \frac{u'(x)}{u(x)}$	$u\colon I \longrightarrow \mathbf{R}_{>0}$ dérivable sur I
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{Arcsin}(u(x))) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$	$u\colon I \longrightarrow]-1,1[$ dérivable sur I
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{Arctan}(u(x))) = \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$	$u\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ dérivable sur I

Exercice C15.130 — Soit la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & [1,+\infty[\\ x & \longmapsto & \mathrm{ch}(x)\,. \end{array} \right.$$

1) Justifier que la fonction f est définie.
2) À l'aide du théorème de la bijection enrichi, démontrer que la fonction f est bijective et que son application réciproque $f^{-1}\colon [1,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$ est continue sur $[1,+\infty[$.
3) Démontrer que f^{-1} est dérivable sur $]1,+\infty[$ puis calculer sa dérivée. On en donnera une expression simplifiée.

§ 8. Extremum local et point critique

Définition C15.131 (point critique)
Soient
(a) I un intervalle ;
(b) $a \in I$;
(c) $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable en a.
On dit que a est un point critique de f si $f'(0)$.

Définition C15.132 (extremum local)
Soient
(a) I un intervalle ;
(b) $a \in I$;
(c) $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction.
1) On dit que f atteint un maximum local au point a s'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in I \cap]a-\delta, a+\delta[\quad f(x) \leqslant f(a) .$$

2) On dit que f atteint un minimum local au point a s'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in I \cap]a-\delta, a+\delta[\quad f(x) \geqslant f(a) .$$

3) On dit que f atteint un extremum local au point a si f atteint un maximum local au point a ou si f atteint un minimum local au point a.

Exemple C15.133 — Considérons la fonction cube

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^3 . \end{array} \right.$$

Le point 0 est un point critique de f mais la fonction f n'atteint pas un extremum local en 0.

Exercice C15.134 — Soit la fonction f

$$f \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 3x-7 \end{array} \right.$$

dérivable sur $[0,1]$.
1) Déterminer les points où f atteint un extremum local.
2) Les points déterminés en 1) sont-ils des points critiques de f ? Commenter.

THÉORÈME C15.135 (CN D'EXTREMUM LOCAL EN UN POINT INTÉRIEUR)
Soient
(a) I un intervalle non vide et non réduit à un point;
(b) a un point de I qui n'est pas une extrémité de I (point intérieur à I);
(c) $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable au point a.
Si f admet un extremum local au point a alors $f'(a) = 0$.

Démonstration — Supposons que f admet un extremum local. Quitte à remplacer f par $-f$ on peut supposer que f admet un maximum local, i.e. qu'il existe $\delta_1 > 0$ tel que

$$\forall\, x \in I \cap [a-\delta_1, a+\delta_1] \quad f(x) \leqslant f(a)\,.$$

Comme a est un point intérieur à l'intervalle I, il existe $\delta_2 > 0$ tel que $[a-\delta_2, a+\delta_2] \subset I$. Ceci exprime de manière formelle l'idée intuitive que l'on dispose d'espace autour de a à gauche et à droite dans I.
En posant $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, nous avons

$$[a-\delta, a+\delta] \subset I \qquad \text{et} \qquad [a-\delta, a+\delta] \subset I \cap [a-\delta_1, a+\delta_1]$$

puis

$$\forall\, x \in [a-\delta, a+\delta] \quad f(x) \leqslant f(a)\,.$$

Pour tout $x \in [a-\delta, a[$, $f(x)-f(a) \leqslant 0$ et $x-a<0$, d'où $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0$. En faisant tendre x vers a par valeurs inférieures il vient $f'_g(a) \geqslant 0$.
Pour tout $x \in]a, a+\delta, a[$, $f(x)-f(a) \leqslant 0$ et $x-a>0$, d'où $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0$. En faisant tendre x vers a par valeurs supérieures il vient $f'_d(a) \leqslant 0$.
Nous en déduisons $0 \leqslant f'_g(a) = f'(a) = f'_d(a) \leqslant 0$.

EXERCICE C15.136 — Soit la fonction f définie par

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x+\sin(x)\,. \end{array} \right.$$

1) Justifier qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in [-\delta, \delta]$, $h + \cos(h) > 0$.
2) Déterminer les extrema locaux de la fonction f.
3) La fonction f possède-t-elle des extrema globaux?

§ 9. Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Théorème C15.137 (de Rolle)
Soient
1) a et b des réels tels que $a < b$;
2) $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur le segment $[a,b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$.
Si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème C15.138 (des accroissements finis)
Soient
1) a et b des réels tels que $a < b$;
2) $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur le segment $[a,b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$.
Il existe $c \in]a,b[$ tel que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

Exercice C15.139 — Majorer l'erreur commise dans l'approximation $\cos(1) \approx \dfrac{1}{2}$.

Exercice C15.140 — Soit $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction bornée et dérivable sur $\mathbf{R}$. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbf{R}$ tel que $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$. Démontrer que $\ell = 0$.

Exercice C15.141 — Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ non vide et non réduit à un point et $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable sur I. Soit $a \in I$ tel que f est continue en a et $f'(a) \neq 0$. Démontrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que la fonction

$$f_{|I\cap[a-\delta,a+\delta]} \left| \begin{array}{ccc} I\cap[a-\delta,a+\delta] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

est injective.

Exercice C15.142 — Soit $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable sur $[0,1]$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Démontrer que

$$\forall\, n \in \mathbf{N}^* \quad \exists\, (x_1,\dots,x_n) \in [0,1]^n \quad x_1 < \dots < x_n \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} f'(x_k) = n\,.$$

Définition C15.143 (application K-lipschitzienne)
Soient
(a) I un intervalle non vide et non réduit à un point;
(b) $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction;
(c) $K_+ \in \mathbf{R}$.
On dit que la fonction f est K-lipschitzienne sur I si

$$\forall\, (x,y) \in I^2 \quad \left|f(x)-f(y)\right| \leqslant K\left|x-y\right|\,.$$

PROPOSITION C15.144 (UNE APPLICATION LIPSCHIZIENNE EST CONTINUE)
Soient
(a) I un intervalle non vide et non réduit à un point;
(b) $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction;
(c) $K_+ \in \mathbf{R}$.
Si l'application f est K-lipschitzienne sur I alors elle est continue sur I.

EXERCICE C15.145 — Démontrer que l'application exponentielle, qui est continue sur $\mathbf{R}$, n'est pas lipschitzienne.

PROPOSITION C15.146 (INÉGALITÉ DES ACCROISSEMENTS FINIS)
Soient
(a) I un intervalle non vide et non réduit à un point;
(b) $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction une application dérivable sur I.
S'il existe $K \in \mathbf{K}$ tel que

$$\forall\, x \in I \quad \left|f'(x)\right| \leqslant K$$

alors la fonction f est K-lipschitzienne sur I.

EXERCICE C15.147 — Soit la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 1 + \dfrac{1}{4}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \end{array} \right. .$$

1) Déterminer $I = f(\mathbf{R}^*)$, puis démontrer que I est stable par f.
2) Démontrer que la fonction f est $\dfrac{4}{9}$-lipschitzienne sur I.
3) Soit (u_n) la suite définie par la donnée de $u_0 \in I$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout $n \in \mathbf{N}$. Démontrer que (u_n) converge vers l'unique point fixe α de f sur I et discuter la vitesse de convergence vers 0 de la suite $(u_n - \alpha)$.

PROPOSITION C15.148 (CARACTÉRISATION DES FONCTIONS DÉRIVABLES CONSTANTES)
Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable. Alors

$$f \text{ est constante sur } I \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\forall\, x \in I \quad f'(x) = 0\right)$$

THÉORÈME C15.149 (CARACTÉRISATION DES FONCTIONS DÉRIVABLES MONOTONES)
Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable.

$$(1) \quad f \text{ est croissante sur } I \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\forall\, x \in I \quad f'(x) \geqslant 0\right)$$

$$(2) \quad f \text{ est décroissante sur } I \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\forall\, x \in I \quad f'(x) \leqslant 0\right)$$

Théorème C15.150 (Caractérisation des fonctions dérivables strictement monotones)
Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable.

(1) f est strictement croissante sur I $\iff$ $\left\{\begin{array}{c} \forall\, x \in I \quad f'(x) \geqslant 0 \\ \text{et} \\ \forall\,(a,b) \in I^2 \quad a < b \Longrightarrow f'_{|[a,b]} \neq 0_{\mathscr{F}([a,b],\mathbf{R})} \end{array}\right.$

(2) f est strictement décroissante sur I $\iff$ $\left\{\begin{array}{c} \forall\, x \in I \quad f'(x) \leqslant 0 \\ \text{et} \\ \forall\,(a,b) \in I^2 \quad a < b \Longrightarrow f'_{|[a,b]} \neq 0_{\mathscr{F}([a,b],\mathbf{R})} \end{array}\right.$

Exercice C15.151 — Démontrer que l'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x + \sin(x) \end{array}\right.$$

est dérivable et strictement croissante sur $\mathbf{R}$, avec une dérivée qui s'annule une infinité de fois.

Théorème C15.152 (De la limite de la dérivée)
Soient
(a) I un intervalle non vide et non réduit à un point;
(b) un point a de I;
(c) $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction;
(d) $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$.
On suppose que la fonction f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et que $f'(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$. Alors
1) $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow[x \to a]{} \ell$;
2) si de plus $\ell \in \mathbf{R}$ alors f est dérivable en a, $f'(a) = \ell$ et f' est continue en a.

Exercice C15.153 — Soit la fonction f définie par

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \left\{\begin{array}{ll} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Démontrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que sa dérivée est continue sur $\mathbf{R}$.

§ 10. Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ où $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$

Définition C15.154 (Fonction de classe $\mathscr{C}^k$ où $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$)
Soit I un intervalle non vide et non réduit à un point.
1) Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ est dite de classe $\mathscr{C}^0$ sur I si elle est continue sur I.
2) Si $k \in \mathbf{N}^*$, alors une fonction $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ est dite de classe $\mathscr{C}^k$ sur I si elle est k fois dérivable sur I et si sa dérivée k-ième $f^{(k)}$ est continue sur I.
3) Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ est dite de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I si elle est indéfiniment dérivable sur I.

NOTATION C15.155 — Soient I un intervalle non vide et non réduit à un point et $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$. On pose

$$\mathscr{C}^k(I,\mathbf{R}) := \left\{ f \in \mathbf{R}^I \ : \ f \text{ est de classe } \mathscr{C}^k \text{ sur } I \right\}.$$

REMARQUE C15.156 — Soient I un intervalle non vide et non réduit à un point.

1) La suite $\left(\mathscr{C}^k(I,\mathbf{R})\right)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite décroissante de parties de $\mathbf{R}^I$ i.e.

$$\forall\, k \in \mathbf{N} \quad \mathscr{C}^{k+1}(I,\mathbf{R}) \subset \mathscr{C}^k(I,\mathbf{R}).$$

2) $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbf{R}) = \bigcap_{k\in\mathbf{N}} \mathscr{C}^k(I,\mathbf{R})$

3) Pour toute fonction $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} f \in \mathscr{C}^{k+1}(I,\mathbf{R}) &\iff f \in \mathscr{C}^k(I,\mathbf{R}) \text{ et } f^{(k)} \in \mathscr{C}^1(I,\mathbf{R}) \\ &\iff f \in \mathscr{C}^1(I,\mathbf{R}) \text{ et } f' \in \mathscr{C}^k(I,\mathbf{R}). \end{aligned}$$

EXERCICE C15.157 — Démontrer que la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

est dérivable sur $\mathbf{R}$, mais n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$. En effet, la fonction f' n'admet aucune limite lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures.

PROPOSITION C15.158 (RÉGULARITÉ DES FONCTIONS USUELLES)

1) Une fonction polynomiale est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et a ses dérivées itérées nulles à partir d'un certain rang.

2) Une fonction rationnelle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son domaine de définition.

3) La fonction $\sqrt{\cdot} : \mathbf{R}_{\geqslant 0} \longrightarrow \mathbf{R}$ est de classe $\mathscr{C}^0$ sur $\mathbf{R}_{\geqslant 0}$, non dérivable en 0 et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_{>0}$.

4) Si $\alpha \in \mathbf{R}$ alors la fonction $p_\alpha : \mathbf{R}_{>0} \longrightarrow \mathbf{R}\ ;\ x \longmapsto x^\alpha$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_{>0}$.

5) La fonction tan est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left] -\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi \right[$.

6) La fonction ln est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_{>0}$.

7) Les fonctions exp, ch, sh, th, cos, sin et Arctan sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.

8) Les fonctions Arcsin et Arccos sont de classe $\mathscr{C}^0$ sur $[-1,1]$, non dérivables en -1 et 1, et sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

PROPOSITION C15.159 (COMBINAISON LINÉAIRE DE FONCTIONS DE CLASSE $\mathscr{C}^k$ OÙ $k \in \mathbf{N}^* \cup \{\infty\}$)

Soient

(a) I un intervalle non vide et non réduit à un point ;

(b) $k \in \mathbf{N}^* \cup \{\infty\}$.

Alors, pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2$, pour tout $(f,g) \in \mathscr{C}^k(I,\mathbf{R})^2$

$$\lambda f + \mu g \in \mathscr{C}^k(I,\mathbf{R})$$

et

$$(\lambda f + \mu g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}.$$

PROPOSITION C15.160 (FORMULE DE LEIBNIZ)
Soient
(a) I un intervalle non vide et non réduit à un point ;
(b) $k \in \mathbf{N}^* \cup \{\infty\}$.
Si $(f,g) \in \mathscr{C}^k(I,\mathbf{R})^2$ alors la fonction

$$fg \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x)g(x) \end{array} \right.$$

est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I et

$$(fg)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)} .$$

EXERCICE C15.161 — Démontrer que la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & xe^x \end{array} \right.$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et calculer ses dérivées itérées.

PROPOSITION C15.162 (COMPOSÉE DE FONCTIONS DE CLASSE $\mathscr{C}^k$ OÙ $k \in \mathbf{N}^* \cup \{\infty\}$)
Soient
(a) I et J des intervalles non vides et non réduits à un point ;
(b) $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction telle que $f(I) \subset J$;
(c) $g : J \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction ;
(d) $k \in \mathbf{N}^* \cup \{\infty\}$.
Si $f \in \mathscr{C}^k(I,\mathbf{R})$ et $g \in \mathscr{C}^k(J,\mathbf{R})$ alors $g \circ f \in \mathscr{C}^k(I,\mathbf{R})$.

PROPOSITION C15.163 (QUOTIENT DE DEUX FONCTIONS DE CLASSE $\mathscr{C}^k$)
Soient
(a) I un intervalle non vide et non réduit à un point ;
(b) $k \in \mathbf{N}^* \cup \{\infty\}$.
Si $(f,g) \in \mathscr{C}^k(I,\mathbf{R})^2$ et si g ne s'annule pas sur I alors la fonction

$$\frac{f}{g} \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)}{g(x)} \end{array} \right.$$

est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.

PROPOSITION C15.164 (RÉCIPROQUE D'UNE FONCTION BIJECTIVE CLASSE $\mathscr{C}^k$)
Soient
(a) I et J deux intervalles non vides et non réduits à un point ;
(b) $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction ;
(c) $k \in \mathbf{N}^* \cup \{\infty\}$.
Si $f : I \longrightarrow J$ est une fonction bijective, de classe $\mathscr{C}^k$ sur I avec une dérivée qui ne s'annule pas sur I, alors la fonction

$$f^{-1} \left| \begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & I \\ y & \longmapsto & \text{l'unique } x \in I \text{ tel que } f(x) = y \end{array} \right.$$

est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J.