Chapitre n°14
Calcul matriciel et systèmes linéaires

§ 1. Opérations sur les matrices

Notation C14.1 — Dans tout ce chapitre, la lettre $\mathbf{K}$ désigne un corps et n, p, q, r des entiers naturels non nuls.

Définition C14.2 (matrice)

1) Une matrice A à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbf{K}$ est un tableau à n lignes et p colonnes

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2p} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} & \dots & a_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

2) L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbf{K}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

3) Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ on note $[A]_{i,j}$ le coefficient de A d'adresse (i,j), i.e. le coefficient de A situé sur la i-ème ligne et la j-ième colonne.

Exemple C14.3 — La matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{K})$, $[A]_{1,2} = -2$ et $[A]_{2,3} = 1$.

Définition C14.4 (addition de deux matrices)

Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})^2$. On définit la matrice $A+B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ par

$$[A+B]_{i,j} := [A]_{i,j} + [B]_{i,j}$$

pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$.

Exemple C14.5 — La somme des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -7 & -2 & -5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 11 & 1 & 9 \end{pmatrix}$ est $A+B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Proposition C14.6 (Structure de $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}), +)$)

1) $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}), +)$ est un groupe abélien.

2) L'élément neutre de $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}), +)$ est la matrice notée $0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ dont tous les coefficients sont nuls.

3) Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ alors sa matrice opposée, notée $-A$, vérifie

$$[-A]_{i,j} = -[A]_{i,j}$$

pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$.

Exercice C14.7 — Expliciter la matrice $0_{\mathcal{M}_{3,2}(\mathbf{K})}$ et l'opposée de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 6 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbf{K})$.

Définition C14.8 (multiplication d'une matrice par un scalaire)
Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. On définit la matrice $\lambda \cdot A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ par

$$[\lambda \cdot A]_{i,j} := \lambda \times [A]_{i,j}$$

pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$.

Exemple C14.9 — Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ alors $5 \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 35 & -15 \\ -15 & -10 & 5 \end{pmatrix}$.

Proposition C14.10 (Structure de $\left(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}), +, \cdot\right)$)
1) $\left(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}), +\right)$ est un groupe abélien.
2) Pour tout $(\lambda, \mu, M) \in \mathbf{K} \times \mathbf{K} \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$

$$\lambda \cdot (\mu \cdot M) = (\lambda \times \mu) \cdot M$$

3) Pour tout $(\lambda_1, \lambda_2, M) \in \mathbf{K} \times \mathbf{K} \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot M = \lambda_1 \cdot M + \lambda_2 \cdot M$$

4) Pour tout $(\lambda, M_1, M_2) \in \mathbf{K} \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$

$$\lambda \cdot (M_1 + M_2) = \lambda \cdot M_1 + \lambda \cdot M_2$$

5) Pour tout $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $1 \cdot M = M$.

Ces propriétés étant vérifiées, on dit que $\left(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}), +, \cdot\right)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

Définition C14.11 (combinaison linéaire)
Soient $A_1, A_2, \ldots, A_r$ des matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.
1) On appelle combinaison linéaire des matrices $A_1, \ldots, A_r$ toute matrice de la forme

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \cdot A_k = \lambda_1 \cdot A_1 + \lambda_2 \cdot A_2 + \ldots + \lambda_r \cdot A_r$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ sont des éléments de $\mathbf{K}$.
2) L'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de $\mathbf{K}$ est noté $\mathrm{Vect}(A_1, A_2, \ldots, A_r)$, i.e.

$$\mathrm{Vect}(A_1, A_2, \ldots, A_r) := \left\{ \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \cdot A_k \ : \ (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) \in \mathbf{K}^r \right\}.$$

Exercice C14.12 — 1) Justifier que $A := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire de $I_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J_2 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Justifier que $B := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ n'est pas combinaison linéaire de I_2 et J_2.

Proposition C14.13 (Structure d'un ensemble de combinaisons linéaires de matrices)
Soient $A_1, A_2, \dots, A_r$ des matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.
1) $\operatorname{Vect}(A_1, A_2, \dots, A_r)$ est un sous-groupe de $\left(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K}), +\right)$.
2) Pour tout $(\lambda, A) \in \mathbf{K} \times \operatorname{Vect}(A_1, A_2, \dots, A_r)$

$$\lambda.A \in \operatorname{Vect}(A_1, A_2, \dots, A_r)$$

Ces propriétés étant vérifiées, on dit que $\operatorname{Vect}(A_1, A_2, \dots, A_r)$ est un sous-espace vectoriel de $\left(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K}), +, \cdot\right)$.

Définition C14.14 (symbole de Kronecker)
Pour couple d'entiers naturels non nuls (i,j) le symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$ est défini par

$$\delta_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{si } i = j\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définition C14.15 (matrice élémentaire)
Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$. La matrice $E_{i,j}$ est l'élément de $\mathscr{M}_{n,p}$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui d'adresse (i,j) qui vaut 1, i.e.

$$\left[E_{i,j}\right]_{k,\ell} = \delta_{ik} \times \delta_{j\ell} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \text{ et } \ell = j\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

pour tout $(k,\ell)[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$.

Exemple C14.16 — Dans $\mathscr{M}_{2,3}(\mathbf{K})$, $E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Proposition C14.17 (décomposition canonique d'une matrice)
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Alors

$$A = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} [A]_{i,j} \cdot E_{i,j}\,.$$

Exemple C14.18 — $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 7 \\ -3 & 4 & 8 \end{pmatrix} = 5 \cdot E_{1,1} + (-2) \cdot E_{1,2} + 7 \cdot E_{1,3} + (-3) \cdot E_{2,1} + 4 \cdot E_{2,2} + 8 \cdot E_{2,3}$.

Exercice C14.19 — Déterminer la partie $\operatorname{Vect}\left(\{E_{i,j} \,:\, (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]\}\right)$ de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

Définition C14.20 (produit matriciel)
1) Le produit $A \times B$ d'une matrice A par une matrice B est défini si le nombre de colonnes de A égale le nombre de lignes de B.
2) Soit $(A,B) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \times \mathscr{M}_{p,q}(\mathbf{K})$. Le produit $A \times B$ est la matrice de $\mathscr{M}_{n,q}(\mathbf{K})$ définie par

$$[A \times B]_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} [A]_{i,k} \times [B]_{k,j}$$

pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!]$.

EXERCICE C14.21 — Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -1 & 2 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$. Parmi les produits $A \times B$, $B \times A$, $A \times C$, $C \times A$, $B \times C$, $C \times B$ préciser lesquels sont définis et les calculer le cas échéant.

EXERCICE C14.22 — 1) Donner une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ telle que $M \neq 0_{\mathcal{M}_2(\mathbf{R})}$ et $M^2 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbf{R})}$.

2) Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$. Calculer le carré de la matrice $\begin{pmatrix} -ab & a^2 \\ -b^2 & ab \end{pmatrix}$.

EXERCICE C14.23 — Soient $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer $A \times B$ et $B \times A$, puis commenter.

PROPOSITION C14.24 (PROPRIÉTÉS DU PRODUIT MATRICIEL)

1) Pour tout $(A,B,C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K}) \times \mathcal{M}_{q,r}(\mathbf{K})$

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C) \qquad [\text{associativité}]\ .$$

2) Pour tout $(A,B,C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$

$$(A+B) \times C = A \times C + B \times C \qquad \left[\text{distributivité à gauche}\right]\ .$$

3) Pour tout $(A,B,C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$

$$A \times (B+C) = A \times B + A \times C \qquad [\text{distributivité à droite}]\ .$$

4) Pour tout $(\lambda, A, B) \in \mathbf{K} \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$

$$(\lambda \cdot A) \times B = \lambda \cdot (A \times B) = A \times (\lambda . B) \qquad \left[\text{compatibilité de} \cdot \text{et} \times\right]\ .$$

PROPOSITION C14.25 (PRODUIT DE DEUX MATRICES ÉLÉMENTAIRES)
Soient $E_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $E_{k,\ell} \in \mathcal{M}_{p,q}$ où $(i,j,k,\ell) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] \times [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$.

$$E_{i,j} \times E_{k,\ell} = \delta_{j,k} . E_{i,\ell} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbf{K})\ .$$

EXERCICE C14.26 — Déterminer l'ensemble $\mathrm{C}(A)$ des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$ qui commutent avec la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, i.e. écrire

$$\mathrm{C}(A) := \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})\ :\ A \times M = M \times A\}$$

sous forme d'un ensemble de combinaisons linéaires d'un nombre fini de matrices.

EXERCICE C14.27 — Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des éléments de $\mathbf{K}$ deux-à-deux distincts et $D = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot E_{i,i}$ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, les autres étant nuls. Déterminer l'ensemble $\mathrm{C}(D)$ des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ qui commutent avec la matrice D i.e. écrire

$$\mathrm{C}(D) := \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})\ :\ D \times M = M \times D\}$$

sous forme d'un ensemble de combinaisons linéaires d'un nombre fini de matrices.

Proposition C14.28 (produit par une matrice élémentaire à droite)

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $E_{i,j} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ où $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$.

$$A \times E_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} \cdot E_{k,j} \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbf{K}) \, .$$

La matrice $A \times E_{i,j}$ est donc la matrice de $\mathscr{M}_{n,q}(\mathbf{K})$ dont toutes les colonnes sont nulles, à l'exception de la j-ième qui est la i-ème colonne de A.

$$A \times E_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & [A]_{1,i} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & [A]_{2,i} & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & [A]_{n-1,i} & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & [A]_{n,i} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

j-ième colonne

Exemple C14.29 — Calculer les trois produits suivants.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Définition C14.30 (matrice identité)

On note I_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ dont les coefficients diagonaux valent 1 et les autres 0.

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} E_{i,i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Proposition C14.31 (produit par la matrice identité)

Pour tout $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$

$$M \times I_p = M \qquad \text{et} \qquad I_n \times M = M \, .$$

Proposition C14.32 (produit d'une matrice par un vecteur colonne)

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{K})$. Pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, on note $C_j = \begin{pmatrix} [A]_{1,j} \\ [A]_{2,j} \\ \vdots \\ [A]_{n,j} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ la j-ième colonne de la matrice A.

$$A \times X = \sum_{j=1}^{p} x_j \cdot C_j \in \mathrm{Vect}\left(C_1, C_2, \dots, C_p\right) \, .$$

EXEMPLE C14.33 — $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -3 & 7 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix} = (-4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix} + 11 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$

DÉFINITION C14.34 (TRANSPOSÉE)
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. La transposée de la matrice A, notée $A^\top$, est la matrice de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbf{K})$ définie par

$$[A^\top]_{i,j} = [A]_{j,i}$$

pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!]$.

EXEMPLE C14.35 — $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

EXERCICE C14.36 — Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, formuler une relation entre la ligne i de A et la colonne i de $A^\top$.

PROPOSITION C14.37 (PROPRIÉTÉS DE LA TRANSPOSITION)
1) Pour tout $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$

$$\left(A^\top\right)^\top = A \qquad \text{[caractère involutif]}$$

2) Pour tout $(\lambda_1, \lambda_2, A_1, A_2) \in \mathbf{K} \times \mathbf{K} \times \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \times \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$

$$(\lambda_1 \cdot A_1 + \lambda_2 \cdot A_2)^\top = \lambda_1 \cdot A_1^\top + \lambda_2 \cdot A_2^\top \qquad \text{[linéarité]}$$

3) Pour tout $(A_1, A_2) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \times \mathscr{M}_{p,q}(\mathbf{K})$

$$(A_1 \times A_2)^\top = A_2^\top \times A_1^\top \qquad \big[\text{caractère contravariant relativement au produit}\big]$$

EXERCICE C14.38 — Soit $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ et $E_{i,j} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ où $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$. Décrire la matrice $E_{i,j} \times A$.

§ 2. OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

DÉFINITION C14.39 (MATRICE DE TRANSPOSITION)
Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. On définit la matrice $P_{i,j} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ par

$$P_{i,j} := E_{i,j} + E_{j,i} + \sum_{k \in [\![1,n]\!] \setminus \{i,j\}} E_{k,k}\,.$$

Elle est obtenue en échangeant les lignes (ou les colonnes) i et j de la matrice I_n.

EXEMPLE C14.40 — Dans $\mathscr{M}_5(\mathbf{K})$, $P_{2,4} = E_{1,1} + E_{2,4} + E_{3,3} + E_{4,2} + E_{5,5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

PROPOSITION C14.41 (MULTIPLICATION PAR UNE MATRICE DE TRANSPOSITION)
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.
1) Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, $P_{i,j} \times A$ est la matrice obtenue en échangeant les lignes i et j de la matrice A, i.e.

$$P_{i,j} \times A \text{ est le résultat de l'opération élémentaire } L_i \longleftrightarrow L_j \text{ appliquée à } A.$$

2) Pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$ tel que $i \neq j$, $A \times P_{i,j}$ est la matrice obtenue en échangeant les lignes i et j de la matrice A, i.e.

$$A \times P_{i,j} \text{ est le résultat de l'opération élémentaire } C_i \longleftrightarrow C_j \text{ appliquée à } A.$$

EXEMPLE C14.42 — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Alors $P_{1,3} \times A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $A \times P_{1,2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}$.

EXERCICE C14.43 — Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Expliciter la matrice $P_{i,j} \times P_{i,j}$.

DÉFINITION C14.44 (MATRICE DE DILATATION)
Soit $(i,\lambda) \in [\![1,n]\!] \times \mathbf{K}^*$. On définit la matrice $D_i(\lambda) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ par

$$D_i(\lambda) = \lambda \cdot E_{i,i} + \sum_{k \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} E_{k,k}\,.$$

Elle est obtenue en multipliant la ligne (ou la colonne) i de la matrice I_n par λ.

EXEMPLE C14.45 — Dans $\mathscr{M}_5(\mathbf{K})$, $D_4(8) = E_{1,1} + E_{2,2} + E_{3,3} + 8 \cdot E_{4,4} + E_{5,5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

PROPOSITION C14.46 (MULTIPLICATION PAR UNE MATRICE DE DILATATION)
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.
1) Pour tout $(i,\lambda) \in [\![1,n]\!] \times \mathbf{K}^*$, $D_i(\lambda) \times A$ est la matrice obtenue en multipliant la ligne i de A par λ, i.e.

$$D_i(\lambda) \times A \text{ est le résultat de l'opération élémentaire } L_i \longleftarrow \lambda \cdot L_i \text{ appliquée à } A.$$

2) Pour tout $(j,\lambda) \in [\![1,p]\!] \times \mathbf{K}^*$, $A \times D_j(\lambda)$ est la matrice obtenue en multipliant la colonne j de A par λ, i.e.

$$A \times D_j(\lambda) \text{ est le résultat de l'opération élémentaire } C_j \longleftarrow \lambda \cdot C_j \text{ appliquée à } A.$$

Exemple C14.47 — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Alors $D_3(10) \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 70 & 80 & 90 \end{pmatrix}$ et $A \times D_2(10) = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 3 \\ 5 & 40 & 6 \\ 8 & 70 & 9 \end{pmatrix}$.

Exercice C14.48 — Soit $(i, \lambda) \in [\![1, n]\!] \times \mathbf{K}^*$. Calculer $D_i(\lambda) \times D_i\left(\lambda^{-1}\right)$ et $D_i\left(\lambda^{-1}\right) \times D_i(\lambda)$.

Définition C14.49 (matrice de transvection)
Soit $(i, j, \lambda) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!] \times \mathbf{K}$ tel que $i \neq j$. On définit la matrice $T_{i,j}(\lambda) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ par

$$T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda \cdot E_{i,j} .$$

Elle est obtenue en modifiant le coefficient d'adresse (i, j) de I_n de la valeur 0 à la valeur λ.

Exemple C14.50 — Dans $\mathscr{M}_5(\mathbf{K})$, $T_{2,4}(7) = I_5 + 7 \cdot E_{2,4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition C14.51 (multiplication par une matrice de transvection)
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.
1) Pour tout $(i, j, \lambda) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!] \times \mathbf{K}$ tel que $i \neq j$, $T_{i,j}(\lambda) \times A$ est la matrice obtenue en multipliant la ligne i de A par λ, i.e.

$$T_{i,j}(\lambda) \times A \text{ est le résultat de l'opération élémentaire } L_i \longleftarrow L_i + \lambda \cdot L_j \text{ appliquée à } A.$$

2) Pour tout $(j, \lambda) \in [\![1, p]\!] \times \mathbf{K}$ tel que $i \neq j$, $A \times T_{i,j}(\lambda)$ est la matrice obtenue en ajoutant la colonne i multipliée par λ à la colonne j de A, i.e.

$$A \times T_{i,j}(\lambda) \text{ est le résultat de l'opération élémentaire } C_j \longleftarrow C_j + \lambda \cdot C_i \text{ appliquée à } A.$$

Exemple C14.52 — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Alors $T_{1,3}(10) \times A = \begin{pmatrix} 71 & 82 & 93 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ et $A \times T_{1,2}(10) = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 3 \\ 4 & 45 & 6 \\ 7 & 78 & 9 \end{pmatrix}$.

Exercice C14.53 — Soit $(i, j, \lambda) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!] \times \mathbf{K}$ tel que $i \neq j$. Déterminer $(k, \ell, \mu) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!] \times \mathbf{K}$ tel que $k \neq \ell$ et

$$T_{i,j}(\lambda) \times T_{k,\ell}(\mu) = I_n = T_{k,\ell}(\mu) \times T_{i,j}(\lambda) .$$

Exercice C14.54 — Dans $\mathscr{M}_5(\mathbf{K})$ calculer la matrice

$$A := T_{1,3}(2) \times P_{2,5} \times D_3(-1) \times P_{1,4} \times T_{2,5}(-3) \times P_{1,2} \times D_2(5)$$

puis déterminer une matrice $B \in \mathscr{M}_5(\mathbf{K})$ telle que $A \times B = I_5 = B \times A$.

§ 3. Systèmes linéaires

Définition C14.55 (Écriture matricielle d'un système linéaire)
Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $B = (b_i) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. On considère le système différentiel

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \dots & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array} \right.$$

d'inconnue $(x_j) \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$.
1) Le système (S) est équivalent à l'équation matricielle

$$A \times X = B$$

d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$, appelée écriture matricielle.
2) La matrice augmentée du système linéaire (S) est

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} & b_n \end{array} \right)$$

3) Le système linéaire homogène associé à (S) est le système linéaire

$$(SH) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & a_{1,p}x_p & = & 0 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & a_{2,p}x_p & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \dots & a_{n,p}x_p & = & 0 \end{array} \right.$$

d'inconnue $(x_j) \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$. Son écriture matricielle est $A \times X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})}$ et sa matrice augmentée est

$$\left(\begin{array}{c|c} A & 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} & 0 \end{array} \right)$$

Exercice C14.56 — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ On considère le système linéaire

$$(S) \qquad A \times X = B$$

d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{K})$.
1) Résoudre le système linéaire (SH) à l'aide de sa matrice augmentée. L'ensemble solution $\mathrm{Sol}_{(SH)}$ de (SH) sera écrit comme l'ensemble des combinaisons linéaires d'un nombre fini de matrices.
2) Résoudre le système linéaire (S) à l'aide de sa matrice augmentée. Lier son ensemble solution $\mathrm{Sol}_{(S)}$ de (S) à l'ensemble $\mathrm{Sol}_{(SH)}$.

DÉFINITION C14.57 (SYSTÈME LINÉAIRE COMPATIBLE)
Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. Le système linéaire

$$(S) \qquad A \times X = B$$

d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ est dit compatible s'il possède une solution.

PROPOSITION C14.58 (CRITÈRE DE COMPATIBILITÉ POUR UN SYSTÈME LINÉAIRE)
Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. Le système linéaire

$$(S) \qquad A \times X = B$$

d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ est compatible si et seulement si $B \in \operatorname{Vect}\left(C_1, C_2, \ldots, C_p\right)$, où $C_1, C_2, \ldots, C_p$ sont les vecteurs colonnes de la matrice A.

EXEMPLE C14.59 — Comme $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

d'inconnue $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{K})$ est compatible.

PROPOSITION C14.60 (STRUCTURE DE L'ENSEMBLE SOLUTION D'UN SYSTÈME LINÉAIRE)
Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. On considère système linéaire

$$(S) \qquad A \times X = B$$

d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$.
1) Si le système linéaire (S) est incompatible alors $\mathrm{Sol}_{(S)} = \emptyset$.
2) Si le système linéaire (S) est compatible et si $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ est une solution particulière de (S) alors

$$\mathrm{Sol}_{(S)} = \left\{X_0 + X \ : \ X \in \mathrm{Sol}_{(SH)}\right\}.$$

EXERCICE C14.61 — Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$. On considère le système linéaire

$$(S) \qquad A \times X = B$$

d'inconnue $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{K})$.
1) Résoudre le système linéaire (SH). L'ensemble solution $\mathrm{Sol}_{(SH)}$ de (SH) sera écrit comme l'ensemble des combinaisons linéaires d'un nombre fini de matrices.
2) Déduire de 1 et de C14.59 l'ensemble solution de (S).

§ 4. Anneau des matrices carrées

Proposition C14.62 (structure d'anneau sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$)

1) L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ muni de son addition + et de sa multiplication × est un anneau.
2) Le neutre de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ pour la loi + est $0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})}$.
3) Le neutre de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ pour la loi × est I_n.

Remarque C14.63 — Si $n \geqslant 2$ alors l'anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}), +, \times)$ n'est pas commutatif. En effet

$$E_{1,2} \times E_{1,1} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})} \qquad \text{et} \qquad E_{1,1} \times E_{1,2} = E_{1,2} .$$

Remarque C14.64 — Si $n \geqslant 2$ alors l'anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}), +, \times)$ possède des diviseurs de 0, i.e. il existe $(A, B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \setminus \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})}\}\right)^2$ tel que $A \times B = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})}$. En effet

$$E_{1,2} \times E_{1,1} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})} .$$

Remarque C14.65 — Si $n \geqslant 2$ alors l'anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}), +, \times)$ possède des éléments non nuls et nilpotents, i.e. il existe $(A, k) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \setminus \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})}\}\right) \times \mathbf{N}^*$ tel que $A^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})}$. En effet

$$E_{1,2}^2 = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})} .$$

Exercice C14.66 — Soit $\lambda \in \mathbf{K}$. On pose

$$\operatorname{Diag}(\lambda, \ldots, \lambda) := \lambda . I_n = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \text{[matrice scalaire]} .$$

Calculer, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $M \times \operatorname{Diag}(\lambda, \ldots, \lambda)$ et $\operatorname{Diag}(\lambda, \ldots, \lambda) \times M$.

Définition C14.67 (matrice symétrique (resp. antisymétrique))

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

1) La matrice A est dite symétrique si $A^\top = A$.
1) La matrice A est dite antisymétrique si $A^\top = -A$.

Exemple C14.68 — La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ est symétrique et la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -8 \\ -1 & 0 & 5 \\ 8 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

Exercice C14.69 — Justifier que les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nuls.

NOTATION C14.70 — 1) L'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est notée $\mathscr{S}_n(\mathbf{K})$, i.e.

$$\mathscr{S}_n(\mathbf{K}) = \left\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \,:\, M^\top = M\right\} .$$

2) L'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est notée $\mathscr{A}_n(\mathbf{K})$, i.e.

$$\mathscr{A}_n(\mathbf{K}) = \left\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \,:\, M^\top = -M\right\} .$$

PROPOSITION C14.71 (STABILITÉ DE $\mathscr{S}_n(\mathbf{K})$ ET $\mathscr{A}_n(\mathbf{K})$ PAR COMBINAISON LINÉAIRE)

1) Pour tout $(\lambda_1, \lambda_2, S_1, S_2) \in \mathbf{K} \times \mathbf{K} \times \mathscr{S}_n(\mathbf{K}) \times \mathscr{S}_n(\mathbf{K})$

$$\lambda_1 \cdot S_1 + \lambda_2 \cdot S_2 \in \mathscr{S}_n(\mathbf{K}) \qquad \left[\mathscr{S}_n(\mathbf{K}) \text{ est stable par combinaison linéaire}\right] .$$

2) Pour tout $(\lambda_1, \lambda_2, A_1, A_2) \in \mathbf{K} \times \mathbf{K} \times \mathscr{A}_n(\mathbf{K}) \times \mathscr{A}_n(\mathbf{K})$

$$\lambda_1 \cdot A_1 + \lambda_2 \cdot A_2 \in \mathscr{A}_n(\mathbf{K}) \qquad \left[\mathscr{A}_n(\mathbf{K}) \text{ est stable par combinaison linéaire}\right] .$$

REMARQUE C14.72 — 1) L'ensemble $\mathscr{S}_n(\mathbf{K})$ n'est pas stable par produit. En effet $E_{1,2} + E_{2,1} \in \mathscr{S}_n(\mathbf{K})$ et $E_{1,1} \in \mathscr{S}_n(\mathbf{K})$ mais

$$\left(E_{1,2} + E_{2,1}\right) \times E_{1,1} = E_{2,1} \notin \mathscr{S}_n(\mathbf{K}) .$$

2) L'ensemble $\mathscr{A}_n(\mathbf{K})$ n'est pas stable par produit. En effet $E_{1,2} - E_{2,1} \in \mathscr{A}_n(\mathbf{K})$ mais

$$\left(E_{1,2} - E_{2,1}\right) \times \left(E_{1,2} - E_{2,1}\right) = -E_{1,1} - E_{2,1} \notin \mathscr{A}_n(\mathbf{K}) .$$

EXERCICE C14.73 — 1) Démontrer que $\mathscr{S}_n(\mathbf{K}) = \operatorname{Vect}\left(\left(E_{i,i}\right)_{1 \leqslant i \leqslant n} \# \left(E_{i,j} + E_{j,i}\right)_{1 \leqslant i < j \leqslant n}\right)$

2) Démontrer que $\mathscr{A}_n(\mathbf{K}) = \operatorname{Vect}\left(\left(E_{i,j} - E_{j,i}\right)_{1 \leqslant i < j \leqslant n}\right)$

EXERCICE C14.74 — Supposons que dans le corps $\mathbf{K}$, $2 \neq 0$. Démontrer que

$$\forall\, M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \quad \exists!\,(S, A) \in \mathscr{S}_n(\mathbf{K}) \times \mathscr{A}_n(\mathbf{K}) \quad M = S + A .$$

PROPOSITION C14.75 (FORMULE DU BINÔME POUR LES MATRICES)

Soit $(A, B, p) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \times \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \times \mathbf{N}$. Si $A \times B = B \times A$ alors

$$(A + B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \cdot A^k \times B^{p-k} .$$

EXERCICE C14.76 — Calculer les puissances de $J := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ puis celles de $A := \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

EXERCICE C14.77 — Calculer les puissances de $N := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis celles de $A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

DÉFINITION C14.78 (MATRICE DIAGONALE (RESP. TRIANGULAIRE SUPÉRIEURE/INFÉRIEURE))
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.
1) La matrice A est dite diagonale si ses coefficients hors de la diagonale sont nuls, i.e.

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad i \neq j \Longrightarrow [A]_{i,j} = 0\,.$$

2) La matrice A est dite triangulaire supérieure si ses coefficients en dessous la diagonale sont nuls, i.e.

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad i > j \Longrightarrow [A]_{i,j} = 0\,.$$

3) La matrice A est dite triangulaire inférieure si ses coefficients au dessus la diagonale sont nuls, i.e.

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad i < j \Longrightarrow [A]_{i,j} = 0\,.$$

NOTATION C14.79 — 1) L'ensemble des matrices diagonale de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est notée $\mathscr{D}_n(\mathbf{K})$, i.e.

$$\mathscr{D}_n(\mathbf{K}) = \left\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \,:\, \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad i \neq j \Longrightarrow [A]_{i,j} = 0\,.\right\}.$$

2) L'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est notée $\mathscr{T}_n^+(\mathbf{K})$, i.e.

$$\mathscr{T}_n^+(\mathbf{K}) = \left\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \,:\, \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad i > j \Longrightarrow [A]_{i,j} = 0\,.\right\}.$$

3) L'ensemble des matrices triangulaires inférieures de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est notée $\mathscr{T}_n^-(\mathbf{K})$, i.e.

$$\mathscr{T}_n^-(\mathbf{K}) = \left\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \,:\, \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad i < j \Longrightarrow [A]_{i,j} = 0\,.\right\}.$$

EXEMPLE C14.80 — $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 7\end{pmatrix} \in \mathscr{D}_3(\mathbf{K})$, $\begin{pmatrix}1 & 2 & -5\\ 0 & 0 & 13\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix} \in \mathscr{T}_3^+(\mathbf{K})$, $\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 5 & 1 & -1\end{pmatrix} \in \mathscr{T}_3^-(\mathbf{K})$

EXERCICE C14.81 — Démontrer que

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \quad \exists!\,(D,T_1,T_2) \in \mathscr{D}_n(\mathbf{K}) \times \mathscr{T}_n^+(\mathbf{K}) \times \mathscr{T}_n^-(\mathbf{K}) \quad M = D + T_1 + T_2\,.$$

NOTATION C14.82 — Pour tout $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbf{K}^n$, on note $\mathrm{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ la matrice définie par

$$\mathrm{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot E_{i,i} = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ddots & & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & & \ddots & \lambda_{n-1} & 0\\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda_n\end{pmatrix} \in \mathscr{D}_n(\mathbf{K})\,.$$

PROPOSITION C14.83 (PRODUIT DE DEUX MATRICES DIAGONALES)
Pour tout $\big((\lambda_1,\dots,\lambda_n),(\mu_1,\dots,\mu_n)\big) \in \mathbf{K}^n \times \mathbf{K}^n$

$$\mathrm{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \times \mathrm{Diag}(\mu_1,\dots,\mu_n) = \mathrm{Diag}(\lambda_1 \times \mu_1,\dots,\lambda_n \times \mu_n)\,.$$

EXEMPLE C14.84 — $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 33 & 0 \\ 0 & 0 & -28 \end{pmatrix}$

PROPOSITION C14.85 (STRUCTURE DE $\mathscr{D}_n(\mathbf{K})$)

1) Pour tout $(\lambda_1, \lambda_2, D_1, D_2) \in \mathbf{K} \times \mathbf{K} \times \mathscr{D}_n(\mathbf{K}) \times \mathscr{D}_n(\mathbf{K})$

$$\lambda_1 \cdot D_1 + \lambda_2 \cdot D_2 \in \mathscr{D}_n(\mathbf{K}) \qquad \left[\mathscr{D}_n(\mathbf{K}) \text{ est stable par combinaison linéaire}\right].$$

2) L'ensemble $\mathscr{D}_n(\mathbf{K})$ est un sous-anneau commutatif de $(\mathscr{M}_n(\mathbf{K}), +, \times)$.

EXERCICE C14.86 — Justifier que, si $n \geqslant 2$ alors l'anneau $(\mathscr{D}_n(\mathbf{K}), +, \times)$ n'est pas intègre.

PROPOSITION C14.87 (STRUCTURE DE $\mathscr{T}_n^+(\mathbf{K})$)

1) Pour tout $(\lambda_1, \lambda_2, T_1, T_2) \in \mathbf{K} \times \mathbf{K} \times \mathscr{T}_n^+(\mathbf{K}) \times \mathscr{T}_n^+(\mathbf{K})$

$$\lambda_1 \cdot T_1 + \lambda_2 \cdot T_2 \in \mathscr{T}_n^+(\mathbf{K}) \qquad \left[\mathscr{T}_n^+(\mathbf{K}) \text{ est stable par combinaison linéaire}\right].$$

2) L'ensemble $\mathscr{T}_n^+(\mathbf{K})$ est un sous-anneau de $(\mathscr{M}_n(\mathbf{K}), +, \times)$.

EXERCICE C14.88 — Justifier que, si $n \geqslant 2$ alors l'anneau $\left(\mathscr{T}_n^+(\mathbf{K}), +, \times\right)$ n'est par commutatif.

PROPOSITION C14.89 (STRUCTURE DE $\mathscr{T}_n^-(\mathbf{K})$)

1) Pour tout $(\lambda_1, \lambda_2, T_1, T_2) \in \mathbf{K} \times \mathbf{K} \times \mathscr{T}_n^-(\mathbf{K}) \times \mathscr{T}_n^-(\mathbf{K})$

$$\lambda_1 \cdot T_1 + \lambda_2 \cdot T_2 \in \mathscr{T}_n^-(\mathbf{K}) \qquad \left[\mathscr{T}_n^-(\mathbf{K}) \text{ est stable par combinaison linéaire}\right].$$

2) L'ensemble $\mathscr{T}_n^-(\mathbf{K})$ est un sous-anneau de $(\mathscr{M}_n(\mathbf{K}), +, \times)$.

DÉFINITION C14.90 (MATRICE INVERSIBLE)

Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est dite inversible si

$$\exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \quad A \times B = I_n = B \times A.$$

Dans ce cas, la matrice B est unique. On la nomme inverse de A et on la note A^{-1}

EXEMPLE C14.91 — Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Comme $A \times B = B \times A = I_3$, la matrice A est inversible et $B = A^{-1}$.

PROPOSITION C14.92 (CRITÈRE D'INVERSIBILITÉ D'UNE MATRICE DIAGONALE)

Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$.

1) La matrice $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est inversible si et seulement si $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$.

2) Si la matrice $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est inversible alors $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^{-1} = \mathrm{Diag}\left(\lambda^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}\right)$.

NOTATION C14.93 — L'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est noté $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, i.e.

$$\mathrm{GL}_n(\mathbf{K}) = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \,:\, \exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \quad A \times B = I_n = B \times A\}\ .$$

PROPOSITION C14.94 (STRUCTURE DE $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$)
1) Pour tout $(A,B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})^2$, $A \times B \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$. Ainsi, l'application

$$\times \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})^2 & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbf{K}) \\ (A,B) & \longmapsto & A \times B \end{array} \right.$$

est bien définie.
2) L'ensemble $(\mathrm{GL}_n(\mathbf{K}), \times)$ est un groupe d'élément neutre I_n.

EXERCICE C14.95 — Soient $(a,b,c,d) \in \mathbf{K}^4$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbf{K})$, $\mathrm{Tr}(A) = a+d \in \mathbf{K}$ et $\mathrm{Det}(A) = ad-bc \in \mathbf{K}$.
1) Démontrer que $A^2 - \mathrm{Tr}(A) \cdot A + \mathrm{Det}(A) \cdot I_2 = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbf{K})}$
2) Démontrer que la matrice A est inversible si et seulement si $\mathrm{Det}(A) \neq 0$.
3) Démontrer que, si A est inversible, alors $A^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{Det}(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

PROPOSITION C14.96 (INVERSIBILITÉ ET PRODUIT)
Soient $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})^2$. Si deux des trois matrices A, B et $A \times B$ sont inversibles, alors la troisième est inversible.

PROPOSITION C14.97 (INVERSIBILITÉ ET TRANSPOSITION)
Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ alors $A^\top \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et $\left(A^\top\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\top$.

PROPOSITION C14.98 (UNE OPÉRATION ÉLÉMENTAIRE PRÉSERVE L'INVERSIBILITÉ)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.
1) Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. La matrice A' obtenue en appliquant l'opération élémentaire

$$L_i \longleftrightarrow L_j \qquad \text{ou} \qquad C_i \longleftrightarrow C_j$$

est inversible si et seulement si la matrice A est inversible.
2) Soit $(i,\lambda) \in [\![1,n]\!] \times \mathbf{K}^*$. La matrice A' obtenue en appliquant l'opération élémentaire

$$L_i \longleftarrow \lambda \cdot L_i \qquad \text{ou} \qquad C_i \longleftarrow \lambda \cdot C_i$$

est inversible si et seulement si la matrice A est inversible.
1) Soit $(i,j,\lambda) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!] \times \mathbf{K}^*$ tel que $i \neq j$. La matrice A' obtenue en appliquant l'opération élémentaire

$$L_i \longleftarrow L_i + \lambda \cdot L_j \qquad \text{ou} \qquad C_i \longleftarrow C_i + \lambda \cdot C_j$$

est inversible si et seulement si la matrice A est inversible.

EXERCICE C14.99 — Justifier que la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ est inversible et expliciter son inverse.

§ 5. Algorithme du pivot de Gauss et applications

Définition C14.100 (matrice carrée échelonnée)
Soit $E \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ une matrice non nulle. Notons r le nombre de lignes non nulles de la matrice E. La matrice E est dite échelonnée si les deux conditions suivantes sont vérifiées.
1) Les r lignes non nulles de A sont les lignes $L_1, L_2, \dots, L_r$.
2) Si pour tout $i \in [\![1,r]\!]$ on note j_k le numéro de colonne du premier coefficient non nul de la ligne L_k alors $j_1 < j_2 < \dots < j_r$.
Si tel est le cas, $r \leqslant \min\{n,p\}$ et les coefficients $[E]_{1,j_1}, [E]_{2,j_2}, \dots, [E]_{r,j_r}$ sont appelés pivots de la matrice échelonnée E.

Notation C14.101 — Le symbole $\blacksquare$ désigne un scalaire non nul et le symbole $\bigstar$ un scalaire quelconque.

Exemple C14.102 — Les matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 0 & \blacksquare & \bigstar & \bigstar & \bigstar \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & \bigstar \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \blacksquare & \bigstar & \bigstar & \bigstar & \bigstar \\ 0 & \blacksquare & \bigstar & \bigstar & \bigstar \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & \bigstar \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \blacksquare & \bigstar & \bigstar & \bigstar \\ 0 & \blacksquare & \bigstar & \bigstar \\ 0 & 0 & \blacksquare & \bigstar \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{pmatrix}$$

sont échelonnées contrairement aux trois matrices ci-dessous.

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & \bigstar & \bigstar & \bigstar & \bigstar \\ 0 & 0 & \blacksquare & \bigstar & \bigstar \\ 0 & \blacksquare & \bigstar & \bigstar & \bigstar \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \blacksquare & \bigstar & \bigstar & \bigstar & \bigstar \\ 0 & \blacksquare & \bigstar & \bigstar & \bigstar \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & \bigstar \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & \bigstar \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \blacksquare & \bigstar & \bigstar & \bigstar \\ 0 & \blacksquare & \bigstar & \bigstar \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{pmatrix}$$

Algorithme C14.103 (pivot de Gauss)
L'algorithme du pivot de Gauß permet de transformer une matrice non nulle $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ en une matrice échelonnée à l'aide d'une succession de transformations élémentaires sur les lignes.

```
donnée: A ∈ M_{n,p}(K)
résultat: A' ∈ M_{n,p}(K) échelonnée fruit d'opérations élémentaires sur les lignes de A
ℓ ⟵ 0   /* indice de ligne du dernier pivot, aucun n'a encore été trouvé */
c ⟵ 0   /* indice de colonne du dernier pivot, aucun n'a encore été trouvé */
j ⟵ 1   /* indice de parcours des colonnes */
tant que ( j ⩽ p ) et ( ℓ < n ) faire
    si un des coefficients d'adresse (ℓ+1, j), (ℓ+2, j), ..., (n−1, j), (n, j) est non nul alors
        choisir i dans ⟦ℓ+1, n⟧ tel que le coefficient d'adresse (i, j) est non nul
        échanger les lignes ℓ+1 et i
        /* le coefficient d'adresse (ℓ+1, j) est non nul (pivot) */
        utiliser le coefficient d'adresse (ℓ+1, j) pour annuler ceux situés au-dessous
        /* actualisation des indices de ligne et de colonne du dernier pivot trouvé */
        ℓ ⟵ ℓ+1
        c ⟵ j
    fin
    j ⟵ j+1   /* la colonne j est traitée on passe à la suivante */
fin
```

L'algorithme du pivot de Gauß permet de transformer une matrice non nulle $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ en une matrice échelonnée à l'aide d'une succession de transformations élémentaires sur les lignes.
À l'issue du premier tour de boucle, il existe une matrice P_1 égale à I_n ou à un produit de matrices de permutation/transvection telle que la matrice $P_1 A$ soit l'une des matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & \bigstar & \cdots & \bigstar \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \bigstar & \cdots & \bigstar \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \blacksquare & \bigstar & \cdots & \bigstar \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \bigstar & \cdots & \bigstar \end{pmatrix}.$$

À l'issue du deuxième tour de boucle, il existe une matrice P_2 égale à I_n ou à un produit de matrices de permutation/transvection telle que la matrice $P_2 P_1 A$ soit l'une des matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \bigstar & \cdots & \bigstar \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \bigstar & \cdots & \bigstar \end{pmatrix} \text{ou} \begin{pmatrix} 0 & \blacksquare & \bigstar & \cdots & \cdots & \bigstar \\ \vdots & 0 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \bigstar & \cdots & \cdots & \bigstar \end{pmatrix} \text{ou} \begin{pmatrix} \blacksquare & \bigstar & \bigstar & \cdots & \bigstar \\ 0 & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \bigstar & \cdots & \bigstar \end{pmatrix} \text{ou} \begin{pmatrix} \blacksquare & \bigstar & \bigstar & \cdots & \bigstar \\ 0 & \blacksquare & \vdots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \bigstar & \cdots & \bigstar \end{pmatrix}.$$

Théorème C14.104 (correction de l'algorithme du pivot de Gauss)
L'algorithme du pivot de Gauß appliqué à une matrice non nulle A de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ transforme A en une matrice échelonnée.

Corollaire C14.105 (traduction matricielle du théorème précédent)
Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ égale à I_n ou à un produit de matrices de transposition/transvection telle que la matrice $PA \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est échelonnée.

Définition C14.106 (matrice de Jordan)
Pour tout entier naturel non nul r tel que $r \leqslant n$ et $r \leqslant p$, on note $J_{n,p}(r)$ la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ définie par

$$J_{n,p}(r) = \sum_{i=1} E_{i,i}\,.$$

Exemple C14.107 — $J_{3,4}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J_{5,6}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Proposition C14.108 (d'une matrice échelonnée à une matrice de Jordan)
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ une matrice échelonnée non nulle dont le nombre de pivots est noté r. Il existe
a) une matrice D égale à I_n ou à un produit de matrices de dilatation;
b) une matrice Q égale à I_p ou à un produit de matrices de transposition/transvection;
telle que $DAQ = J_{n,p}(r)$.

Exercice C14.109 — Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice D produit de matrices de dilatation et une matrice Q produit de matrices de transposition/transvection telle que $DAQ = J_{3,5}(3)$

Théorème C14.110 (d'une matrice non nulle à une matrice de Jordan)
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ une matrice non nulle. Il existe
1) $r \in [\![1, \min\{n,p\}]\!]$;
2) une matrice P de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ égale à I_n ou à un produit de matrices de transposition/dilatation/transvection ;
3) une matrice $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbf{K})$ égale à I_p ou à un produit de matrices de transposition/transvection ;
telle que $PAQ = J_{n,p}(r)$.

Remarque C14.111 — Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ une matrice non nulle. Considérons
1) $(r_1, r_2) \in [\![1, \min\{n,p\}]\!]^2$;
2) $P_1, P_2 \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ égales à I_n ou à un produit de matrices de transposition/dilatation/transvection ;
3) $Q_1, Q_2 \in \mathrm{GL}_p(\mathbf{K})$ égales à I_p ou à un produit de matrices de transposition/transvection ;
telle que $P_1AQ_1 = J_{n,p}(r_1)$ et $P_2AQ_2 = J_{n,p}(r_2)$. Alors $r_1 = r_2$ (admis pour le moment), mais les matrices P_1 et P_2 (resp. Q_1 et Q_2) ne sont pas nécessairement égales.

Définition C14.112 (noyau d'une matrice)
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Le noyau de A, noté $\mathrm{Ker}(A)$, est donc l'ensemble solution du système linéaire homogène

$$AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})}$$

d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$, i.e.

$$\mathrm{Ker}(A) := \left\{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K}) \ : \ AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})}\right\}.$$

Proposition C14.113 (structure du noyau d'une matrice)
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.
1) $0_{\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})} \in \mathrm{Ker}(A)$
1) $\mathrm{Ker}(A)$ est stable par combinaison linéaire.

Proposition C14.114 (propriété fondamentale du noyau)
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ une matrice non nulle et $(r, P, Q) \in [\![1, \min\{n,p\}]\!] \times \mathrm{GL}_n(\mathbf{K}) \times \mathrm{GL}_p(\mathbf{K})$ tels que $PAQ = J_{n,p}(r)$.
1) Si $r = p$ alors $\mathrm{Ker}(A)$ est le singleton $\left\{0_{\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})}\right\}$.
2) Si $r < p$ alors $\mathrm{Ker}(A) \neq \left\{0_{\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})}\right\}$ et $\mathrm{Ker}(A)$ est un ensemble infini si le corps $\mathbf{K}$ est infini.

Proposition C14.115 (inversibilité, inverse éventuelle et matrice augmentée)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
1) La matrice A est inversible si et seulement si on obtient n pivots en appliquant l'algorithme du pivot de Gauß à A.
2) Supposons la matrice A inversible. Après une suite d'opérations élémentaires sur les lignes, la matrice augmentée $\left(\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array}\right)$ peut être transformée en une matrice augmentée de la forme $\left(\begin{array}{c|c} I_n & B \end{array}\right)$ et $B \in \mathcal{M}_(\mathbf{K})$ est la matrice inverse de A.

EXERCICE C14.116 — Démontrer que la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible et expliciter son inverse, en utilisant des matrices augmentées.

REMARQUE C14.117 — On pose

$$\begin{array}{ll} \mathscr{A} := \left\{P_{i,j} \;:\; (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \text{ tel que } i \neq j\right\} & \text{[ensemble des matrices de transposition]} \\ \mathscr{B} := \left\{D_i(\lambda) \;:\; (i,\lambda) \in [\![1,n]\!] \times \mathbf{K}^*\right\} & \text{[ensemble des matrices de dilatation]} \\ \mathscr{C} := \left\{T_{i,j}(\lambda) \;:\; (i,j,\lambda) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!] \times \mathbf{K}^* \text{ tel que } i \neq j\right\} & \text{[ensemble des matrices de transvection]} . \end{array}$$

Pour toute matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, il existe $s \in \mathbf{N}^*$ et $(P_1, P_2, \ldots, P_s) \in (\mathscr{A} \cup \mathscr{B} \cup \mathscr{C})^s$ tels que

$$A = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_s .$$

PROPOSITION C14.118 (CRITÈRE D'INVERSIBILITÉ VIA LE NOYAU)
Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est inversible si et seulement si $\mathrm{Ker}(A) = \left\{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})}\right\}$.

PROPOSITION C14.119 (INVERSIBILITÉ À GAUCHE, INVERSIBILITÉ À DROITE ET INVERSIBILITÉ)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.
1) S'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ tel que $BA = I_n$ alors la matrice A est inversible et $A^{-1} = B$.
2) S'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ tel que $AB = I_n$ alors la matrice A est inversible et $A^{-1} = B$.

PROPOSITION C14.120 (INVERSIBILITÉ, INVERSE ÉVENTUELLE ET SYSTÈME LINÉAIRE)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.
1) La matrice A est inversible si et seulement si pour tout $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ le système linéaire

$$(S_Y) \qquad A \times X = Y$$

d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ possède une unique solution.
2) Supposons la matrice A inversible. Si, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, nous notons X_i l'unique solution du système linéaire

$$A \times X = E_{i,1} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$$

d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, alors A^{-1} est la matrice dont les colonnes sont $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

PROPOSITION C14.121 (INVERSIBILITÉ ET INVERSE ÉVENTUELLE D'UNE MATRICE TRIANGULAIRE)
1) Une matrice triangulaire T de format (n,n) est inversible si et seulement si $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} [T]_{i,i} \neq 0$.
2) Si une matrice $T \in \mathscr{T}_n^+(\mathbf{K})$ est inversible alors $T^{-1} \in \mathscr{T}_n^+(\mathbf{K})$.
3) Si une matrice $T \in \mathscr{T}_n^-(\mathbf{K})$ est inversible alors $T^{-1} \in \mathscr{T}_n^-(\mathbf{K})$.