Chapitre n°11
Nombres réels et suites numériques

§ 1 Ensembles de nombres usuels

C11.1. Rappels

- L'ensemble des nombres entiers naturels est noté $\mathbb{N}$. $\boxed{\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}}$
- L'ensemble des nombres entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$. $\boxed{\mathbb{Z} := \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}}$
- L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$, $\boxed{\mathbb{Q} = \left\{\frac{n}{d} \,;\, (n, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*\right\}.}$
- L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.

C11.2. Proposition (division par un réel strictement positif) Soit $\alpha > 0$.

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \exists!\, (q, r) \in \mathbb{Z} \times [0, \alpha[\qquad x = q\alpha + r\,.}$$

C11.3. Proposition-Définition (écriture en base b d'un entier naturel non nul, $b \geqslant 2$) Soit $(b, n) \in \mathbb{N}_{\geqslant 2} \times \mathbb{N}^*$.

$$\boxed{\exists! r \in \mathbb{N} \quad \exists!(a_0, \ldots, a_r) \in [\![0, b-1]\!]^{r+1} \qquad a_r \neq 0 \text{ et } n = \sum_{k=0}^{r} a_k\, b^k\,.}$$

L'écriture de n en base b est $\boxed{\overline{a_r \ldots, a_0}^{(b)}}$.

C11.4. Exercice Donner les écritures de 14 en base 2, de 123 en base 7 et de 175 en base 13.

C11.5. Exercice Soit $(b, n) \in \mathbb{N}_{\geqslant 2} \times \mathbb{N}^*$. Calculer le nombre de chiffres de l'écriture de n en base b.

C11.6. Définition (nombres décimaux et ensemble d'iceux) Un nombre rationnel r est dit décimal si :

$$\exists\, (n, p) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \qquad r = \frac{n}{10^p}\,.$$

L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$, i.e. $\boxed{\mathbb{D} := \left\{\frac{n}{10^p} \,:\, (n, p) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\right\}.}$

C11.7. Exercice

1. Vérifier les propriétés de $\mathbb{D}$ suivantes.
   (a) $\forall\,(x_1,x_2)\in\mathbb{D}^2 \qquad x_1+x_2\in\mathbb{D} \qquad [\mathbb{D}$ est stable par addition$]$
   (b) $\forall\,x\in\mathbb{D} \qquad -x\in\mathbb{D} \qquad [\mathbb{D}$ est stable par passage à l'opposé$]$
   (c) $\forall\,(x_1,x_2)\in\mathbb{D}^2 \qquad x_1\times x_2\in\mathbb{D} \qquad [\mathbb{D}$ est stable par multiplication$]$
2. Si x est un nombre décimal non nul, son inverse $\dfrac{1}{x}$ appartient-il nécessairement à $\mathbb{D}$?

C11.8. Exercice Soit $x\in\mathbb{Q}^*$. Démontrer que $x\in\mathbb{D}$ si et seulement si :

$$\exists\,(r,p)\in\mathbb{N}^2 \quad \exists\,(a_0,\dots,a_r)\in[\![0,p-1]\!]^{r+1} \qquad x=\sum_{k=0}^{r}a_k\,10^{k-p}\,.$$

C11.9. Définition (nombre irrationnel) Un nombre irrationnel est un nombre réel qui n'est pas un nombre rationnel, i.e. un élément de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

C11.10. Propriété (irrationnalité de racine de 2) Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

C11.11. Exercice Démontrer que les nombres $5\sqrt{2}$ et $7-\sqrt{2}$ sont irrationnels.

C11.12. Exercice Démontrer que $\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est irrationnel.

C11.13. Remarque Nous démontrerons que e et π sont irrationnels, cf. feuille d'exercices n°11.

C11.14. Définition (droite numérique achevée) On complète $\mathbb{R}$ par deux objets non réels $-\infty$ et $+\infty$, pour obtenir l'ensemble :

$$\overline{\mathbb{R}}:=\{-\infty\}\sqcup\mathbb{R}\sqcup\{+\infty\}\;.$$

On prolonge l'ordre usuel sur $\mathbb{R}$ à $\overline{\mathbb{R}}$ en posant :

$$\forall\,x\in\mathbb{R} \qquad -\infty<x<+\infty\,.$$

L'ordre ainsi obtenu sur $\overline{\mathbb{R}}$ est total, i.e. pour tout $(x,y)\in\overline{\mathbb{R}}^2$, $x\leqslant y$ ou $y\leqslant x$.

§ 2 Densité de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

C11.15. Définition (approximations décimales par défaut et par excès d'un réel)
Soient $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$.

1. Le nombre $x_n^- := \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ est appelé <u>valeur décimale approchée de x à la précision 10^{-n} par défaut</u>.
2. Le nombre $x_n^+ := \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$ est appelé <u>valeur décimale approchée de x à la précision 10^{-n} par excès</u>.

Les nombres x, $x_n^- \in \mathbb{D}$ et $x_n^+ \in \mathbb{D}$ vérifient les deux propriétés suivantes.

$$\boxed{x_n^- \leqslant x \leqslant x_n^+ \qquad \text{et} \qquad x_n^+ - x_n^- = \frac{1}{10^n}\,.}$$

C11.16. Exercice On rappelle que $\pi = 3,14159265358979323846264338327950 2\ldots$.

1. Donner la valeur décimale approchée de π à la précision 10^{-3} par défaut.
2. Donner la valeur décimale approchée de π à la précision 10^{-6} par excès.

C11.17. Théorème ($\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$) Si $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ sont tels que $a < b$ alors :

$$\boxed{]a, b[\cap \mathbb{Q} \neq \varnothing\,.}$$

C11.18. Corollaire ($\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$) Si $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ sont tels que $a < b$ alors :

$$\boxed{]a, b[\cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \varnothing\,.}$$

C11.19. Exercice Soient $A := \left\{ \dfrac{n}{2^p} : (n, p) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \right\}$ l'ensemble des nombres dyadiques et$(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ tels que $a < b$. Démontrer que $]a, b[\cap A \neq \varnothing$.

§ 3 Propriété de la borne supérieure

C11.20. Rappel Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

1. La partie A est <u>majorée</u> s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $a \in A$, $a \leqslant M$. Le nombre M est appelé <u>majorant</u> de A.
2. Un nombre réel β est appelé <u>maximum</u> de A si β est un majorant de A qui appartient à A. Si A possède un maximum, alors il est unique et est noté $\max(A)$.
3. La partie A est <u>minorée</u> s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $a \in A$, $m \leqslant a$. Le nombre m est appelé <u>minorant</u> de A.
4. Un nombre réel α est appelé <u>minimum</u> de A si α est un minorant de A qui appartient à A. Si A possède un minimum, alors il est unique et est noté $\min(A)$.
5. La partie A est <u>bornée</u> s'il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $a \in A$, $m \leqslant a \leqslant M$.
6. Nous avons établi que A est bornée si et seulement s'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $a \in A$, $|a| \leqslant K$.

C11.21. Proposition-Définition (Borne supérieure et borne inférieure)
Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

1. On dit que A possède une borne supérieure si l'ensemble des majorants de A possède un minimum. Dans ce cas, on appelle borne supérieure de A et on note $\sup(A)$ le nombre défini par :

$$\boxed{\sup(A) \text{ est le plus petit majorant de } A.}$$

2. On dit que A possède une borne inférieure si l'ensemble des minorants de A possède un maximum. Dans ce cas, on appelle borne inférieure de A et on note $\inf(A)$ le nombre défini par :

$$\boxed{\inf(A) \text{ est le plus grand minorant de } A.}$$

C11.22. Exercice Démontrer que :

$$[0,1[\,:=\{x\in\mathbb{R}\,:\,0\leqslant x<1\}$$

possède une borne supérieure et une borne inférieure.

C11.23. Exercice Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $-A := \{-a \,:\, a \in A\}$.

1. Démontrer que A admet une borne inférieure si et seulement si $-A$ admet une borne supérieure.
2. Si A admet une borne inférieure, démontrer que $\inf(A) = -\sup(-A)$.

C11.24. Axiome (Propriété de la borne supérieure) Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.

C11.25. Corollaire (Propriété de la borne inférieure) Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.

C11.26. Remarques

1. La propriété de la borne inférieure est ce qui distingue fondamentalement $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.
2. La propriété de la borne supérieure et la propriété de la borne inférieure constituent de puissants outils pour définir de nouveaux nombres réels.

C11.27. Caractérisation de la borne supérieure Soient A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{M=\sup(A) \iff \begin{cases} (1) \quad \forall\, a\in A \quad a\leqslant M & [M \text{ majorant de } A] \\ (2) \quad \forall\, \varepsilon>0 \quad \exists\, a_\varepsilon\in A \quad M-\varepsilon<a_\varepsilon & [\text{un réel plus petit que } M \text{ ne majore pas } A] \end{cases}}$$

C11.28. Caractérisation de la borne inférieure Soient A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}$.

$$m = \inf(A) \iff \begin{cases} (1) & \forall\, a \in A \quad m \leqslant a \qquad [M \text{ minorant de } A] \\ (2) & \forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, a_\varepsilon \in A \quad a_\varepsilon < m + \varepsilon \qquad [\text{un réel plus grand que } m \text{ ne minore pas } A] \end{cases}$$

C11.29. Exercice Étudier les bornes inférieure et supérieure éventuelles de $\mathbb{N}$.

C11.30. Exercice Étudier les bornes inférieure et supérieure éventuelles de $\mathbb{Q}_+$.

C11.31. Exercice Étudier les bornes inférieure et supérieure éventuelles de $A := \left\{ \frac{1}{n+1} \,:\, n \in \mathbb{N} \right\}$.

C11.32. Exercice Étudier les bornes inférieure et supérieure éventuelles de $A := \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \,:\, (n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \right\}$.

C11.33. Propriété (raisonnement de passage à la borne supérieure) Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Supposons que :

$$\exists\, M \in \mathbb{R} \quad \forall\, a \in A \qquad a \leqslant M\,.$$

Alors A admet une borne supérieure et $\sup(A) \leqslant M$.

C11.34. Exercice Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que pour tout $(a, b) \in A \times B$, $a \leqslant b$.

1. Démontrer que A admet une borne supérieure et que B admet une borne inférieure.
2. Démontrer $\sup(A) \leqslant \inf(B)$.

C11.35. Exercice Soient A, B deux parties majorées et non vides de $\mathbb{R}$. Notons :

$$A + B = \{a + b \,:\, (a, b) \in A \times B\} \subset \mathbb{R}.$$

Montrer que $A + B$ admet une borne supérieure et que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

C11.36. Exercice Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier que $\mathrm{d}(x, A) := \inf_{a \in A} |x - a|$ est bien défini.
2. Démontrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\left|\mathrm{d}(x, A) - \mathrm{d}(y, A)\right| \leqslant \left|x - y\right|$.

C11.37. Exercice Soit E un ensemble non vide, soient $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions majorées. Démontrer que $\sup_{x \in E} f(x)$, $\sup_{x \in E} g(x)$ et $\sup_{x \in E} (f + g)(x)$ existent, puis que :

$$\sup_{x \in E} (f + g)(x) \leqslant \sup_{x \in E} f(x) + \sup_{x \in E} g(x).$$

C11.38. Exercice Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une application bornée. Démontrer que :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \inf_{y \in \mathbb{R}} f(x, y) \leqslant \inf_{y \in \mathbb{R}} \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x, y).$$

C11.39. Rappel Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si :

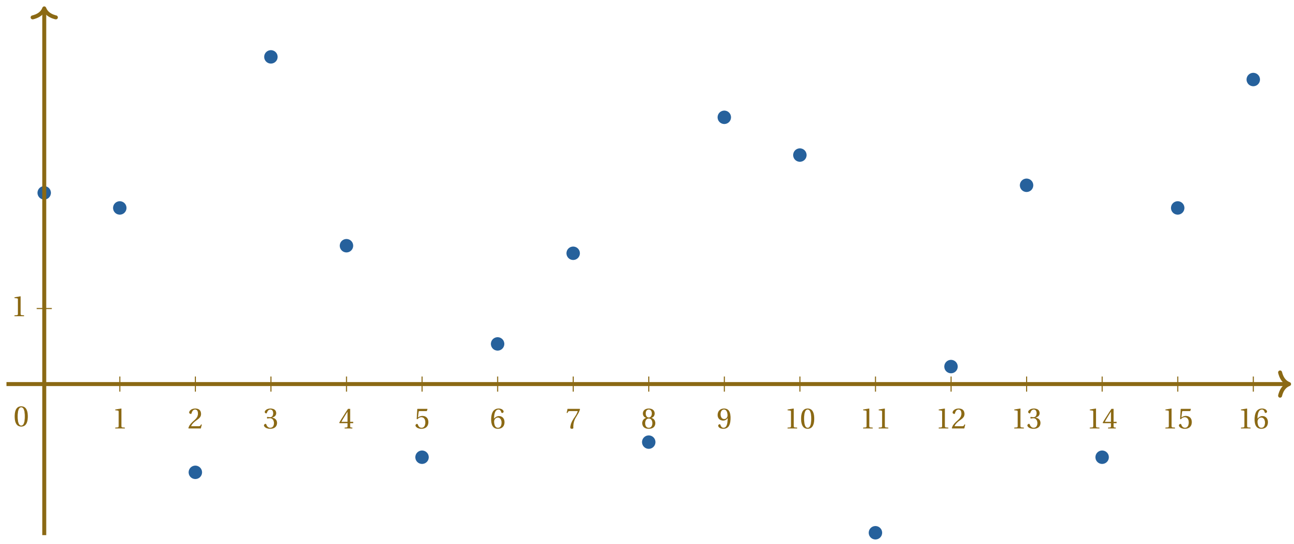
$$\forall\, (x, y, z) \in I \times \mathbb{R} \times I \qquad x \leqslant y \leqslant z \implies y \in I\,.$$

C11.40. Théorème (description des intervalles de $\mathbb{R}$ Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

1. Si I n'est ni minoré, ni majoré, alors $I = \mathbb{R}$.
2. Si I est non minoré, majoré et $\sup(I) \in A$ alors $I =]-\infty, \sup(I)]$.
3. Si I est non minoré, majoré et $\sup(I) \notin A$ alors $I =]-\infty, \sup(I)[$.
4. Si I est minoré, non majoré et $\inf(I) \in A$ alors $I = [\inf(I), +\infty[$.
5. Si I est minoré, non majoré et $\inf(I) \notin A$ alors $I =]\inf(I), +\infty[$.
6. Si I est borné, $\inf(I) \in A$ et $\sup(I) \in A$ alors $I = [\inf(I), \sup(I)]$.
7. Si I est borné, $\inf(I) \notin A$ et $\sup(I) \in A$ alors $I =]\inf(I), \sup(I)]$.
8. Si I est borné, $\inf(I) \in A$ et $\sup(I) \notin A$ alors $I = [\inf(I), \sup(I)[$.
9. Si I est borné, $\inf(I) \notin A$ et $\sup(I) \notin A$ alors $I =]\inf(I), \sup(I)[$.

§ 4 Généralités sur les suites réelles

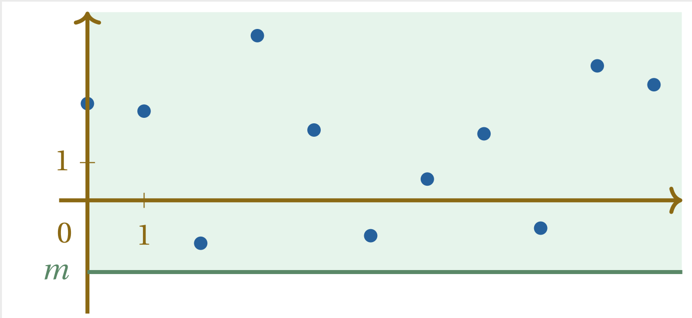
C11.41. Représentation graphique d'une suite réelle Le plan est muni d'un repère. Le graphe d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble des points du plan de coordonnées (n, u_n) où $n \in \mathbb{N}$.



C11.42. Définition (suite majorée, minorée, bornée) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

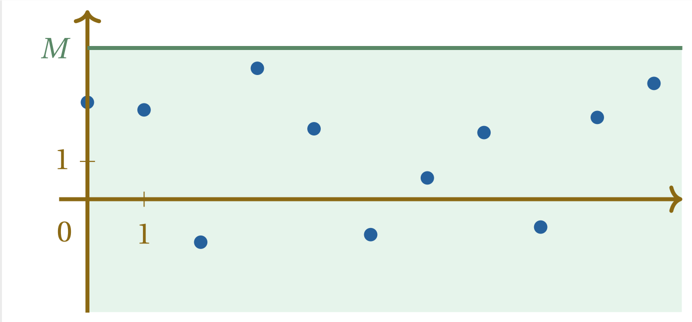
(1) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est <u>minorée</u> si :

$$\boxed{\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad m \leqslant u_n\,.}$$



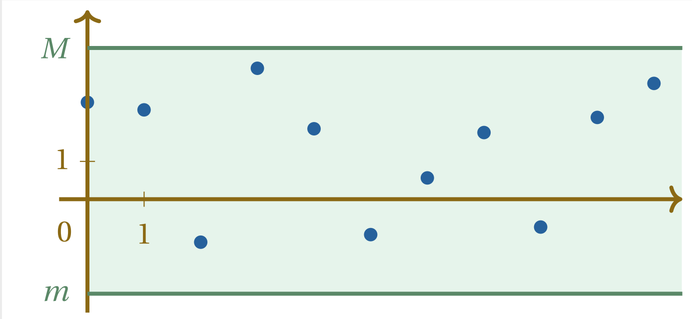
(2) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est <u>majorée</u> si :

$$\boxed{\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant M\,.}$$



(3) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est <u>bornée</u> si :

$$\boxed{\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad m \leqslant u_n \leqslant M\,.}$$

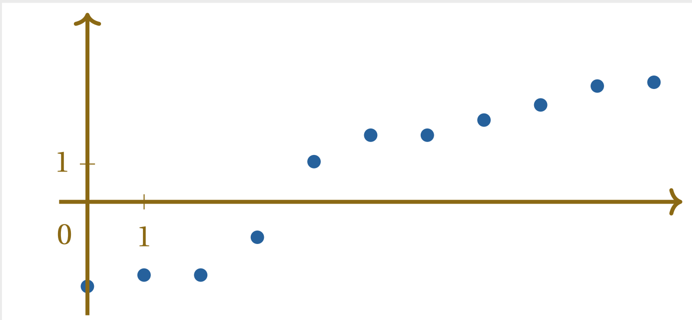


C11.43. Proposition (critère pour qu'une suite soit bornée) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

C11.44. Définition (monotonie et stricte monotonie d'une suite) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

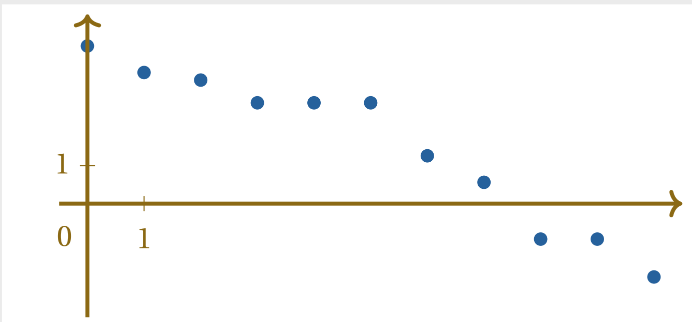
(1) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est <u>croissante</u> si :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant u_{n+1}\,.}$$



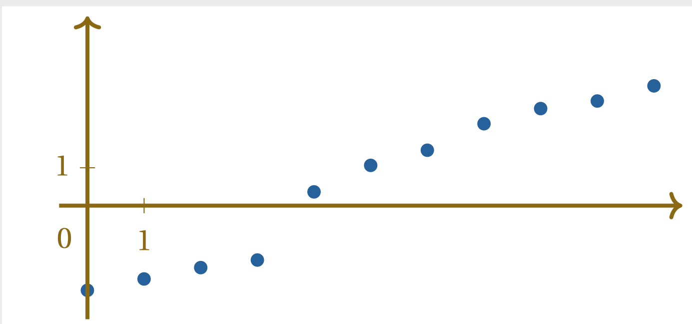
(2) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est <u>décroissante</u> si :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant u_{n+1}\,.}$$



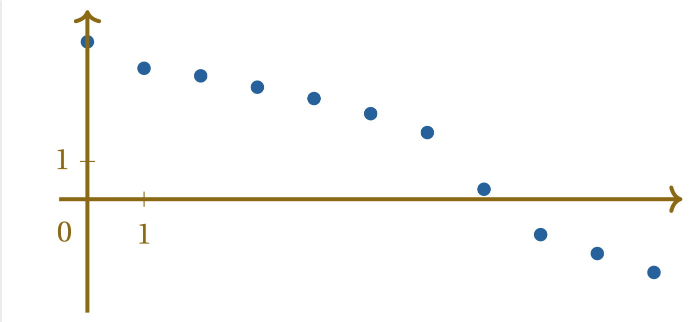
(3) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est <u>strictement croissante</u> si :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > u_{n+1}\,.}$$



(4) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est <u>strictement décroissante</u> si :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_n < u_{n+1}\,.}$$



C11.45. Exercice (étude d'une suite définie de manière explicite) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{3-n}{n+2}$. Étudier la monotonie et le caractère minoré (resp. majoré) de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

C11.46. Exercice (étude d'une suite définie par récurrence) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \sin(u_n)$, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$. Étudier la monotonie et le caractère minoré (resp. majoré) de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

C11.47. Exercice (étude d'une suite définie de manière implicite)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. démontrer que l'équation :

$$x^n + x^{n-1} + \ldots + x^2 + x = 1$$

   d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ possède une unique solution, que nous noterons u_n dans la suite.
2. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.
3. Étudier le caractère minoré (resp. majoré) de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

C11.48. Remarque Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante alors :

$$\boxed{\forall\, (n,m) \in \mathbb{N}^2 \qquad n \leqslant m \implies u_n \leqslant u_m\,.}$$

2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante alors :

$$\boxed{\forall\, (n,m) \in \mathbb{N}^2 \qquad n \leqslant m \implies u_n \geqslant u_m\,.}$$

3. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante alors :

$$\boxed{\forall\, (n,m) \in \mathbb{N}^2 \qquad n < m \implies u_n < u_m\,.}$$

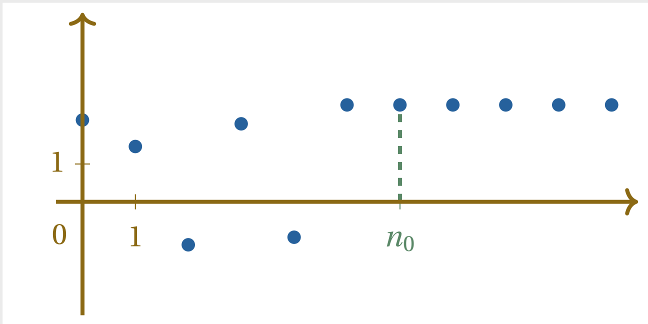
4. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante alors :

$$\boxed{\forall\, (n,m) \in \mathbb{N}^2 \qquad n < m \implies u_n > u_m\,.}$$

C11.49. Définition (suite stationnaire) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire si elle est constante à partir d'un certain rang, i.e. si :

$$\boxed{\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant n_0 \implies u_n = u_{n_0}\,.}$$

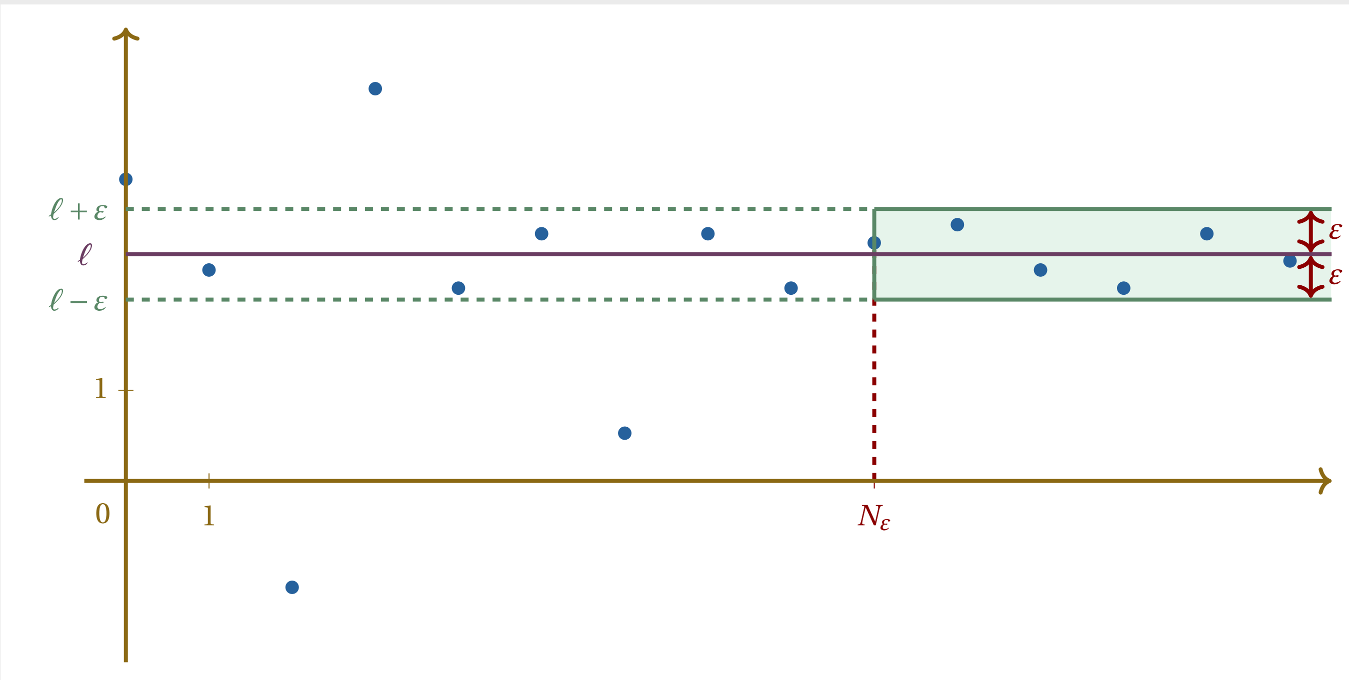


C11.50. Exercice Démontrer que la suite $\left(\left\lfloor \dfrac{2023}{n} \right\rfloor\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est stationnaire.

§ 5 Limite d'une suite réelle

C11.51. Définition (limite finie d'une suite réelle) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ lorsque n tend vers $+\infty$, si :

$$\boxed{\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists \mathbb{N}_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant N_\varepsilon \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon\,.}$$

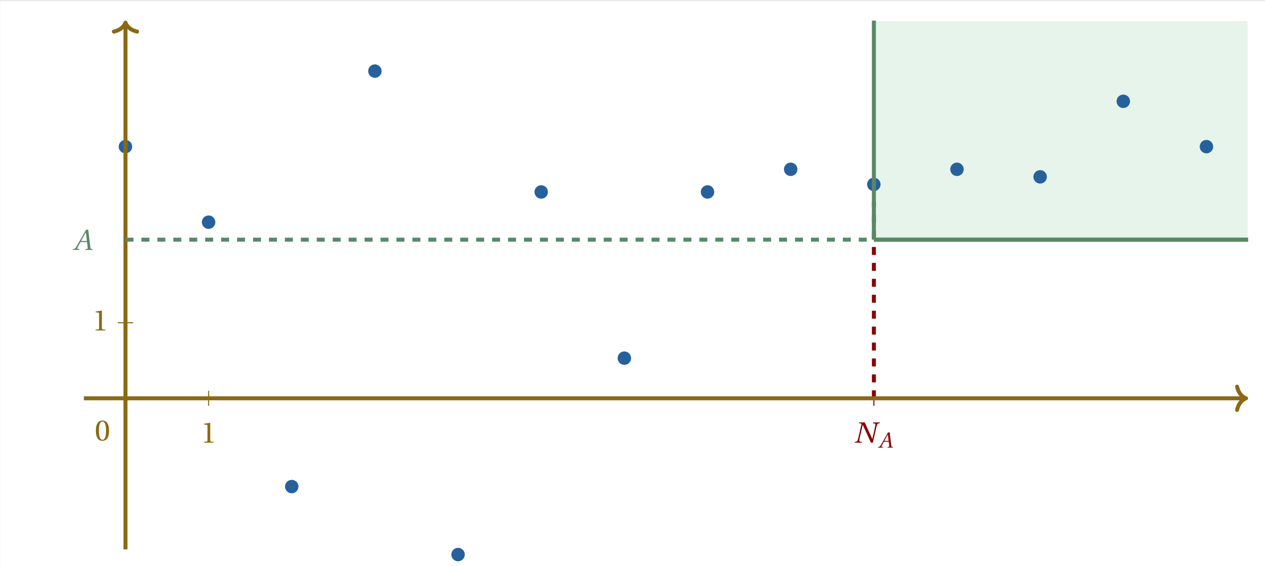


Dans ce cas, on note $\boxed{u_n \longrightarrow \ell.}$

C11.52. Définition (limite infinie d'une suite réelle) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$, si :

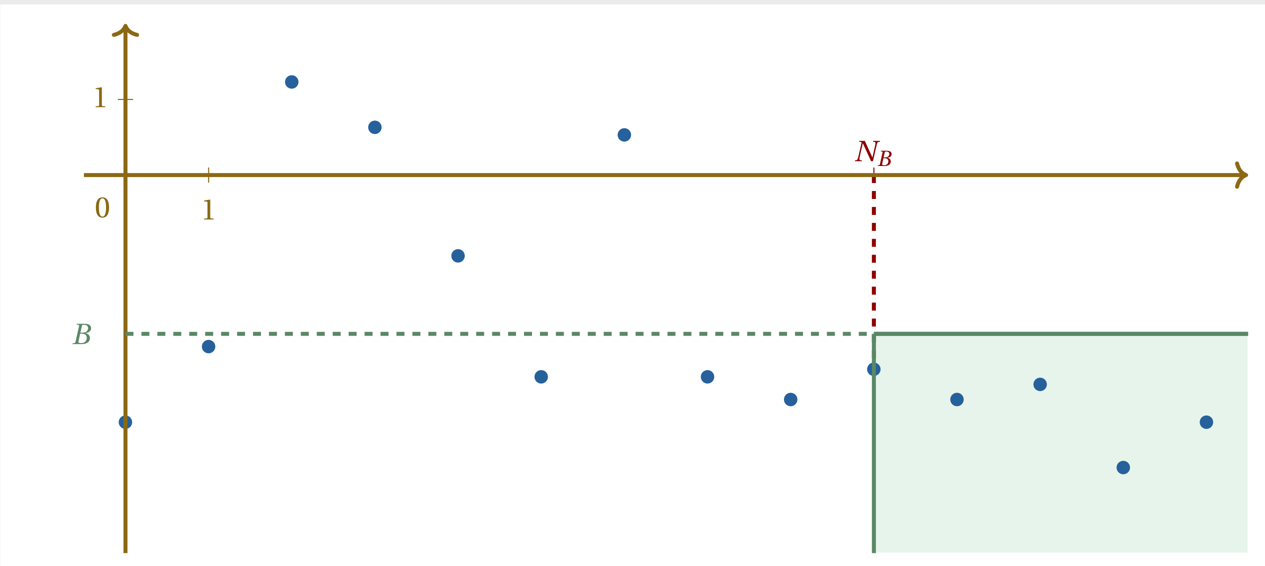
$$\boxed{\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists N_A \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant N_A \implies u_n \geqslant A\,.}$$



Dans ce cas, on note $\boxed{u_n \longrightarrow +\infty.}$

2. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$, si :

$$\boxed{\forall B \in \mathbb{R} \quad \exists N_B \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant N_B \implies u_n \leqslant B\,.}$$



Dans ce cas, on note $\boxed{u_n \longrightarrow -\infty.}$

C11.53. Exercice Démontrer que $\dfrac{n-1}{n+3} \longrightarrow 0$, en revenant à la définition.

C11.54. Exercice Démontrer que la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend vers aucun élément de $\overline{\mathbb{R}}$.

C11.55. Exercice Démontrer que $\dfrac{1}{n^2} \longrightarrow 0$, en revenant à la définition.

C11.56. Exercice Démontrer que $n-\cos(n) \longrightarrow +\infty$, en revenant à la définition.

C11.57. Proposition Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose qu'il existe $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ telle que :

$$u_n \longrightarrow \ell\,.$$

Alors ℓ est unique et est appelé <u>limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$</u>. On pose $\boxed{\lim u_n := \ell}$.

C11.58. Définition (suite convergente, suite divergente)
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite <u>convergente</u> s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Elle est dite <u>divergente</u> dans le cas contraire.

C11.59. Proposition Toute suite réelle convergente est bornée.

C11.60. Exercice (vrai ou faux) Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Chaque résultat sera justifié par une démonstration ou par un contre-exemple.

1. Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ si et seulement si la suite $(|u_n-\ell|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Si une suite réelle est bornée alors elle converge.
3. Une suite qui diverge vers $+\infty$ n'est pas majorée.
4. Une suite qui diverge vers $+\infty$ est minorée.
5. Si une suite réelle est non majorée alors elle diverge vers $+\infty$.
6. Une suite réelle est soit convergente soit divergente vers $-\infty$ ou $+\infty$.
7. Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ si et seulement si la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|\ell|$.
8. Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel 0 si et seulement si la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
9. Une suite réelle qui converge vers 0 a un signe constant à partir d'un certain rang.
10. Une suite réelle qui diverge vers $+\infty$ est croissante à partir d'un certain rang.
11. Une suite réelle est bornée si et seulement si elle est bornée à partir d'un certain rang.
12. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n>0$ si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ alors $\ell>0$.

C11.61. Proposition Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers un réel $\ell>0$. Alors $u_n>0$ à partir d'un certain rang, i.e. :

$$\boxed{\exists\, n_0\in\mathbb{N} \quad \forall\, n\in\mathbb{N} \qquad n\geqslant n_0 \Longrightarrow u_n>0\,.}$$

C11.62. Proposition (opérations sur les limites) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites, $(\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\left(\ell_1^*, \ell_2^*\right) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

(1) *Addition de deux suites*

(a) Si $u_n \longrightarrow \ell_1$ et $v_n \longrightarrow \ell_2$ alors $u_n + v_n \longrightarrow \ell_1 + \ell_2$.

(b) Si $u_n \longrightarrow \ell_1$ et $v_n \longrightarrow +\infty$ alors $u_n + v_n \longrightarrow +\infty$.

(c) Si $u_n \longrightarrow \ell_1$ et $v_n \longrightarrow -\infty$ alors $u_n + v_n \longrightarrow -\infty$.

(d) Si $u_n \longrightarrow +\infty$ et $v_n \longrightarrow +\infty$ alors $u_n + v_n \longrightarrow +\infty$.

(e) Si $u_n \longrightarrow -\infty$ et $v_n \longrightarrow -\infty$ alors $u_n + v_n \longrightarrow -\infty$.

(2) *Multiplication par un scalaire non nul λ*

(f) Si $u_n \longrightarrow \ell_1$ alors $\lambda u_n \longrightarrow \lambda \ell_1$.

(g) Si $u_n \longrightarrow +\infty$ alors $\lambda u_n \longrightarrow \mathrm{sgn}(\lambda) \times +\infty$.

(h) Si $u_n \longrightarrow -\infty$ alors $\lambda u_n \longrightarrow \mathrm{sgn}(\lambda) \times -\infty$.

(3) *Multiplication de deux suites*

(i) Si $u_n \longrightarrow \ell_1$ et $v_n \longrightarrow \ell_2$ alors $u_n v_n \longrightarrow \ell_1 \ell_2$.

(j) Si $u_n \longrightarrow \ell_1^*$ et $v_n \longrightarrow +\infty$ alors $u_n v_n \longrightarrow \mathrm{sgn}(\ell_1) \times +\infty$.

(k) Si $u_n \longrightarrow \ell_1^*$ et $v_n \longrightarrow -\infty$ alors $u_n v_n \longrightarrow \mathrm{sgn}(\ell_1) \times -\infty$.

(l) Si $u_n \longrightarrow +\infty$ et $v_n \longrightarrow +\infty$ alors $u_n v_n \longrightarrow +\infty$.

(m) Si $u_n \longrightarrow +\infty$ et $v_n \longrightarrow -\infty$ alors $u_n v_n \longrightarrow -\infty$.

(n) Si $u_n \longrightarrow -\infty$ et $v_n \longrightarrow -\infty$ alors $u_n v_n \longrightarrow +\infty$.

(4) *Quotient de deux suites* On suppose qu'aucun des termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est nul.

(o) Si $u_n \longrightarrow \ell_1$ et $v_n \longrightarrow \ell_2^*$ alors $\dfrac{u_n}{v_n} \longrightarrow \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$.

(p) Si $u_n \longrightarrow \ell_1$ et $v_n \longrightarrow +\infty$ alors $\dfrac{u_n}{v_n} \longrightarrow 0$.

(q) Si $u_n \longrightarrow \ell_1$ et $v_n \longrightarrow -\infty$ alors $\dfrac{u_n}{v_n} \longrightarrow 0$.

(r) Si $u_n \longrightarrow +\infty$ et $v_n \longrightarrow \ell_2^*$ alors $\dfrac{u_n}{v_n} \longrightarrow \mathrm{sgn}(\ell_2) \times +\infty$.

(s) Si $u_n \longrightarrow -\infty$ et $v_n \longrightarrow \ell_2^*$ alors $\dfrac{u_n}{v_n} \longrightarrow \mathrm{sgn}(\ell_2) \times -\infty$.

Démonstration

(a) Supposons $u_n \longrightarrow \ell_1$ et $v_n \longrightarrow \ell_2$.
Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$(\star) \qquad \text{pour tout } n \geqslant N_1, \quad |u_n - \ell_1| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

et il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$(\star\star) \qquad \text{pour tout } n \geqslant N_2, \quad |v_n - \ell_2| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soient $N_\varepsilon := \max\{N_1, N_2\}$ et $n \geqslant N_\varepsilon$.

D'après l'inégalité triangulaire :

$$|u_n + v_n - (\ell_1 + \ell_2)| \leqslant |u_n - \ell_1| + |u_n - \ell_2| \,.$$

Puisque $n \geqslant N_\varepsilon \geqslant N_1$ et $n \geqslant N_\varepsilon \geqslant N_2$, nous déduisons de $(\star)$ et $(\star\star)$:

$$|u_n + v_n - (\ell_1 + \ell_2)| \leqslant |u_n - \ell_1| + |u_n - \ell_2| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \,.$$

(i) Supposons $u_n \longrightarrow \ell_1$ et $v_n \longrightarrow \ell_2$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée, i.e. il existe $M > 0$ tel que :

$$(\star) \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant M.$$

Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$(\star\star) \qquad \text{pour tout } n \geqslant N_1, \quad |u_n - \ell_1| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\,(|\ell_2| + 1)}$$

et il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$(\star\star\star) \qquad \text{pour tout } n \geqslant N_2, \quad |v_n - \ell_2| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\,M}\,.$$

Soient $N_\varepsilon := \max\{N_1, N_2\}$ et $n \geqslant N_\varepsilon$, de sorte que $n \geqslant N_1$ et $n \geqslant N_2$.

$$\begin{array}{rcll}
|u_n v_n - \ell_1 \ell_2| & = & |u_n v_n - u_n \ell_2 + u_n \ell_2 - \ell_1 \ell_2| & \\
& \leqslant & |u_n|\,|v_n - \ell_2| + |\ell_2|\,|u_n - \ell_1| & [\text{propriété de la valeur absolue}] \\
& \leqslant & M\,|v_n - \ell_2| + |\ell_2|\,|u_n - \ell_1| & [(\star)] \\
& \leqslant & M\,\dfrac{\varepsilon}{2\,M} + |\ell_2|\,\dfrac{\varepsilon}{2\,(|\ell_2|+1)} & [(\star\star) \text{ et } (\star\star\star)] \\
& \leqslant & \varepsilon &
\end{array}$$

C11.63. Exercice Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes tous non nuls telle que $u_n \longrightarrow 0$.

1. La suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ possède-t-elle une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$?
2. On suppose de plus que $u_n > 0$ à partir d'un certain rang. Démontrer que $\dfrac{1}{u_n} \longrightarrow +\infty$.

C11.64. Proposition (produit d'une suite bornée par une suite convergeant vers 0)
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Si $u_n \longrightarrow 0$ et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors $u_n v_n \longrightarrow 0$.

C11.65. Exercice Étudier le comportement asymptotique de la suite $\left(\dfrac{n^2 + \sin(n)}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

§ 6 Passage à la limite dans une inégalité large

C11.66. Proposition (passage à la limite dans une inégalité large)
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites possédant chacune une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\lim u_n \leqslant \lim v_n$.

Démonstration

On suppose que $\ell_1 := \lim u_n$ et $\ell_2 := \lim v_n$ sont des nombres réels.
Soit $\varepsilon > 0$.
Par hypothèse :

- il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_0$, $u_n \leqslant v_n$;
- il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_1$, $\ell_1 - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell_1 + \varepsilon$;
- il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_2$, $\ell_2 - \varepsilon \leqslant v_n \leqslant \ell_2 + \varepsilon$.

Ainsi, si $N := \max\{N_0, N_1, N_2\}$, $0 \leqslant v_N - u_N \leqslant \ell_2 + \varepsilon - (\ell_1 - \varepsilon) = \ell_2 - \ell_1 + 2\varepsilon$.
Nous déduisons de cette étude que :

$$(\star) \qquad \text{pour tout } \varepsilon > 0, \quad \ell_1 - \ell_2 \leqslant 2\varepsilon.$$

Si $\ell_1 - \ell_2 > 0$ alors $(\star)$ appliqué avec $\varepsilon \leftarrow \dfrac{\ell_1 - \ell_2}{3} > 0$ livre une contradiction. Donc $\ell_1 - \ell_2 \leqslant 0$.

C11.67. Exercice Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite minorée par 0 et majorée par 1. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, que peut-on dire de $\lim u_n$?

§ 7 Théorèmes fondamentaux d'existence de limites

C11.68. Théorème (existence d'une limite finie par encadrement) Soient trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On suppose que :

(H1) $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang ;

(H2) les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers le même réel ℓ.

Alors

(C1) la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie (i.e. converge) ;

(C2) $\lim v_n = \ell$.

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse :

- il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_0$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$;
- il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_1$, $\ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon$;
- il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_2$, $\ell - \varepsilon \leqslant w_n \leqslant \ell + \varepsilon$.

Soient $N_\varepsilon := \max\{N_0, N_1, N_2\}$ et $n \geqslant N_\varepsilon$, de sorte que $n \geqslant N_0$, $n \geqslant N_1$ et $n \geqslant N_2$. Alors :

$$\ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \leqslant \ell + \varepsilon$$

et donc $|v_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.

C11.69. Exercice Étudier comportement asymptotique d'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2}\,|u_n - 1|\,.$$

C11.70. Exercice Soit un réel x. On rappelle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n^- (resp. x_n^+) désigne la valeur décimale approchée par défaut (resp. par excès) de x avec une précision de 10^{-n}. Démontrer $x_n^- \longrightarrow x$ et $x_n^+ \longrightarrow x$.

C11.71. Théorème (divergence vers $+\infty$ par domination) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose que :

(H1) $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang ;

(H2) $u_n \longrightarrow +\infty$.

Alors

(C1) la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$;

(C2) $\lim v_n = +\infty$.

Démonstration

Soit $A \in \mathbb{R}$. Par hypothèse :

- il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_0$, $u_n \leqslant v_n$;
- il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_1$, $A \leqslant u_n$.

Soient $N_A := \max\{N_0, N_1\}$ et $n \geqslant N_A$, de sorte que $n \geqslant N_0$ et $n \geqslant N_1$. Alors $A \leqslant u_n \leqslant v_n$ et donc $A \leqslant v_n$.

C11.72. Exercice Étudier comportement asymptotique d'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n + \frac{1}{2} \leqslant u_{n+1}\,.$$

C11.73. Corollaire (divergence vers $-\infty$ par domination) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose que :

(H1) $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang ;

(H2) $v_n \longrightarrow -\infty$.

Alors

(R1) la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite ;

(R2) $\lim u_n = -\infty$.

Démonstration

On applique le théorème C11.71 aux suites $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(-v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis un résultat sur les opérations sur les limites (cf. propriété (g) de C11.62).

C11.74. Exercice Démontrer que $\sin(n) + (-1)^n - n \longrightarrow -\infty$.

C11.75. Théorème (de la limite monotone) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$. Précisément on a les résultats suivants.

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante alors :

$$u_n \longrightarrow \begin{cases} \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n \in \mathbb{R} & \text{si } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est majorée;} \\ \\ +\infty & \text{si } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'est pas majorée.} \end{cases}$$

2. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante alors :

$$u_n \longrightarrow \begin{cases} \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n \in \mathbb{R} & \text{si } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est minorée;} \\ \\ +\infty & \text{si } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'est pas minorée.} \end{cases}$$

C11.76. Exercice Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Démontrer que $S_{2n} - S_n \geqslant \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Étudier les variations de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Déduire des deux questions précédentes que $S_n \longrightarrow +\infty$.

C11.77. Définition (suites adjacentes) Deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont <u>adjacentes</u> si :

1. l'une est croissante;
2. l'autre est décroissante;
3. $u_n - v_n \longrightarrow 0$.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On peut avoir $u_n - v_n \longrightarrow 0$ sans qu'aucune des deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admettent de limite. Un contre-exemple est donné par les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n := (-1)^n + \frac{1}{n+1} \qquad \text{et} \qquad v_n := (-1)^n .$$

C11.78. Théorème (des suites adjacentes) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes. Alors :

(C1) les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettent une limite finie (i.e. convergent);

(C2) $\lim u_n = \lim v_n$.

En outre si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante alors :

$$\forall\, (p,q) \in \mathbb{N}^2 \qquad u_p \leqslant \lim u_n = \lim v_n \leqslant v_q .$$

C11.79. Exercice Démontrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_n := u_n + \frac{1}{n \times n!}$$

convergent et que $\lim u_n = \lim v_n$.

§ 8 Suites extraites

C11.80. Défintion (suite extraite) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On appelle suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\varphi\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

C11.81. Exemple Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Alors les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites extraites de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

C11.82. Exercice (double extraction d'une suite réelle) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Soit $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\varphi\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante. Justifier qu'une suite extraite de $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

C11.83. Lemme (clé pour les suites extraites) Soit $\varphi\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante. Alors :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N} \qquad \varphi(n)\geqslant n\,.}$$

Démonstration

Nous raisonnons par récurrence. Posons, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ le prédicat « $\varphi(n)\geqslant n$ ».

- *Initialisation* Comme φ est à valeurs dans $\mathbb{N}$, $\varphi(0)\in\mathbb{N}$ et donc $\varphi(0)\geqslant 0$.
- *Hérédité* Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $\varphi(n)\geqslant n$. Comme $n<n+1$ et φ est strictement croissante :

$$n\leqslant\varphi(n)<\varphi(n+1)$$

et donc $n<\varphi(n+1)$. Comme n et $\varphi(n+1)$ sont entiers, nous en déduisons :

$$n+1\leqslant\varphi(n+1)\,.$$

C11.84. Théorème (limite d'une suite extraite d'une suite admettant une limite) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Soit $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\varphi\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante. Soit $\ell\in\overline{\mathbb{R}}$.

$$\boxed{u_n \longrightarrow \ell \quad\Longrightarrow\quad u_{\varphi(n)} \longrightarrow \ell\,.}$$

Démonstration

Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et posons $\ell := \lim u_n \in\mathbb{R}$.
Soit $\varepsilon>0$. Comme $u_n \longrightarrow \ell$, il existe $N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tel que :

$$(\star) \qquad \text{pour tout } m\geqslant N_\varepsilon,\quad |u_m-\ell|\leqslant\varepsilon\,.$$

Soit $n\geqslant N_\varepsilon$. Par le lemme précédent $\varphi(n)\geqslant n\geqslant N_\varepsilon$ et donc d'après $(\star)$ $(m\leftarrow\varphi(n))$:

$$\left|u_{\varphi(n)}-\ell\right|\leqslant\varepsilon\,.$$

C11.85. Exercice Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_n \longrightarrow 0$. Que dire du comportement asymptotique des suites suivantes.

$$(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \qquad (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \qquad (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} \qquad (u_{3n^2+7})_{n\in\mathbb{N}}$$

C11.86. Remarque Le théorème C11.84 a de très nombreuses applications. Il permet, par exemple, d'établir que des suites n'ont pas de limite (cf. exercices suivants).

C11.87. Exercice Déduire du théorème C11.84 que la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a aucune limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.

C11.88. Exercice Déduire du théorème C11.84 et des relations :

$$\cos(n+1) = \cos(n)\cos(1) - \sin(n)\sin(1) \qquad \text{et} \qquad \cos^2(n) + \sin^2(n) = 1$$

valables pour tout $n \in \mathbb{N}$, que la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'a aucune limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.

C11.89. Existence de limite via les suites extraites des termes d'indices pairs et impairs
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\boxed{\left(u_{2n} \longrightarrow \ell \text{ et } u_{2n+1} \longrightarrow \ell\right) \quad \Longrightarrow \quad u_n \longrightarrow \ell.}$$

Démonstration

Supposons $\ell \in \mathbb{R}$, $u_{2n} \longrightarrow \ell$ et $u_{2n+1} \longrightarrow \ell$.
Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse :

(a) il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geqslant N_1$, $\left|u_{2p} - \ell\right| \leqslant \varepsilon$;
(b) il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geqslant N_2$, $\left|u_{2p+1} - \ell\right| \leqslant \varepsilon$.

Soient $N_\varepsilon := \max\{2N_1, 2N_2+1\}$ et $n \geqslant N_\varepsilon$.

- *Cas où n est pair.* S'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$, alors :
$$2p = n \geqslant N_\varepsilon \geqslant 2N_1$$
livre $p \geqslant N_1$. D'après (a), $|u_n - \ell| = \left|u_{2p} - \ell\right| \leqslant \varepsilon$.
- *Cas où n est impair.* S'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p+1$, alors :
$$2p+1 = n \geqslant N_\varepsilon \geqslant 2N_2 + 1$$
livre $p \geqslant N_2$. D'après (b), $|u_n - \ell| = \left|u_{2p+1} - \ell\right| \leqslant \varepsilon$.

Dans tous les cas, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.

C11.90. Remarque Ce théorème peut être utilisé pour établir la convergence d'une suite définie par récurrence dans le cas où la fonction sous-jacente est décroissante.

C11.91. Théorème (de Bolzano-Weierstrass)

Toute suite réelle bornée possède une suite extraite convergente.

C11.92. Exercice Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles bornées. Démontrer qu'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que les suites $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

C11.93. Exercice Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite non majorée.
Démontrer qu'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle $u_{\varphi(n)} \longrightarrow +\infty$.

§ 9 Traduction séquentielle de certaines propriétés

C11.94. Définition (partie dense de $\mathbb{R}$) Une partie A de $\mathbb{R}$ est dense si :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \qquad a < b \Longrightarrow A \cap]a,b[\neq \emptyset\,.$$

C11.95. Exemple Les parties $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$, cf. C11.17 (énoncé et démonstration) et C11.18.

C11.96. Caractérisation séquentielle de la densité Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Alors A est dense si et seulement si :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \qquad a_n \longrightarrow x\,.}$$

Démonstration

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que A est dense dans $\mathbb{R}$ et considérons un réel x.
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left]x - \frac{1}{n+1}, x + \frac{1}{n+1}\right[\cap A \neq \emptyset\,.$$

Soit donc $a_n \in \left]x - \frac{1}{n+1}, x + \frac{1}{n+1}\right[\cap A$.
Par construction :

- la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de A :
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x - \frac{1}{n+1} < a_n < x + \frac{1}{n+1}$ et donc $a_n \longrightarrow x$ (théorème d'encadrement).

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $a_n \longrightarrow x$. Considérons deux nombres réels a et b tels que $a < b$.
Par hypothèse, il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $a_n \longrightarrow \frac{a+b}{2}$. Comme $\epsilon := \frac{b-a}{3} > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$, $\left|a_n - \frac{a+b}{2}\right| \leqslant \varepsilon$. En particulier :

$$a < \frac{5a+b}{6} = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{3} = \frac{b-a}{3} - \varepsilon \leqslant a_{N_\varepsilon} \leqslant \frac{b-a}{3} + \varepsilon = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{3} = \frac{a+5b}{6} < b\,.$$

Ainsi $a_{N_\varepsilon} \in A \cap]a,b[$.

C11.97. Exercice (densité des nombres triadiques) Démonter que $A := \left\{\frac{n}{3^p} : (n,p) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}\right\}$ est dense.

C11.98. Caractérisation séquentielle de la borne supérieure Soient A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée, $M \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{M = \sup(A) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \forall a \in A \quad a \leqslant M & [M \text{ majore } A] \\ \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \quad a_n \longrightarrow M & [\text{une suite de points de } A \text{ converge vers } M] \end{cases}}$$

C11.99. Caractérisation séquentielle de la borne inférieure Soient A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée, $m \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{m = \inf(A) \iff \begin{cases} \forall\, a \in A \quad m \leqslant a & [m \text{ minore } A] \\ \exists\, (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \quad a_n \longrightarrow m & [\text{une suite de points de } A \text{ converge vers } m] \end{cases}}$$

§ 10 Suites complexes

C11.100. Définition (suite complexe convergente) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et on écrit $u_n \longrightarrow \ell$ si :

$$\boxed{\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad n \geq N_\varepsilon \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon\,.}$$

où $|\cdot|$ désigne le module.

C11.101. Caractérisation de la convergence par les parties réelle et imaginaire Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et $\ell \in \mathbb{C}$.

$$\boxed{u_n \longrightarrow \ell \quad \iff \quad \begin{cases} & \operatorname{Re}(u_n) \longrightarrow \operatorname{Re}(\ell) \\ \text{et} & \\ & \operatorname{Im}(u_n) \longrightarrow \operatorname{Im}(\ell) \end{cases}}$$

C11.102. Notions et résultats sur les suites réelles qui <u>s'étendent</u> aux suites complexes

- Les théorèmes d'opérations.
- Le théorème de Bolzano-Weierstrass.

C11.103. Notions et résultats sur les suites réelles qui <u>ne s'étendent pas</u> aux suites complexes

- La notion de suite monotone, le théorème de convergence monotone.
- La notion de suites adjacentes, le théorème des suites adjacentes.

C11.104. Exercice (module et arguments) Soit $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. Soit $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On suppose que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de terme général

$$z_n := \rho_n e^{i\theta_n}$$

est convergente et on note $z = \rho e^{i\theta}$ sa limite (que l'on suppose non nulle), où ρ est un réel positif et θ un réel.

1. Les suites $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent-elles nécessairement ?
2. Reprendre la question 1 avec l'hypothèse additionnelle suivante.

$$(\text{H1}) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \theta_n \in\,]\theta - \pi, \theta + \pi]$$

3. Reprendre la question 1 avec les hypothèses additionnelles suivantes.

$$\begin{array}{ll} (\text{H1}) & \forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \theta_n \in\,]\theta - \pi, \theta + \pi] \\ (\text{H2}) & \rho > 0 \end{array}$$

C11.104.01. De la suite $\left(q^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ où q est un nombre complexe

(1) Si $|q| < 1$ alors $q^n \longrightarrow 0$.
(2) Si $q = 1$ alors la suite $\left(q^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1 donc $q^n \longrightarrow 1$.
(3) Si $|q| = 1$ et $q \neq 1$ alors la suite $\left(q^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée mais ne possède aucune limite dans $\mathbb{C}$.
(4) Si $|q| > 1$ alors la suite $\left(q^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée donc ne possède aucune limite dans $\mathbb{C}$.

§ 11 Suites arithmétiques

C11.105. Définition (suite arithmétique et raison d'une telle) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Elle est dite arithmétique si l'on passe d'un terme de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au suivant en ajoutant une même constante, i.e. si :

$$\exists r \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + r\,.$$

De plus, si un tel réel r existe alors il est unique (puisque égal $u_1 - u_0$) et il est appelé raison de la suite.

C11.106. Exercice

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n := 3 - 2n$, est-elle arithmétique?
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n := 4^n$ est-elle arithmétique?

C11.107. Formule explicite pour le terme général d'une suite arithmétique Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.

$$\boxed{\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \qquad u_n = u_p + (n-p)r.}$$

C11.108. Exercice Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite arithmétique de raison 3. Donner une expression de u_n en fonction de u_1, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

C11.109. Définition (d'une suite arithmétique par son premier terme et sa raison) Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et deux nombres réels α, r.

1. Il existe une unique suite arithmétique $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ de premier terme $u_{n_0} = \alpha$ et de raison r. On la nomme suite arithmétique indicée par $\mathbb{N}_{\geqslant n_0}$ de premier terme α et de raison r.
2. La suite arithmétique $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ de premier terme $u_{n_0} = \alpha$ et de raison r vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}_{\geqslant n_0} \qquad u_n = \alpha + (n - n_0)r.$$

C11.110. Exercice Étudier le sens de variation et la limite éventuelle de la suite arithmétique $(u_n)_{n\geqslant 1}$ de premier terme 3 et de raison 7.

C11.111. Exercice Soient deux nombres réels α et r. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique indicée par $\mathbb{N}$ de premier terme α et de raison r. Soient n_1 et n_2 des entiers naturels tels que $n_1 \leqslant n_2$. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=n_1}^{n_2} u_k$.

§ 12 Suites géométriques

C11.112. Définition (suite géométrique et raison d'une telle) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Elle est dite si l'on passe d'un terme de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au suivant en multipliant par une même constante, i.e. si :

$$\exists q \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = q \times u_n\,.$$

De plus, si le premier terme u_0 de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nul et si un tel réel q existe alors ce dernier est unique (puisque égal à u_1/u_0) et il est appelé raison de la suite.

C11.113. Exercice

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n := \dfrac{5}{2^n}$ est-elle géométrique ?
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n := 2n+1$ est-elle géométrique ?

C11.114. Formule explicite pour le terme général d'une suite géométrique Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite géométrique de raison q.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}_{\geqslant n_0} \qquad u_n = u_{n_0} \times q^{n-n_0}.}$$

C11.115. Exercice Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite géométrique de raison 2. Donner une expression de u_n en fonction de u_1, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

C11.116. Définition (d'une suite géométrique par son premier terme et sa raison) Soient $n_0 \in \mathbb{N}$, deux nombres réels α, q.

1. Il existe une unique suite géométrique $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ de premier terme $u_{n_0} = \alpha$ et de raison q. On la nomme suite géométrique indicée par $\mathbb{N}_{\geqslant n_0}$ de premier terme α et de raison q.
2. La suite géométrique $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ de premier terme $u_{n_0} = \alpha$ et de raison q vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0} \quad u_{n_0} = \alpha \times q^{n-n_0}.$$

C11.117. Exercice Étudier le sens de variation de la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de premier terme 6 et de raison $\dfrac{1}{3}$.

C11.118. Exercice Soient deux nombres réels α et q. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique indicée par $\mathbb{N}$ de premier terme α et de raison q. Soient n_1 et n_2 des entiers naturels tels que $n_1 \leqslant n_2$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=n_1}^{n_2} u_k$.

C11.119. Théorème (limite de $\left(q^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ où $q \in \mathbb{R}$) Soit $q \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{q^n \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < q < 1 \\ 1 & \text{si } q = 1 \\ +\infty & \text{si } q > 1. \end{cases}}$$

Si $q < -1$ alors la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.

§ 13 Suites arithmético-géométriques

C11.120. Définition (suite arithmético-géométrique) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Elle est dite arithmético-géométrique si :

$$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = au_n + b.$$

C11.121. Remarque Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique. Alors :

$$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = au_n + b.$$

1. Si $a = 1$, alors la suite est arithmétique.
2. Si $b = 0$, alors la suite est géométrique.

Les suites arithmético-géométriques généralisent donc les suites arithmétiques et les suites géométriques.

C11.122. Méthode pour expliciter le terme général d'une suite arithmético-géométrique
Soient $n_0 \in \mathbb{N}$, a un réel différent de 1 et b un réel. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ définie par la donnée de son premier terme u_{n_0} dans $\mathbb{R}$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = au_n + b$$

valable pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geqslant n_0}$. La suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est bien définie et est arithmético-géométrique (par définition même). Pour obtenir une formule explicite de u_n ($n \in \mathbb{N}_{\geqslant n_0}$), on peut procéder comme suit.

1. On calcule le point fixe de l'application affine $x \longmapsto ax+b$, i.e. on résout l'équation $ax+b = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. On note x_0 l'unique solution de cette équation.
2. On démontre que la suite $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ définie par, pour tout $n \geqslant n_0$:

$$\boxed{v_n := u_n - x_0}$$

   est géométrique de raison a.
3. On en déduit une expression de v_n en fonction de n ($n \in \mathbb{N}_{\geqslant n_0}$).
4. De $v_n = u_n - x_0$, pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geqslant n_0}$, et du résultat de l'étape 3., on déduit une formule explicite pour u_n en fonction de n ($n \in \mathbb{N}_{\geqslant n_0}$).

C11.123. Exercice Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 2$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{2}$$

valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

§ 14 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

C11.124. Définition (suite récurrente linéaire d'ordre 2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Elle est dite récurrente linéaire d'ordre 2 si :

$$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

C11.125. FORMULE EXPLICITE POUR LE TERME GÉNÉRAL D'UNE SUITE RÉCURRENTE LINÉAIRE D'ORDRE 2

Soient a et b deux nombres réels. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de ses deux premiers termes u_0 et u_1 dans $\mathbb{R}$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

valable pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et est récurrente linéaire d'ordre 2 (par définition-même). On introduit son équation caractéristique :

$$(E_{\text{car}}) \ : \ x^2 - ax - b = 0$$

d'inconnue $x \in \mathbb{C}$.

- *Cas où (E_{car}) possède deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$* Si ((E_{car}) possède deux solutions distinctes r_1 et r_2 dans $\mathbb{R}$, alors il existe deux réels λ_1 et λ_2 tels que :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \lambda_1\, r_1^n + \lambda_2\, r_2^n.}$$

- *Cas où (E_{car}) possède une unique solution dans $\mathbb{R}$* Si (E_{car}) possède une unique solution r_0 dans $\mathbb{R}$, alors il existe deux réels λ_1 et λ_2 tels que :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \lambda_1\, r_0^n + \lambda_2\, n\, r_0^n.}$$

- *Cas où (E_{car}) possède deux solutions complexes conjuguées dans $\mathbb{C}$* Si (E_{car}) possède deux solutions complexes conjuguées dans $\mathbb{C}$, alors celles-ci sont non nulles ; on peut donc les écrire sous la forme $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$ où $r \in \mathbb{R}_{>0}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ (forme exponentielle). Il existe deux réels λ_1 et λ_2 tels que :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \lambda_1\, r^n \cos(n\theta) + \lambda_2\, r^n \sin(n\theta).}$$

Démonstration Ce théorème sera démontré plus tard dans l'année, à l'aide des matrices.

C11.126. REMARQUE Le théorème précédent présente une forte analogie avec celui donnant l'ensemble solution d'une EDLCCH2 dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Toutefois on prendra garde qu'ici, dans le troisième cas, on considère une forme exponentielle des deux solutions (et non une forme algébrique comme pour les EDLCCH2).

C11.127. EXERCICE

1. Expliciter le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n$$

valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Expliciter le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ et la relation de récurrence

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$$

valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.