Chapitre n°9
Calcul de primitives

C9.1. Notations

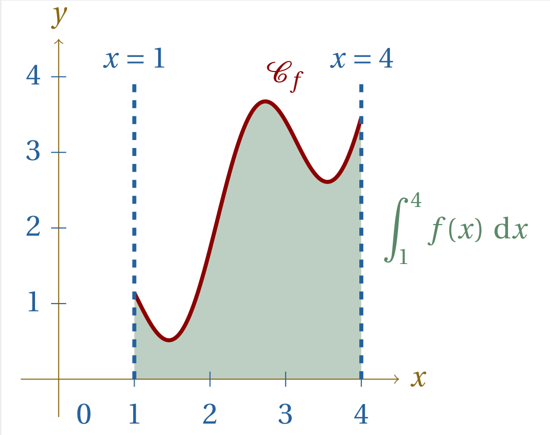
1. On fixe un repère orthonormé $\left(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$ du plan $\mathscr{P}$.
2. L'unité d'aire est l'aire du carré dont O, I, J sont des sommets.
3. Les lettres a et b désignent des nombres réels tels que $a < b$.

§ 1 Rappels sur la notion d'intégrale

C9.2. Définition (intégrale d'une fonction continue et positive sur un segment)

Soit $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et positive sur $[a,b]$. L'intégrale de f sur $[a,b]$ est définie par :

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x := \left(\begin{array}{l}\text{Aire de la portion de plan délimitée par :}\\ \bullet\ \mathscr{C}_f\,;\\ \bullet\ (0x)\,;\\ \bullet\ \text{la droite d'équation } x = a\,;\\ \bullet\ \text{la droite d'équation } x = b\,;\\ \text{exprimée dans l'unité d'aire.}\end{array}\right)$$



C9.3. Exercice Calculer $I_1 := \displaystyle\int_0^5 2\ \mathrm{d}x$ par voie géométrique.

C9.4. Exercice Calculer $I_2 := \displaystyle\int_0^1 7x\ \mathrm{d}x$ par voie géométrique.

C9.5. Exercice Calculer $I_3 := \displaystyle\int_2^5 3x - 1\ \mathrm{d}x$ par voie géométrique.

C9.6. Exercice Calculer $I_4 := \displaystyle\int_0^4 |x-3|\ \mathrm{d}x$ par voie géométrique.

C9.7. Exercice Calculer $I_5 := \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x$ par voie géométrique.

C9.8. Définition (intégrale d'une fonction continue sur un segment) Soit $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$. L'intégrale de f sur $[a,b]$ est définie par :

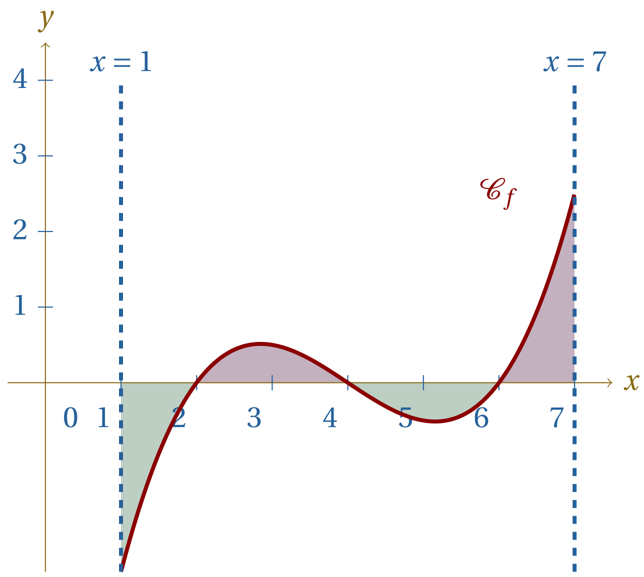
$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x := \left(\begin{array}{l}\text{Aire \underline{algébrique} de la portion de plan délimitée par :}\\ \bullet\ \mathscr{C}_f\,;\\ \bullet\ (0x)\,;\\ \bullet\ \text{la droite d'équation } x = a\,;\\ \bullet\ \text{la droite d'équation } x = b\,;\\ \text{exprimée dans l'unité d'aire.}\end{array}\right)$$

C9.9. Illustration géométrique de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment

L'intégrale $\int_1^7 f(x)\, \mathrm{d}x$ égale :

(somme des 2 aires violettes)−(somme des 2 aires vertes)

où les aires sont exprimées en unité d'aire.



C9.10. Intégrale de Riemann Nous construirons plus tard l'intégrale de manière rigoureuse, en utilisant des fonctions en escalier et une résultat d'approximation uniforme d'une fonction continue sur un segment par des fonctions en escalier. Nous pourrons alors démontrer rigoureusement les propriétés fondamentales énoncées ci-dessous.

C9.11. Théorème (fondamentales de l'intégrale de Riemann)

1. *Relation de Chasles* Soient $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $c \in \,]a,b[$. Alors :
$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\, \mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\, \mathrm{d}x\,.$$
2. *Linéarité* Soient $f_1\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_2\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ et $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Alors :
$$\int_a^b \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)\, \mathrm{d}x = \lambda_1 \int_a^b f_1(x)\, \mathrm{d}x + \lambda_2 \int_a^b f_2(x)\, \mathrm{d}x\,.$$
3. *Positivité* Soit $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \geqslant 0$. Alors :
$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \geqslant 0.$$
4. *Séparation* Soit $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \geqslant 0$. Alors :
$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \big(\forall x \in [a,b] \quad f(x) = 0\big)\,.$$
5. *Croissance* Soient $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ telles que, pour tout $x \in [a,b]$, $f_1(x) \leqslant f_2(x)$. Alors :
$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x\,.$$

C9.12. Exercice (majoration de la valeur absolue d'une intégrale) Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$. Déduire du théorème C9.11 que :

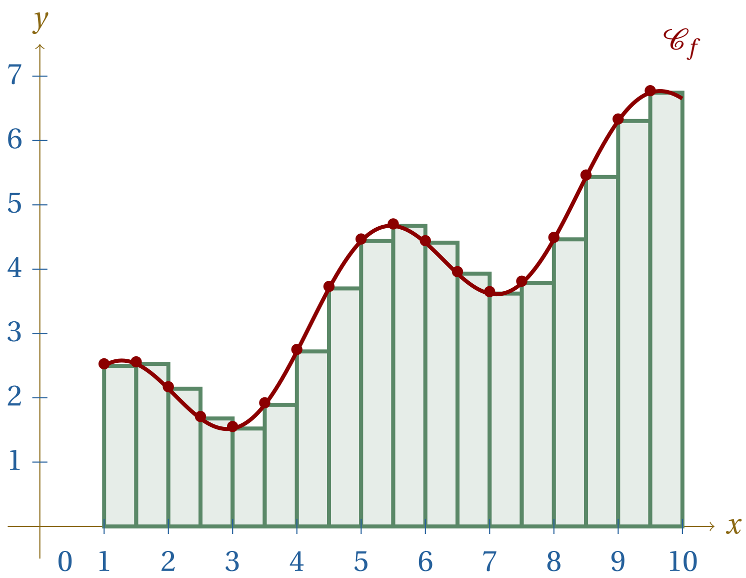
$$\left| \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x\,.$$

C9.13. Remarque Le lien entre la définition rigoureuse de l'intégrale due à Riemann et l'interprétation géométrique présentée au tout début s'incarne dans le résultat suivant.

C9.14. Théorème (Sommes de Riemann) Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$. Alors :

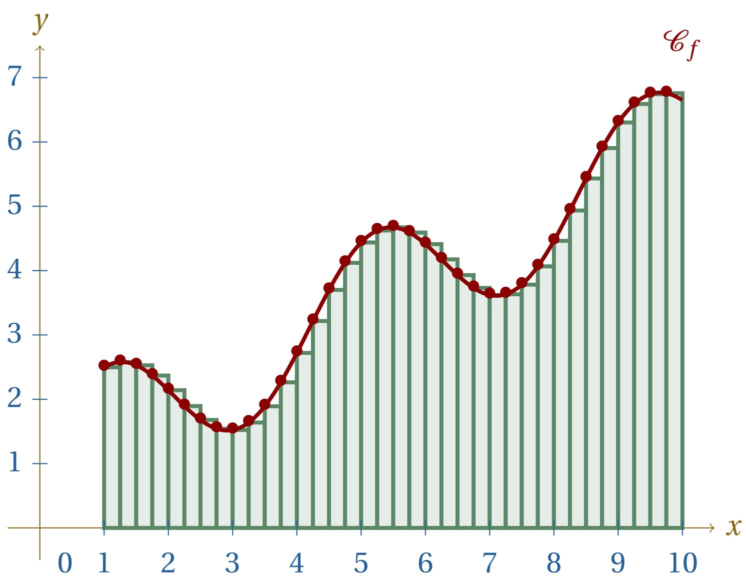
$$S_n(f) := \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x\,.$$

C9.15. Illustration géométrique des sommes de Riemann ou méthode des rectangles



$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)$$

$a = 1$, $b = 10$, $n = 18$



$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)$$

$a = 1$, $b = 10$, $n = 36$

C9.16. Exercice Reprendre le calcul de $I_3 := \int_2^5 3x-1 \, \mathrm{d}x$ (cf. C9.6) en utilisant les sommes de Riemann.

C9.17. Exercice Calculer $\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x$ en utilisant les sommes de Riemann.

C9.18. Exercice Calculer $\int_1^4 x^3 \, \mathrm{d}x$ en utilisant les sommes de Riemann.

C9.19. Exercice Calculer $\int_0^{\pi/2} \sin(x) \, \mathrm{d}x$ en utilisant les sommes de Riemann.

§ 2 Primitive d'une fonction

C9.20. Définition (primitive) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Une primitive de f sur I est une fonction $F\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

(P1) F est dérivable sur I ;

(P2) pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

C9.21. Remarque Cette définition se généralise *mutatis mutandis* aux fonctions de la variable réelle à valeurs complexes.

C9.22. Exercice Donner une primitive de $f\colon x \longmapsto x^3 + \cos(4x) + \dfrac{x}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$

C9.23. Exercice Donner une primitive de $f\colon x \longmapsto \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^3}}$ sur $]-1,1[$

C9.24. Exercice Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Donner une primitive de $f\colon x \longmapsto e^{\lambda x}$ sur $\mathbb{R}$.

C9.25. Exercice Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Donner une primitive des fonctions

$$f\colon x \longmapsto e^{ax}\cos(bx) \qquad\qquad g\colon x \longmapsto e^{ax}\sin(bx)$$

sur $\mathbb{R}$.

Méthode

Une idée élégante pour primitiver f et g est le passage au champ complexe.

(1) On introduit la fonction $h\colon x \longmapsto e^{(a+ib)x}$, de sorte que $\mathrm{Re}(h) = f$ et $\mathrm{Im}(h) = g$.

(2) Par définition de la dérivée d'une fonction de la variable réelle à valeurs complexes (C8.191), la dérivation commute avec la partie réelle (resp. la partie imaginaire). Donc si $H\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une primitive de h sur $\mathbb{R}$, $F := \mathrm{Re}(H)$ (resp. $G := \mathrm{Im}(H)$) est une primitive de f (resp. g) sur $\mathbb{R}$.

(3) D'après C9.24 :

$$H\colon x \longmapsto \frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib}$$

est une primitive de h sur $\mathbb{R}$. Il reste à calculer $\mathrm{Re}(H)$ et $\mathrm{Im}(H)$. On commencera pour cela par remarquer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$H(x) = \frac{e^{ax}}{\underbrace{a^2+b^2}_{\in\mathbb{R}}} \times (a-ib) \times (\cos(bx) + i\sin(bx)) \ .$$

C9.26. Théorème (description de toutes les primitives d'une fonction sur un intervalle)
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $F_0\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ une primitive de f sur I.

1. Pour tout $K \in \mathbb{R}$, l'application :
$$F \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & F_0(x)+K \end{array} \right.$$
est une primitive de f sur I.
2. Réciproquement, si $F\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de f sur I, alors :
$$\exists K \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad F(x) = F_0(x)+K\,.$$

L'ensemble des primitives de f sur I est donc $\boxed{\left\{ \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & F_0(x)+K \end{array} \right. : K \in \mathbb{R} \right\}.}$

C9.27. Théorème (fondamental de l'analyse) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et $x_0 \in I$. Alors l'application :
$$\boxed{F_{x_0} \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t \end{array} \right.}$$
est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en x_0.

C9.28. Remarque (condition suffisante d'existence d'une primitive) D'après le théorème C9.27, toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle.

C9.29. Théorème (lien entre intégrale et primitive) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et $(a,b) \in I^2$. Si $F\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de f sur I alors :
$$\boxed{\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = [F(t)]_a^b := F(b)-F(a)\,.}$$

C9.30. Exercice Dans chacun des cas ci-dessous, donner une primitive F de la fonction f sur l'intervalle I précisé.

(1) $f\colon x \longmapsto x^3+x+1\ ,\ I=\mathbb{R}$

(2) $f\colon x \longmapsto -x^5+6x^4+\dfrac{3}{2}x^3-7x^2+11x-1\ ,\ I=\mathbb{R}$

(3) $f\colon x \longmapsto \dfrac{a}{x}+bx\ ,\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\ ,\ I=]0,+\infty[$

(4) $f\colon x \longmapsto x^{3/4}-2x^{5/11}+3x^{2/7}\ ,\ I=]0,+\infty[$

(5) $f\colon x \longmapsto \dfrac{1-x^n}{1-x}\ ,\ n\in\mathbb{N}^*\ ,\ I=]1,+\infty[$

(6) $f\colon x \longmapsto (14x+7)\left(x^2+x+1\right)^4\ ,\ I=\mathbb{R}$

(7) $f\colon x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}\ ,\ I=]0,+\infty[$

(8) $f\colon x \longmapsto \dfrac{-1}{(2x-3)^5}\ ,\ I=\left]-\infty,\dfrac{3}{2}\right[$

(9) $f\colon x \longmapsto \dfrac{x}{x^2+3}\ ,\ I=\mathbb{R}$

(10) $f\colon x \longmapsto \dfrac{3x^2+4x}{\left(x^3+2x^2+7\right)^2}\ ,\ I=[0,+\infty[$

(11) $f : x \longmapsto \dfrac{2x+1}{x+3}$, $I =]-\infty, -3[$

(12) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2-1}$, $I =]-1, 1[$

(13) $f : x \longmapsto \dfrac{3x}{\left(2x^2+1\right)^2+5} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $I =]0, +\infty[$

(14) $f : x \longmapsto \dfrac{3\,x}{\sqrt{1+x^2}}$, $I = \mathbb{R}$

(15) $f : x \longmapsto \cos\left(5x + \dfrac{\pi}{3}\right)$, $I = \mathbb{R}$

(16) $f : x \longmapsto \sin(x)\cos^3(x)$, $I = \mathbb{R}$

(17) $f : x \longmapsto \sin^4(x)$, $I = \mathbb{R}$

(18) $f : x \longmapsto \cos^2(x)\sin^3(x)$, $I = \mathbb{R}$

(19) $f : x \longmapsto 3\sin(2x)\sin(5x)$, $I = \mathbb{R}$

(20) $f : x \longmapsto \dfrac{7}{\cos^2(2x)}$, $I = \left]-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right[$

(21) $f : x \longmapsto \tan(x)$, $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$

(22) $f : x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{1+2\cos^2(x)}$, $I = \mathbb{R}$

(23) $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$, $I =]0, +\infty[$

(24) $f : x \longmapsto \mathrm{th}(x)$, $I = \mathbb{R}$

(25) $f : x \longmapsto x\,e^{-x^2}$, $I = \mathbb{R}$

(26) $f : x \longmapsto \dfrac{3}{x^2}\,e^{1/x}$, $I =]0, +\infty[$

(27) $f : x \longmapsto \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$, $I =]0, +\infty[$

(28) $f : x \longmapsto \dfrac{e^x+1}{e^x+x}$, $I = [0, +\infty[$

(29) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$, $I = \mathbb{R}$

(30) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{3^x}$, $I = \mathbb{R}$

(31) $f : x \longmapsto (ax+b)e^{-2x}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, $I = \mathbb{R}$

(32) $f : x \longmapsto (1+\ln(x))\,x^x$, $I =]0, +\infty[$

(33) $f : x \longmapsto x\sqrt{1+x^2}$, $I = \mathbb{R}$

(34) $f : x \longmapsto \dfrac{\cos(\ln(x))}{x}$, $I =]0, +\infty[$

(35) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}}$, $I = \left]\dfrac{1}{e}, e\right[$

(36) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}$, $I =]0, +\infty[$

(37) $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{Arcsin}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$, $I =]-1, 1[$

(38) $f : x \longmapsto \mathrm{ch}^3(x)\,\mathrm{sh}^2(x)$, $I = \mathbb{R}$

(39) $f : x \longmapsto \dfrac{\tan(x)}{\cos^2(x)}$, $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$

(40) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$, $I = \mathbb{R}$

(41) $f : x \longmapsto \sin(2x)\,e^{-x}$, $I = \mathbb{R}$

(42) $f : x \longmapsto \cos(3x)\,e^{4x}$, $I = \mathbb{R}$

C9.31. Lemme Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Nous considérons le trinôme $P := aX^2 + bX + c$ et son discriminant $\Delta := b^2 - 4ac$.

- *Cas où $\Delta > 0$.* P possède deux racines réelles x_1, x_2 distinctes et $\boxed{P = a(X - x_1)(X - x_2).}$
- *Cas où $\Delta = 0$* P possède une unique racine réelle et $\boxed{P = a(X - x_0)^2.}$
- *Cas où $\Delta < 0$* En calculant la forme canonique de P, on peut écrire P sous la forme :

$$\boxed{P = a \times \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2 \times \left(\left(\frac{2aX + b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2 + 1\right).}$$

C9.32. Exercice Déterminer une primitive de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$ sur un intervalle I que l'on précisera.

C9.33. Exercice Déterminer une primitive de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2 + 4x - 3}$ sur un intervalle I que l'on précisera.

C9.34. Exercice Déterminer une primitive de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2 + 4x + 2}$ sur un intervalle I que l'on précisera.

Méthode

Si $(a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on peut calculer une primitive de $f : x \longmapsto \dfrac{1}{ax^2 + bx + c}$ comme suit. Notons $\Delta := b^2 - 4ac$.

- *Cas où $\Delta > 0$.* Notons $x_1 < x_2$ les deux racines réelle distinctes de $aX^2 + bX + c$. Alors :

$$\frac{1}{aX^2 + bX + c} = \frac{1}{a(X - x_1)(X - x_2)} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{x_1 - x_2}\left(\frac{1}{X - x_1} - \frac{1}{X - x_2}\right) \qquad \left[\begin{array}{c}\text{décomposition en} \\ \text{éléments simples}\end{array}\right]$$

ce qui permet de primitiver f sur chacun des intervalles $]-\infty, x_1[$, $]x_1, x_2[$ et $]x_2, +\infty[$.

- *Cas où $\Delta = 0$.* Notons x_0 l'unique racine réelle de P. Alors :

$$\frac{1}{aX^2 + bX + c} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{(X - x_0)^2}$$

ce qui permet de primitiver f sur chacun des intervalles $]-\infty, x_0[$ et $]x_0, +\infty[$.

- *Cas où $\Delta < 0$.* En calculant la forme canonique de $aX^2 + bX + c$, on détermine $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\frac{1}{aX^2 + bX + c} = \frac{1}{a} \times \frac{\left(\dfrac{2a}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2}{\left(\left(\dfrac{2aX + b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2 + 1\right)} = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \times \frac{\dfrac{2a}{\sqrt{-\Delta}}}{1 + \left(\dfrac{2aX + b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2}$$

pour faire apparaître la dérivée de la fonction affine $x \longmapsto \dfrac{2aX + b}{\sqrt{-\Delta}}$ composée par Arctan. On peut ainsi primitiver f sur $\mathbb{R}$.

C9.35. EXERCICE Déterminer une primitive de la fonction $f\colon x \longmapsto \dfrac{1}{3x^2+2x+1}$ sur un intervalle I que l'on précisera.

C9.36. EXERCICE Déterminer une primitive de la fonction $f\colon x \longmapsto \dfrac{1}{6x^2+x-1}$ sur un intervalle I que l'on précisera.

C9.37. EXERCICE Déterminer une primitive de la fonction $f\colon x \longmapsto \dfrac{1}{x^2-6x+9}$ sur un intervalle I que l'on précisera.

C9.38. PROPOSITION (PRIMITIVE DE L'INVERSE D'UN TRINÔME DU SECOND DEGRÉ)
Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $P = aX^2+bX+c$, $f\colon x \longmapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ et $\Delta := b^2-4ac$.

- *Cas où* $\Delta > 0$. Si $x_1 < x_1$ sont les deux racines réelles de P alors :

$$\boxed{F\colon x \longmapsto \frac{1}{a} \times \frac{1}{x_1-x_2} \times \ln\left(\left|\frac{x-x_1}{x-x_2}\right|\right)}$$

  est une primitive de f sur chacun des intervalles $]-\infty, x_1[$, $]x_1, x_2[$ et $]x_2, +\infty[$.

- *Cas où* $\Delta = 0$. Si x_0 est l'unique racine réelle de P alors :

$$\boxed{F\colon x \longmapsto -\frac{1}{a} \times \frac{1}{x-x_0}}$$

  est une primitive de f sur chacun des intervalles $]-\infty, x_0[$ et $]x_0, +\infty[$.

- *Cas où* $\Delta < 0$. Alors :

$$\boxed{F\colon x \longmapsto \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \times \operatorname{Arctan}\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)}$$

  est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

§ 3 CALCUL D'INTÉGRALES

C9.39. PROPOSITION (CALCUL D'INTÉGRALES PAR PRIMITVATION DE L'INTÉGRANDE)
Soit $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$. Si l'on sait expliciter une primitive $F\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de f sur $[a,b]$, alors on peut calculer $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ grâce à l'identité :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)\,.}$$

C9.40. Exercice Calculer les intégrales suivantes.

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{1} 2t-5 \, dt$

(2) $\displaystyle\int_{1/3}^{5/2} \frac{1}{x^2} \, dx$

(3) $\displaystyle\int_{5}^{1} \frac{3t^2-4t+1}{t} \, dt$

(4) $\displaystyle\int_{-1}^{-3} \frac{1}{x^4} \, dx$

(5) $\displaystyle\int_{6}^{10} \frac{5x}{\sqrt{x^2-3}} \, dx$

(6) $\displaystyle\int_{1}^{4} u+\frac{1}{u} \, du$

(7) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \sin(u)+\sin(2u) \, du$

(8) $\displaystyle\int_{0}^{1} \left(3x^2+5\right)\left(x^3+5x-2\right) dx$

(9) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{t-1}{\left(3t^2-6t+1\right)^2} \, dt$

(10) $\displaystyle\int_{-\pi/6}^{\pi/3} \tan(t) \, dt$

(11) $\displaystyle\int_{1}^{e-1} \frac{t}{1+t} \, dt$

(12) $\displaystyle\int_{e}^{e^2} \frac{1}{x\ln(x)} \, dx$

(13) $\displaystyle\int_{e}^{e^2} \frac{\ln(x)}{x} \, dx$

(14) $\displaystyle\int_{0}^{1} e^{3x+1} \, dx$

(15) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{e^u}{e^u+5} \, du$

(16) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{e^u+1}{(e^u+u)^2} \, du$

(17) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x\, e^{x^2} \, dx$

(18) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \sin(t)\cos(t)e^{\cos(2t)} \, dt$

(19) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \cos^2(t) \, dt$

(20) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin(3x)\cos(x) \, dx$

(21) $\displaystyle\int_{-\pi/3}^{\pi/6} \sin(2x)\sin(5x) \, dx$

(22) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \sin^3(x) \, dx$

(23) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{5\pi/6} \cos^3(x)\sin^3(x) \, dx$

(24) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi} \cos^2(x)\sin^4(x) \, dx$

(25) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi/3} \cos(x)e^x \, dx$

(26) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \sin(3x)e^{-2x} \, dx$

(27) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/3} \tan^2(u) \, du$

(28) $\displaystyle\int_{5\pi/4}^{5\pi/3} \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \, dx$

(29) $\displaystyle\int_{-1}^{4} |4x-9| \, dx$

(30) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} |\sin(x)-\cos(x)| \, dx$

(31) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \tan(x)+\tan^3(x) \, dx$

(32) $\displaystyle\int_{-1}^{4} \left|t^2-t\right|+3 \, dt$

(33) $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{1}{u^2+u-6} \, du$

(34) $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{1}{x(x-1)} \, dx$

(35) $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{1}{\sqrt{3x}} e^{-\sqrt{2x}} \, dx$

(36) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi} \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)+\cos(t)+1} \, dt$

(37) $\displaystyle\int_{3}^{9} \frac{1}{x^2-9} \, dx$

(38) $\displaystyle\int_{-2}^{2} t\, e^{|t^2-1|} \, dt$

(39) $\displaystyle\int_{-1}^{2} (1-t)^3 \, dt$

(40) $\displaystyle\int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \frac{1}{e^{x/2}\sqrt{1-e^{-x}}} \, dx$

(41) $\displaystyle\int_{0}^{\ln(2)} \frac{1}{e^x\sqrt{1+e^{-x}}} \, dx$

(42) $\displaystyle\int_{1}^{2} x^{2/3}-\frac{1}{x^{3/4}} \, dx$

(43) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}} \, dx$

(44) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/3} (6x^2+4x)e^{x^3+x^2} \, dx$

(45) $\displaystyle\int_{1}^{\ln(4)} e^{2x}-\frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$

(46) $\displaystyle\int_{1}^{\ln(5)} \frac{\mathrm{ch}(t)}{\mathrm{sh}(t)} \, dt$

(47) $\displaystyle\int_{0}^{6} \mathrm{ch}^2\left(\frac{t}{3}\right) dt$

(48) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{4+t^4} \, dt$

(49) $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{1}{t(t+1)(t+2)} \, dt$

(50) $\displaystyle\int_{2}^{4} \frac{1}{x\ln^2\left(x^3\right)} \, dx$

(51) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \frac{1+\tan^2(t)}{2+\tan(t)} \, dt$

C9.41. Proposition (intégration par parties)

Soient $u\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$.

$$\boxed{\int_a^b u'(x)\,v(x)\ \mathrm{d}x = [u(x)\,v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)\,v'(x)\ \mathrm{d}x\,.}$$

C9.42. Exercice Calculer les intégrales suivantes, au moyen d'intégrations par parties.

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} t\cos(t)\ \mathrm{d}t$

(2) $\displaystyle\int_0^1 t^2\,e^t\ \mathrm{d}t$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} \left(3t^2 - t + 1\right)\sin(t)\ \mathrm{d}t$

(4) $\displaystyle\int_0^1 t^2\,e^{-t}\ \mathrm{d}t$

(5) $\displaystyle\int_1^x \ln(t)\ \mathrm{d}t\,,\ x \in \mathbb{R}_{>0}$

(6) $\displaystyle\int_0^x \mathrm{Arctan}(t)\ \mathrm{d}t\,,\ x \in \mathbb{R}$

(7) $\displaystyle\int_0^x \mathrm{Arcsin}(t)\ \mathrm{d}t\,,\ x \in]-1,1[$

(8) $\displaystyle\int_1^e \left(t^2+3\right)\ln(t)\ \mathrm{d}t$

(9) $\displaystyle\int_1^2 t\ln^2(t)\ \mathrm{d}t$

(10) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}\ \mathrm{d}t$

(11) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}\ \mathrm{d}t$

(12) $\displaystyle\int_{-2}^2 t^2\,e^{|t-1|}\ \mathrm{d}t$

(13) $\displaystyle\int_1^e t^{\alpha}\ln(t)\ \mathrm{d}t\,,\ \alpha \in \mathbb{R}$

(14) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} u\cos^2(u)\ \mathrm{d}u$

(15) $\displaystyle\int_0^1 t^3\,e^{-2t}\ \mathrm{d}t$

C9.43. Proposition (intégration par changement de variable)

Soient $\varphi\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ et f une fonction définie et continue sur un intervalle I, telle que, pour tout $x \in [a,b]$, $\varphi(x) \in I$.

$$\boxed{\underbrace{\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\ \mathrm{d}t}_{t \text{ ancienne variable}} = \underbrace{\int_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\ \mathrm{d}x}_{x \text{ nouvelle variable}}\,.}$$

Méthode

Si $\alpha < \beta$ sont des réels et $f\colon [\alpha,\beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors on pourra transformer $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\ \mathrm{d}t$ au moyen du changement de variable $t = \varphi(x)$ comme suit.

1. On détermine un réel a (resp. b) tel que $\alpha = \varphi(a)$ (resp. $\beta = \varphi(b)$), que l'on suppose exister.
2. On calcule la dérivée de φ.
3. On effectue les substitutions :

$$\boxed{t \longleftarrow \varphi(x) \qquad \alpha \longleftarrow a \qquad \beta \longleftarrow b \qquad \mathrm{d}t \longleftarrow \varphi'(x)\ \mathrm{d}x}$$

pour <u>en une seule fois</u> transformer $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\ \mathrm{d}t$ en $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\ \mathrm{d}x$.

Dans le cas considéré, l'ancienne variable t s'exprime à l'aide de la nouvelle x (cf. $t = \varphi(x)$), mais il pourra arriver que la nouvelle variable x soit donnée en fonction de l'ancienne t ($x = \psi(t)$). Il faudra alors adapter la méthode exposée.

C9.44. Exercice Calculer les intégrales suivantes, au moyen des changements de variable indiqués.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t\,,\ x=\sqrt{1+t}$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}\,\mathrm{d}t\,,\ x=e^t$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^3(t)\,\mathrm{d}t\,,\ x=\cos(t)$

(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{Arctan}^2(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\,,\ x=\mathrm{Arctan}(t)$

(5) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t\,,\ x=\tan(t/2)$

(6) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2+\cos(t)}\,\mathrm{d}t\,,\ x=\tan(t/2)$

(7) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{4-t^2}\,\mathrm{d}t\,,\ t=2\cos(\theta)$

(8) $\displaystyle\int_2^4 t^2\ln\left(t^6-1\right)\mathrm{d}t\,,\ x=t^3$

(9) $\displaystyle\int_{-3}^3 t^{2022}\,\mathrm{sh}(t)\ln(|t|+1)\,\mathrm{d}t\,,\ t=-x$

(10) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{2\cos(t)+\cos(2t)+3}\,\mathrm{d}t\,,\ x=\sin(t)$